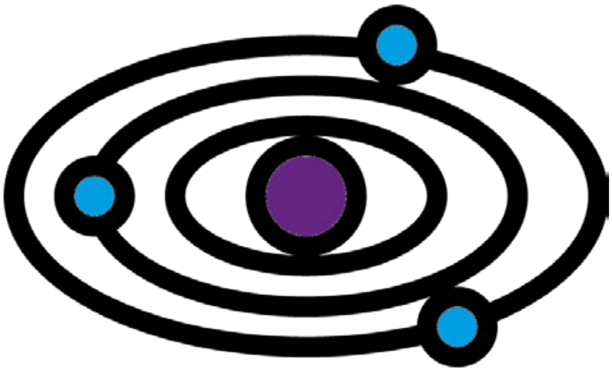
te lo cuentan las cónicas

Guía de los talleres manipulativo y tecnológico



te lo cuentan las matemáticas

te lo cuentan las cónicas

Contenido

1. Te lo cuentan las cónicas

La segunda parte de la propuesta recibe el nombre de *Te lo cuentan las cónicas* y está concebida para desarrollarse en torno al 11 de febrero, en el que se celebra el Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia.

Está formada por dos partes: *Te lo cuenta una astrónoma*, constituida por un taller manipulativo y otro tecnológico; y *Te lo cuenta Hipatia de Alejandría,* sección en la que se recoge una biografía sobre la vida científica y personal de la figura histórica de Hipatia de Alejandría.

En la siguiente tabla se describen la estructura, contenidos y objetivos de esta segunda parte:

Tabla 1
Organización de los talleres Te lo cuenta las cónicas

Te lo cuentan las cónicas **DÍA INTERNACIONAL DE LA MUJER Y LA NIÑA EN LA CIENCIA**			
Nombre acción	**Tipo acción**	**Contenidos**	**Objetivos**
Te lo cuenta una astrónoma	Taller manipulativo	Las cónicas. Aplicación: órbitas de planetas.	Utilizar métodos gráficos para deducir propiedades geométricas. Identificar las cónicas como secciones del cono.
	Taller tecnológico	Propiedades de las cónicas. Aplicación: lanzamiento de satélites.	Reconocer las simetrías de la elipse. Identificar las cónicas en función de su excentricidad.
Te lo cuentan Hipatia de Alejandría y Beatriz Álvarez	Encuentro con investigadora junior	Historia personal y científica de Hipatia de Alejandría y Beatriz Álvarez.	Visibilizar la profesión de los investigadores e investigadoras matemáticas. Generar vocaciones matemáticas, especialmente en las niñas.

1.1. Objetivos específicos

El taller manipulativo asociado a *Te lo cuenta una astrónoma* está diseñado para que el alumnado conozca las cónicas y sus representaciones. A través de métodos gráficos se pretende que descubran qué propiedades las hacen tan especiales y útiles en el mundo que nos rodea, en concreto en la astronomía: las órbitas de los planetas tienen esta forma, pero se ha tardado siglos en descubrirlo.

En el taller tecnológico se busca que el alumnado siga profundizando en el mundo de las circunferencias y las elipses, a la vez que desarrollan sus habilidades con el software informático GeoGebra. Este software les ayudará a hacer más explícita su representación y comprender mejor las propiedades estudiadas en el taller manipulativo. Además, utilizarán un simulador del lanzamiento de un satélite para percibir la importancia de las cónicas en la toma de datos e imágenes de nuestro planeta. Se pretende despertar su interés y curiosidad, con el fin último de aumentar su motivación.

2. Taller manipulativo *Te lo cuenta una astrónoma*

En este taller aprenderemos a:

- Representar la circunferencia y la elipse mediante métodos gráficos.
- Relacionar las cónicas con las órbitas de los planetas.
- Identificar los elementos principales de la circunferencia y la elipse
- Analizar las propiedades particulares de la circunferencia y la elipse.
- Aplicar el método científico para refutar teorías astronómicas.
- Comprender la importancia de las cónicas en la astronomía.
- Identificar y distinguir los cuatro tipos de cónicas.
- Conocer el origen del nombre de las cónicas.
- Representar las cónicas a través de las secciones de un cono.

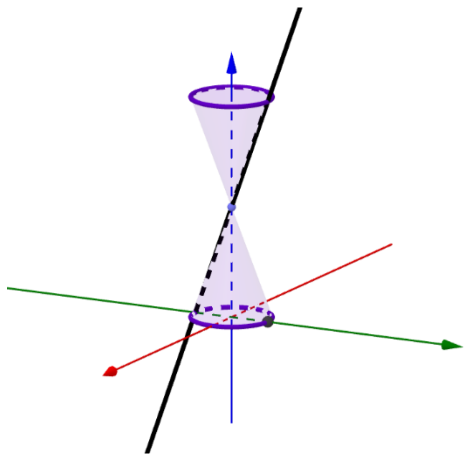
2.1. Contenidos a desarrollar (para el profesorado)

Las cónicas

Las **cónicas**, son una serie de curvas planas que reciben ese nombre porque pueden obtenerse como las líneas resultantes de **intersecar un cono con un plano**.

Todo cono se puede generar a través del giro de una recta en torno al eje vertical. Esta recta se conoce como **generatriz del cono** (Figura 1).

Figura 1
Generatriz del cono

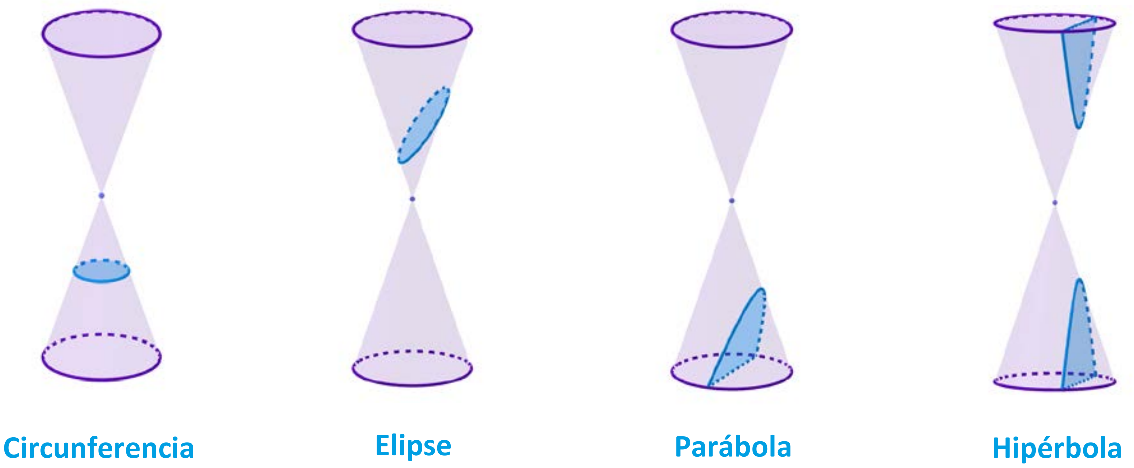


En función de la inclinación del plano de corte podemos obtener diferentes resultados, como se aprecia en la Figura 2:

- si el plano se coloca paralelo a la base del cono obtenemos una **circunferencia;**
- si el plano tiene mayor inclinación que la generatriz, obtendremos una **elipse**;
- si la inclinación del plano es la misma que la de la generatriz, una **parábola**;
- si la inclinación es inferior a la de la recta generatriz, obtendremos una **hipérbola**.

Figura 2

Cónicas como intersecciones del cono con distintos planos

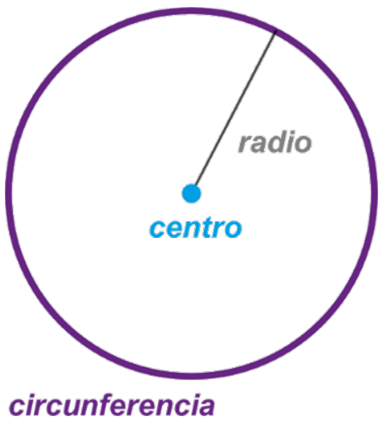


Nota. Elaboración propia.

Cada tipo de cónica tiene una **propiedad geométrica** que la define. Por ejemplo, la circunferencia está formada por todos los puntos del plano que distan lo mismo de otro punto concreto, que se denomina **centro.** El segmento que une el centro con cualquier otro punto de la circunferencia se llama **radio**, como se representa en la siguiente figura.

Figura 3

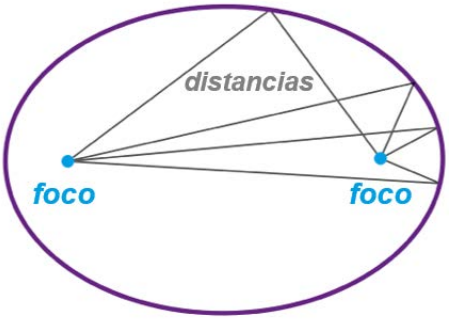
Centro y radio de una circunferencia



La elipse, por su parte, es el conjunto de todos los puntos que verifican que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos escogidos previamente, que llamamos **focos**, es siempre la misma.

Figura 4

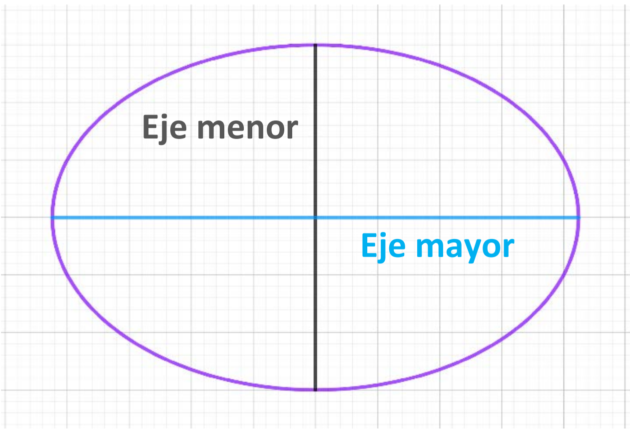
Distancias a los focos de una elipse



En la elipse esa distancia coincide con la medida del eje mayor. El **eje mayor** de la elipse es el segmento contenido en la elipse que pasa por los dos focos. Trazando por el punto medio del eje mayor una recta perpendicular a este obtenemos el **eje menor**, que es el segmento de esa recta que está contenido en la elipse. El punto de corte de ambos ejes es el **centro de la elipse.**

Figura 5

Ejes de la elipse



Este tipo de curvas aparecen en multitud de situaciones la vida real, desde el diseño de gafas y espejos, pasando por las telecomunicaciones entre otras muchas disciplinas. En este taller nos centraremos en su vinculación con la astronomía.

La geometría de las órbitas de los planetas

Desde la antigüedad las civilizaciones han mirado al cielo intentando entender qué relevancia tenían en sus vidas los astros que observaban. Con sus movimientos buscaban explicar otros fenómenos observables, como el día y la noche o las estaciones.

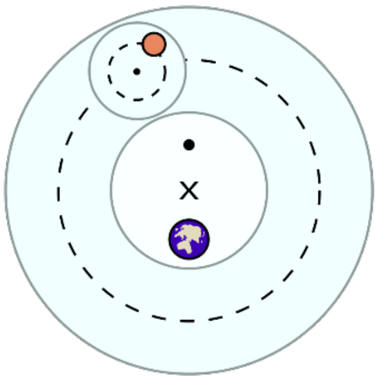
Las **primeras teorías** conocidas defendían que los **astros giraban describiendo circunferencias**. Esto no es sorprendente ya que, para muchas civilizaciones como por ejemplo la griega, los círculos eran formas que transmitían belleza y perfección.

Un argumento sencillo que permitió rebatir estos modelos de órbitas circulares fue el siguiente: como ya hemos explicado, una circunferencia es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia fija de otro punto concreto que se denomina centro de la circunferencia. Si las órbitas fuesen circulares, un cuerpo celeste que estuviera ubicado en el centro de la circunferencia estaría siempre a la misma distancia de cualquier astro que girase alrededor. Pero esto es contrario a las observaciones empíricas, pues desde la Tierra se observa el Sol con un mayor o menor tamaño dependiendo de la época del año.

A lo largo de la historia se fueron rebatiendo unas y surgiendo otras teorías nuevas, pero la que estuvo vigente más tiempo fue la propuesta por Ptolomeo de Alejandría en el siglo II d.C. Sin abandonar la idea del círculo, se basó en el sistema de epiciclos para desarrollar su propio modelo, combinando diversas circunferencias para describir las órbitas.

Figura 6

Modelo de epiciclos de Ptolomeo



Nota. Tomada de *Los elementos básicos de la astronomía de Ptolomeo, mostrando un planeta en un epiciclo con un deferente excéntrico y un punto ecuante.* [Imagen], 2021, Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_geoc%C3%A9ntrica)

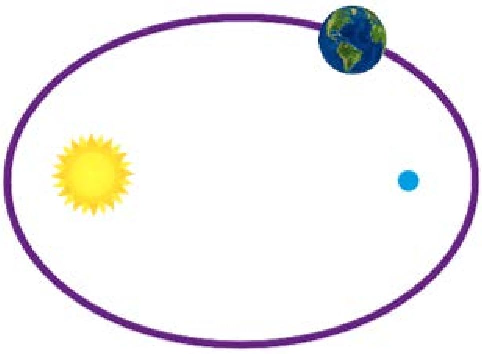
No será hasta el siglo XVII cuando **Johannes Kepler** presente un modelo mucho más cercano al actual. Apoyándose en observaciones hechas con telescopio y presentadas por Galileo Galilei, gracias a las mejoras de los medios de la época, Kepler propuso un nuevo tipo de órbitas: las **órbitas elípticas**.

Estas órbitas resolverían el misterio de por qué el Sol cambiaba su tamaño a lo largo del año desde nuestra perspectiva. Si recordamos, la elipse es el conjunto de puntos del plano que cuya suma de las distancias a otros dos puntos fijos, los focos de la elipse, es constante (véase de nuevo la Figura 4).

Si el Sol está en uno de los focos de la elipse, como Kepler proponía, cuando la Tierra pase por la zona más cercana a ese foco el Sol se verá más grande que cuando se encuentre cerca del otro foco, como se puede ver en la Figura 7.

Figura 7

Órbita de la Tierra alrededor del Sol



Esto explicaría por qué en algunas épocas del año, y cíclicamente, el tamaño del Sol percibido desde la Tierra varía. Pese a todo, las civilizaciones más antiguas no estaban tan lejos de la realidad, pues si juntamos los dos focos de la elipse en un solo punto lo que obtendremos es precisamente una circunferencia. Es decir, la circunferencia es un caso particular de elipse en la que los dos focos coinciden en el mismo punto. En el epígrafe Contenidos a desarrollar del Taller tecnológico *Te lo cuenta una astrónoma* se tratará cómo medir “cuan ovalada” es una elipse.

Cabe destacar que en este breve repaso histórico nos hemos centrado en las teorías de las distintas formas de las órbitas. No obstante, para tener una visión más completa de la evolución de las teorías astronómicas deberíamos tener en cuenta alrededor de qué astro se consideraba que giraban los demás. Durante muchos siglos se aceptó que la Tierra se situaba en el centro (**modelo geocéntrico**) y los planetas y estrellas giraban alrededor. Con el paso del tiempo se demostró que es el Sol el que encuentra en uno de los focos de la órbita elíptica que describe la Tierra a su alrededor (**modelo heliocéntrico**).

2.2. Material

Para este taller necesitaremos:

- Material escolar básico (bolígrafo o preferentemente rotulador, folios, regla y tijeras).
- Plastilina.
- Marca páginas u objeto para cortar plastilina (una tarjeta o una regla, por ejemplo).
- Témpera.
- Recipiente para la témpera.
- Una plancha de cartón-pluma de tamaño A4.
- Chinchetas con cabeza.
- Un metro de hilo grueso.
- La ficha “La estrella oculta”.

Figura 8

Material específico del taller manipulativo Te lo cuenta una astrónoma

2.3. Temporización y secuenciación

Las sesiones están pensadas para una duración aproximada de hora y media. En este caso, la actividad estará dividida en cuatro partes diferenciadas.

- *Primera parte: las órbitas circulares*
- *Segunda parte: las órbitas elípticas*
- *Tercera parte: la estrella oculta en el foco*
- *Cuarta parte: las cónicas*

2.4. Desarrollo de la sesión

Primera parte: las órbitas circulares

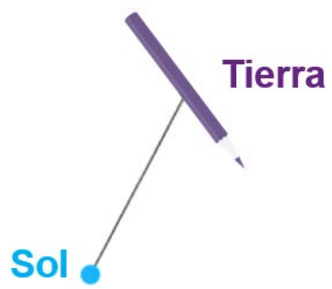
Comenzaremos motivando este taller manipulativo a través de la astronomía. A lo largo de la historia los astrónomos y astrónomas han ido creando diversas teorías sobre cómo se movían los astros en el universo. Para estudiar los cuerpos celestes se inventaron diversos instrumentos que fueron mejorando con el tiempo, como el astrolabio (Diapositiva 2).

El primer paso para comenzar a estudiar los movimientos de los cuerpos celestes será tomar nuestra base de experimentos, la plancha de cartón pluma, así como las chinchetas, el hilo y un folio (Diapositiva 3).

Durante siglos se creyó que los astros giraban formando circunferencias. Comenzaremos replicando ese supuesto movimiento: una órbita circular (Diapositiva 4). Deberán elegir un punto y con una chincheta clavar el folio a la base de cartón pluma. El punto escogido será el Sol (Figura 9). Posteriormente deberán cortar un pequeño trozo de hilo y atar un extremo a la chincheta y otro a un rotulador. El rotulador simbolizará la Tierra que gira alrededor del Sol, por tanto una vez atado les pediremos que lo giren alrededor de la chincheta-Sol (Diapositiva 5).

Figura 9

Trazado de órbitas circulares en la base de experimentos

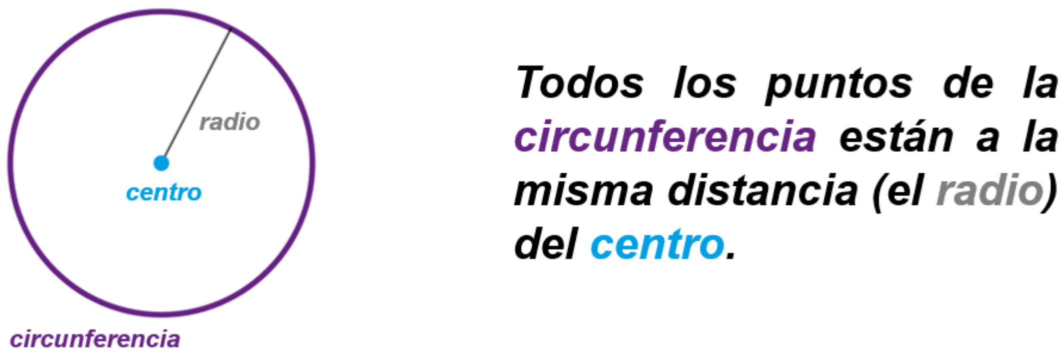


Estudiaremos a continuación como cambian este tipo de órbitas en función del radio. Les pediremos que corten ese mismo hilo para hacerlo un poco más corto y repitan el proceso. Les preguntaremos entonces qué ocurre en ese caso y en qué se diferencian las dos órbitas que hemos dibujado. A partir de esta experiencia deduciremos que lo que define cuán grande o pequeña será la circunferencia obtenida será la longitud del hilo, es decir el radio, conservándose la forma de la órbita.

La última propiedad que buscamos que deduzcan entre todos (Diapositiva 6), debatiéndolo en grupo, es precisamente la propiedad que caracteriza la circunferencia. Les preguntaremos qué tienen en común todos los puntos que conforman la órbita descrita en común, dándoles pistas con otras preguntas que los guíen hacia la respuesta, como a cuánta distancia están todos ellos del Sol (Diapositiva 7).

Figura 10

Propiedad característica de la circunferencia (Diapositiva 7)



Tal y como planteamos esta parte de la sesión, los participantes comienzan a trabajar las cónicas ligadas a la astronomía, más concretamente a las órbitas planetarias, fomentando así que se produzca un aprendizaje funcional. Además, a través de un método gráfico de representación de la circunferencia pueden ir asimilando los elementos esenciales y propiedades particulares que la caracterizan, favoreciendo la adquisición de estos conocimientos mediante aprendizaje significativo.

Segunda parte: las órbitas elípticas

En la segunda parte de la sesión intentaremos experimentar algo que ocurre habitualmente en la ciencia: cómo, con el paso del tiempo, las teorías científicas que están en vigor se rebaten a través de la experiencia y las observaciones, surgiendo otras nuevas (Diapositiva 8).

Invitaremos a los participantes a pensar, como investigadores y astrónomos que son en ese momento, por qué estas orbitas circulares no pueden ser correctas y, en caso de necesitarlo, se les irán proporcionando pistas (Diapositiva 9):

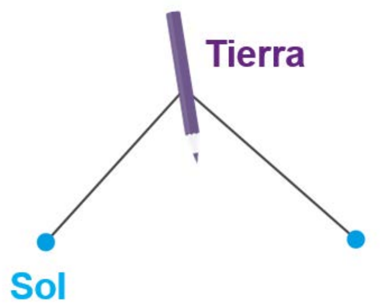
1. Pensemos en la Tierra, que giraría alrededor del Sol.
2. Hemos observado que si la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular entonces estamos siempre a la misma distancia.
3. Cuando nosotros nos acercamos o nos alejamos de un objeto, ¿lo vemos del mismo tamaño?
4. ¿Qué pasaría si nosotros giramos en círculos alrededor de ese objeto? ¿Lo veríamos siempre del mismo tamaño? (Podemos incluso hacer una simulación con un objeto y un voluntario en clase).
5. ¿Vemos siempre el Sol del mismo tamaño?

De esta forma deducirán finalmente que el hecho de que desde la Tierra veamos el Sol de diferente tamaño en diferentes momentos del año, algo que observamos fácilmente, nos demuestra que las órbitas no pueden ser circulares.

Recuperaremos en este momento de la sesión la base de cartón pluma y les pediremos que, en otro folio, escojan dos puntos y fijen el folio a la base clavando una chincheta en cada uno de ellos. Indicaremos a los participantes que deben escoger una de las dos chinchetas como Sol y dejarlo por escrito en el papel.

Figura 11

Trazado de órbitas elípticas en la base de experimentos



De nuevo tendrán que cortar un trozo de hilo y atar cada uno de los extremos a las chinchetas clavadas en este caso. Colocando el rotulador apoyado entre las chinchetas de forma que se tense el hilo, como se ve en la Figura 11 y pensando en este como la Tierra, deberán trazar la órbita elíptica mediante el que se conoce como **método del jardinero** (Diapositiva 10).

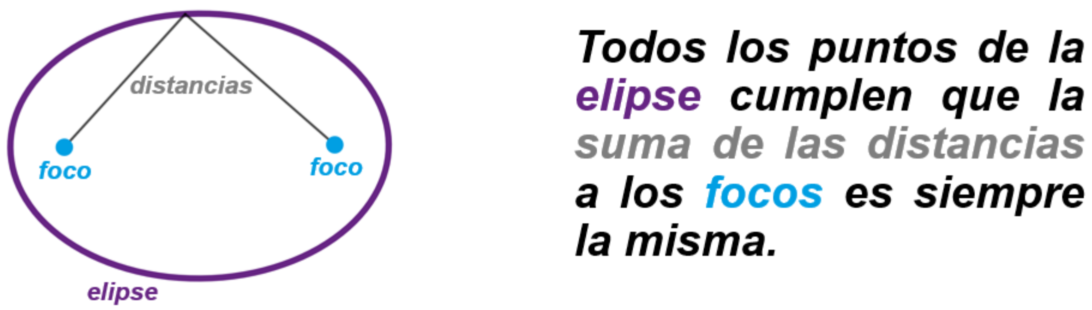
De esta forma lo que realizarán es la representación de las órbitas que Kepler propone en su modelo para los planetas que giran alrededor del Sol (Diapositiva 11). En este momento se les pedirá que reflexionen e indiquen en qué momento de ese giro de la Tierra alrededor del Sol lo observamos más grande y por qué la forma elíptica resuelve este misterio (Diapositiva 12).

Se les invitará a continuación a intentar deducir qué propiedad comparten todos los puntos que conforman la órbita descrita (Diapositiva 13), dándoles pistas sobre la longitud del hilo que han utilizado en el trazado de la elipse. ¿Qué ocurriría si utilizamos un trozo de hilo más pequeño?

Explicaremos entonces que la elipse está compuesta por los puntos del plano cuya suma de las distancias a los focos, marcados previamente, es siempre la misma (Diapositiva 14). En el caso del trazado que han realizado, el método del jardinero, la suma de las distancias es siempre la longitud del hilo utilizado.

Figura 12

Propiedad característica de la elipse (Diapositiva 14)



A continuación descubriremos otra propiedad de la elipse que deberán utilizar en la siguiente parte de la sesión. En primer lugar introduciremos, a través de la Figura 5, los ejes de la elipse (Diapositiva 15). Posteriormente les invitaremos a que suelten el hilo de las chinchetas y lo estiren encima del eje mayor. De esta forma comprobarán que ambos coinciden, es decir, que la suma de las distancias a los focos (la longitud del hilo) ¡coincide con la longitud del eje mayor!

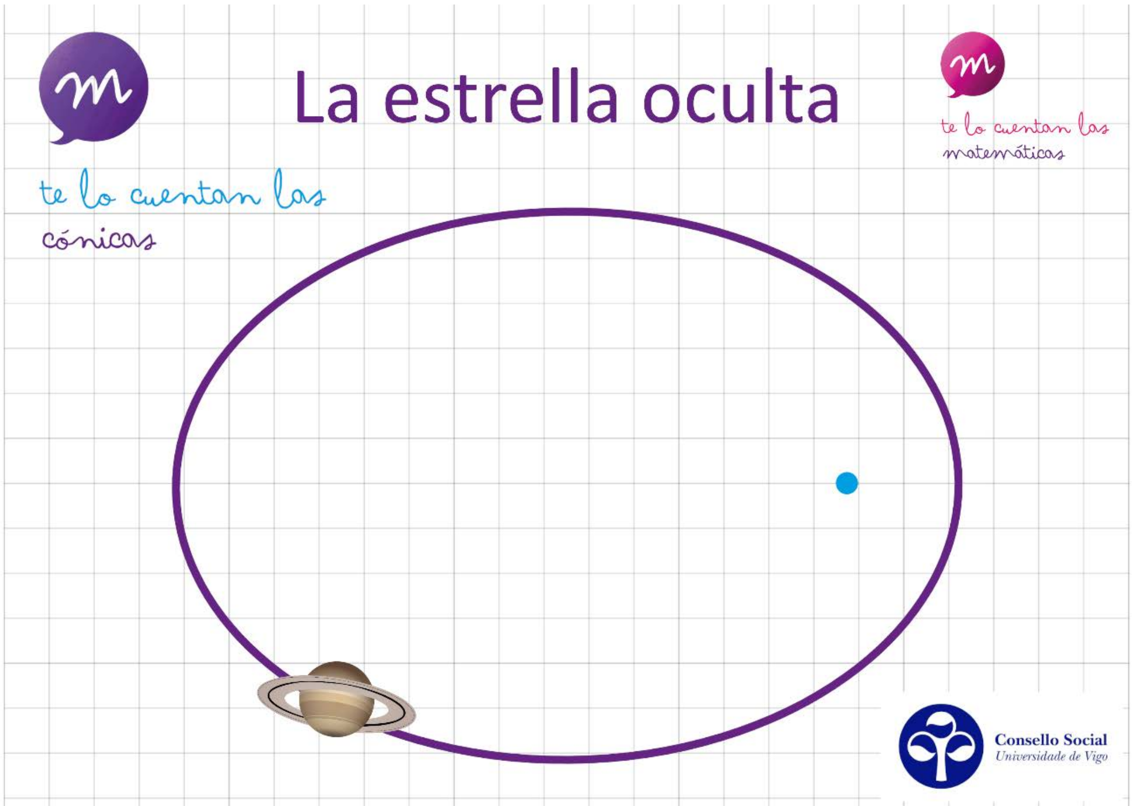
Esta segunda parte permite al alumnado sentirse investigadores en astronomía, refutando teorías equivocadas como lo hacían las antiguas civilizaciones y como ha ocurrido en la ciencia hasta la actualidad, aplicando el método científico. De nuevo, como en el caso de la circunferencia, se busca que los participantes aprendan las características y elementos distinguidos de la elipse a través de un método de representación gráfica: el método del jardinero. De esta forma, pretendemos que el aprendizaje con recursos manipulativos les permita comprender mejor la morfología de las cónicas estudiadas.

Tercera parte: la estrella oculta en el foco

En esta tercera parte profundizaremos en las propiedades de la elipse antes estudiadas. En este caso les propondremos el siguiente problema: les entregaremos la ficha “La estrella oculta” de la Figura 13 (Diapositiva 16).

En ella tenemos recogidos los datos del misterio a presentar a los jóvenes astrónomos: se ha detectado un nuevo planeta y conocemos: la forma de su órbita, su posición en este momento y hemos aproximado la posición de uno de sus focos. Sabemos que gira alrededor de una estrella pero esta es desconocida y para poder estudiar todo el sistema planetario correctamente necesitamos conocer donde está la estrella alrededor de la que gira. Lo que sí sabemos es que la estrella oculta se encuentra en el otro foco de la elipse. A partir de aquí los retaremos a que encuentren el otro foco valiéndose de un trozo de hilo. Deberán decidir de que tamaño debe ser dicho hilo.

Figura 13
Ficha “La estrella oculta”

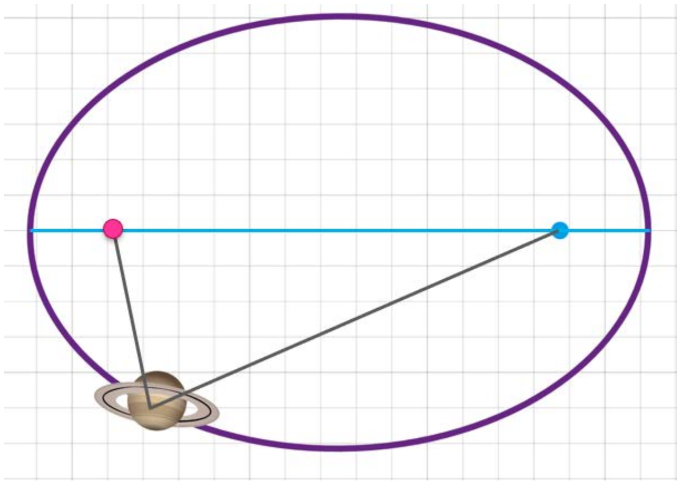


Podremos ir dirigiéndolos con diversas preguntas: ¿cómo podemos saber cuánto mide el hilo con el que podríamos dibujar esa elipse? Podemos recomendarles también que dibujen los ejes de la elipse. Deberán recordar de la segunda parte de esta sesión que la suma de las distancias a los focos desde el punto en el que está el planeta es la longitud del eje mayor y, de esta forma, cortar un trozo de hilo de ese tamaño.

Una vez tengan este dato bastará con que coloquen la ficha en su base de experimentos, la aseguren con una chincheta en el foco conocido y aten el hilo a dicho foco. Conseguirán aproximar el otro foco llevando el hilo hasta la posición conocida del planeta, fijándolo con un dedo en ese punto encima del planeta, y estirando el hilo restante de forma que el extremo suelto toque el eje mayor. En ese punto deberán pintar el foco en el que se encuentra la estrella (Diapositiva 17).

Figura 14

Posición de la estrella oculta



De alguna forma, lo que se está representando es que el trozo de hilo utilizado desde un foco hasta el satélite nos deja solo la cantidad restante de hilo para llegar hasta el otro foco.

Para finalizar podrán colocar la chincheta en el nuevo foco de la estrella y pintar la elipse resultante verificando que efectivamente coincide con la elipse violeta original de la ficha.

En esta tercera parte del taller, de nuevo buscando un aprendizaje significativo y funcional, proponemos una actividad les permita poner en práctica lo aprendido y profundizar en las propiedades geométricas de la elipse.

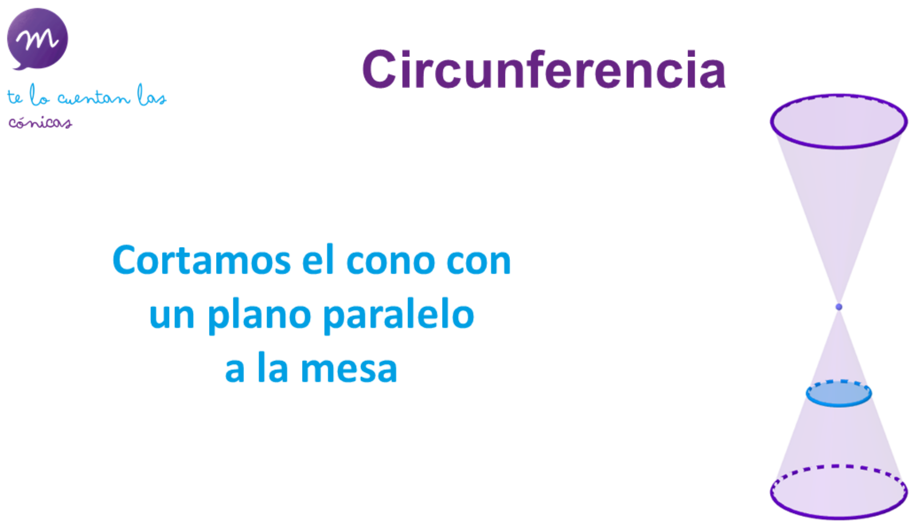
Cuarta parte: las cónicas

Finalizaremos el taller presentando las cónicas con ayuda de recursos manipulativos, a través de los cortes de un plano con un cono. Para ello formaremos primero un cilindro de plastilina (Diapositiva 18) y lo amasaremos sobre la mesa ejerciendo más presión sobre uno de los extremos hasta obtener un cono. Una vez lo tengamos, lo colocaremos con el vértice mirando al techo e iremos cortándolo con una tarjeta de plástico en distintas posiciones para ir obteniendo las distintas cónicas.

Empezaremos colocando la tarjeta (regla u objeto que utilicemos para cortar) horizontalmente, paralela a la mesa y, a su vez, paralela a la base del cono de plastilina (Diapositiva 19). Del corte con el cono tomaremos la parte que tenga el vértice, la apoyaremos en pintura previamente preparada en un plato o superficie plana y, como un sello, estamparemos la forma en un folio. Lo que hemos obtenido de esta forma es un círculo y el borde de ese círculo es una circunferencia, la primera de las cónicas con la que hemos trabajado.

Figura 15

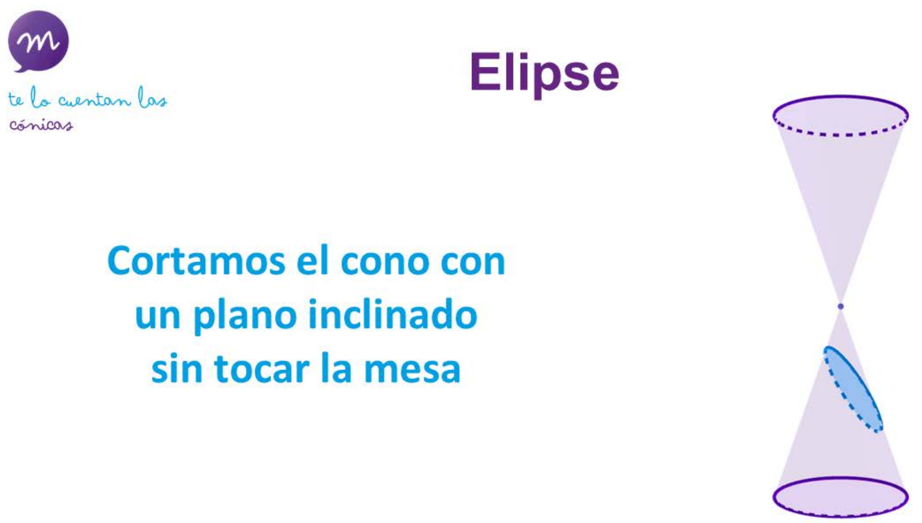
Contenido de la Diapositiva 19



Explicaremos brevemente el concepto de generatriz del cono para poder hablar de la inclinación del plano respecto a esta recta, siguiendo la Figura 1 (Diapositiva 20). Ahora, reutilizando el cono anterior o haciendo uno nuevo, colocaremos la tarjeta con una inclinación que supere la inclinación de la generatriz del cono, es decir, de forma que al cortar no lleguemos a la mesa (Diapositiva 21). De nuevo estamparemos la sección con pintura al lado de la circunferencia y obtendremos una elipse.

Figura 16

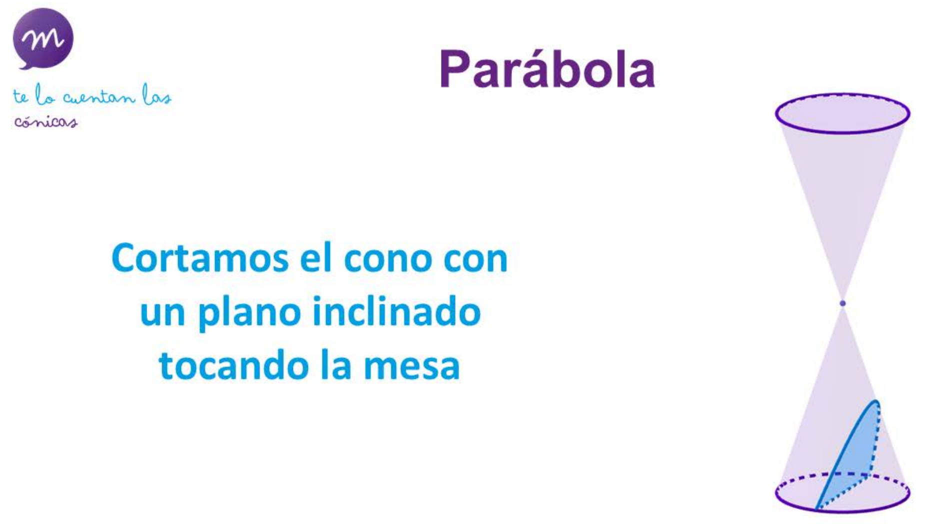
Contenido de la Diapositiva 21



Colocando la tarjeta con la misma inclinación que la generatriz tocaremos, al cortar el cono, la mesa (Diapositiva 22). Cuando estampemos la sección en el folio obtendremos lo que se conoce como parábola.

Figura 17

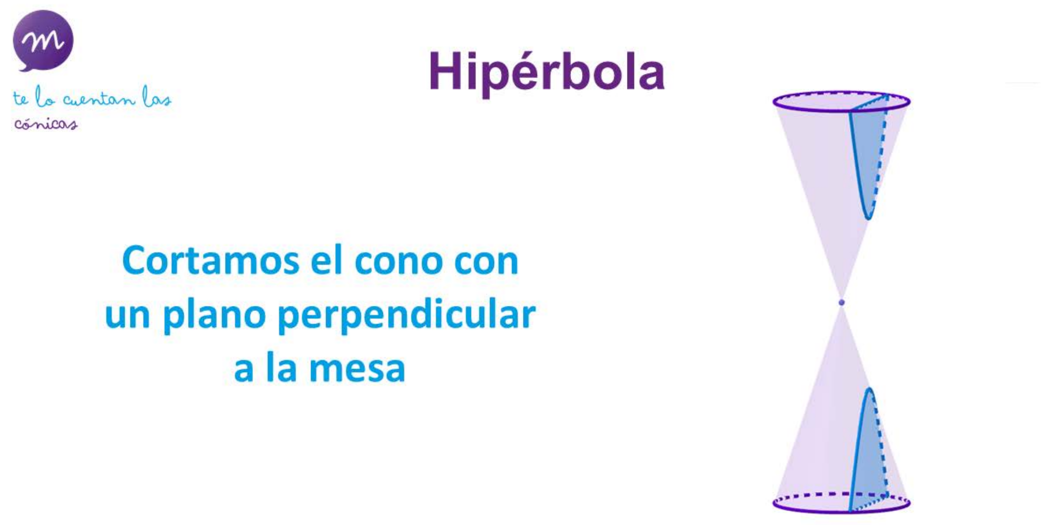
Contenido de la Diapositiva 22



Finalmente, utilizando otro cono si es necesario y colocando la tarjeta en posición vertical, perpendicular a la mesa, procederemos a cortar la plastilina de nuevo dando lugar a una de las ramas de la hipérbola (Diapositiva 23). Les explicaremos entonces, con apoyo de la imagen de la Figura 18, que la hipérbola se obtiene realmente a través de dos conos iguales unidos por los vértices. Así, las dos ramas de la hipérbola tendrán la misma forma y teniendo el "sello" de una de ellas podremos dibujar la figura completa.

Figura 18

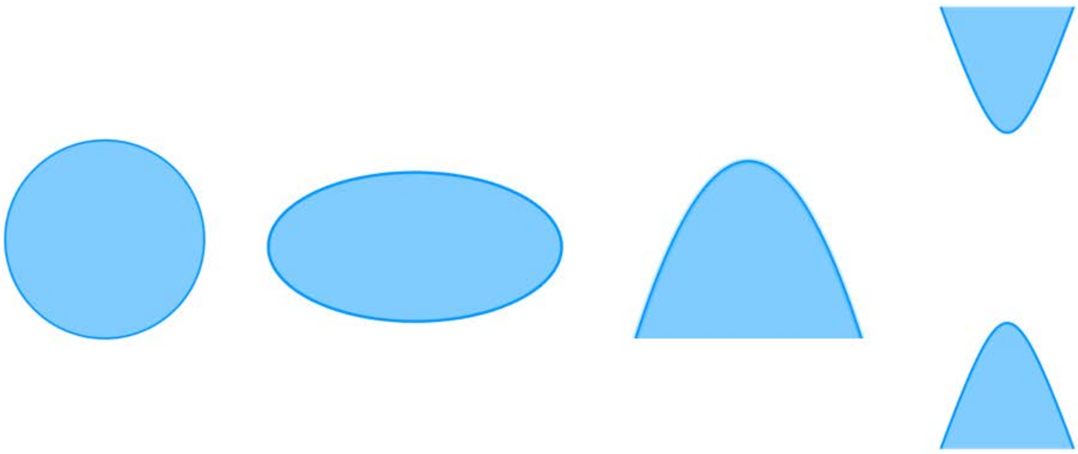
Contenido de la Diapositiva 23



Habrán obtenido así las cuatro cónicas como secciones del cono (Diapositiva 24). Es importante tener en cuenta que las cónicas son realmente curvas, no las imágenes que han quedado estampadas (las cuales tienen "relleno"). Haremos hincapié en este hecho y pediremos que dibujen con un bolígrafo las cuatro cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola), es decir, que repasen los bordes correspondientes de las figuras estampadas (Diapositiva 25).

Figura 19

Figuras estampadas con pintura y cónicas repasados



En esta última parte del taller buscamos introducir las cónicas al alumnado a través de su característica común: son el resultado de cortes de distintos planos con el cono. Esta presentación se hace a través de un método manipulativo que les permita comprobar por sí mismos esta característica. Una vez identificadas, les propondremos un pequeño reto relacionado con las cuatro curvas protagonistas. A lo largo del taller tecnológico trabajaremos con ellas y profundizaremos en las particularidades de cada una.

Reto propuesto: en busca de las cónicas ocultas

El reto consiste en que hagan una lista de al menos cuatro cosas que conozcan, por ejemplo objetos que encuentren en su día a día y que tengan la forma de alguna de las cónicas estudiadas: circunferencias, elipses o parábolas, principalmente (Diapositiva 26). De cada una de ellas deberán reflexionar si creen que tienen ese aspecto por motivos de decoración o porque esa forma tiene una propiedad que el objeto necesita, por ejemplo, por su función. Posibles ejemplos que pueden surgir son las esferas de relojes, las gafas, los espejos cóncavos y convexos, las rotondas...

3. Taller tecnológico *Te lo cuenta una astrónoma*

En este taller aprenderemos a:

- Utilizar herramientas básicas de GeoGebra.
- Trazar la órbita de un planeta en Geogebra.
- Usar la simetría de la elipse para extraer información sobre las órbitas.
- Situar el afelio y el perihelio de la órbita terrestre.

- Conocer y clasificar las distintas órbitas que pueden describir los satélites en el espacio.
- Identificar las cónicas en función de su excentricidad.
- Percibir la importancia de las cónicas en la astronomía.

3.1. Contenidos a desarrollar (para el profesorado)

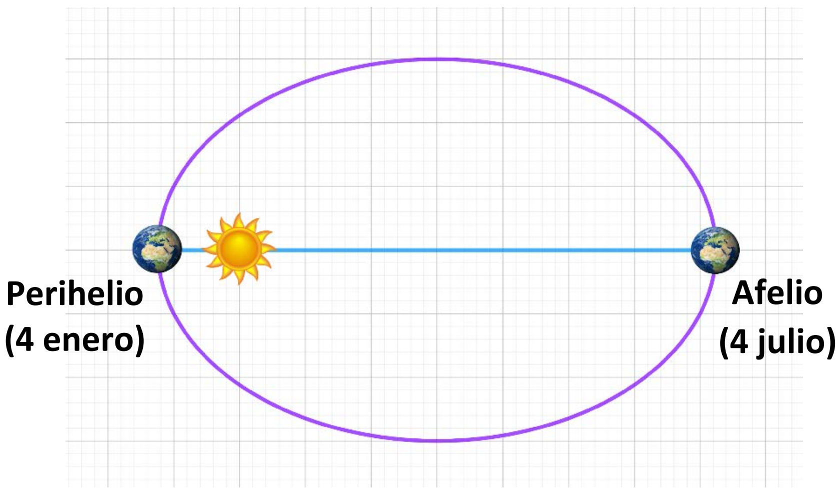
La órbita terrestre

Nos centraremos ahora en algunas de las características y propiedades de las elipses. La primera de ellas es que estas curvas presentan una **simetría respecto al eje mayor y al eje menor**, como se puede apreciar en la Figura 5. Esto se puede pensar de la siguiente manera: si tenemos una elipse dibujada en un folio y lo doblamos por cualquiera de los dos ejes los trozos en los que queda dividida la elipse coincidirán. De la misma forma coincidirán los focos, que también guardan esa simetría. Es decir, ambos focos se encuentran a la misma distancia del centro y guardan simetría con respecto al eje menor.

En relación con la órbita terrestre, existen dos puntos notables: la posición en la que la Tierra está más cercana al Sol es el **perihelio** y en la que está más lejana es el **afelio**. Cuando la Tierra pasa por estos dos puntos es cuando percibimos el Sol más grande y más pequeño, respectivamente. El perihelio se produce aproximadamente el 4 de enero de cada año y el afelio alrededor del 4 de julio.

Figura 20

Afelio y perihelio



Satélites artificiales

En general, la Real Academia Española define satélite como cualquier "cuerpo celeste opaco que solo brilla por la luz refleja del Sol y gira alrededor de un planeta". Estos se pueden clasificar en función de distintos criterios. Entre ellos tenemos una clasificación en función de **la**

excentricidad de sus órbitas en la que los satélites se **identifican** con cada una de nuestras **cónicas**: satélites de órbita circular, de órbita elíptica, de órbita parabólica o de órbita hiperbólica.

Aunque, para el caso de los **satélites artificiales** lo deseable suele ser que estos **describan órbitas cerradas** (circulares o elípticas) de forma que estos no escapen a la atracción del planeta alrededor del que orbitan, existen satélites que tienen órbitas abiertas como el caso de algunos cometas.

Desde que en 1957 la Unión Soviética lanzase el primer satélite artificial se han enviado al espacio miles de ellos con diversas intenciones: para la observación y toma de datos e imágenes de diferentes astros, entre ellos la propia Tierra; para su uso en telecomunicaciones, como por ejemplo para la televisión por satélite; para navegación, por ejemplo para la geolocalización GPS; orientados a la meteorología...

Figura 21

Satélite artificial

Nota. Tomada de *¿Sabes cuántos satélites giran alrededor de la Tierra?* [Imagen], 2018, BBC News | Mundo (https://www.bbc.com/mundo/noticias-46408633https://es.wikipedia.org/wiki/Cifrado_de_Alberti).

El lanzamiento de un satélite artificial requiere una serie de cálculos que permitan colocar el satélite a una determinada distancia del astro alrededor del que se quiere hacer orbitar. Además, debe proporcionársele también el impulso necesario para que, una vez llegado a ese punto, que este se mueva alrededor del astro deseado sin que escape a la atracción gravitatoria del mismo. De esta forma se garantiza que el satélite gira alrededor del astro en la órbita prevista realizando su función sin alejarse del astro en cuestión.

Excentricidad

La **excentricidad** de una cónica es una proporción que nos permite conocer la forma de esta y, a su vez, identificarla como circunferencia, elipse, parábola o hipérbola. En la Tabla 2 podemos consultar los valores de la excentricidad e para cada tipo de cónica.

Tabla 2

Excentricidad de las cónicas

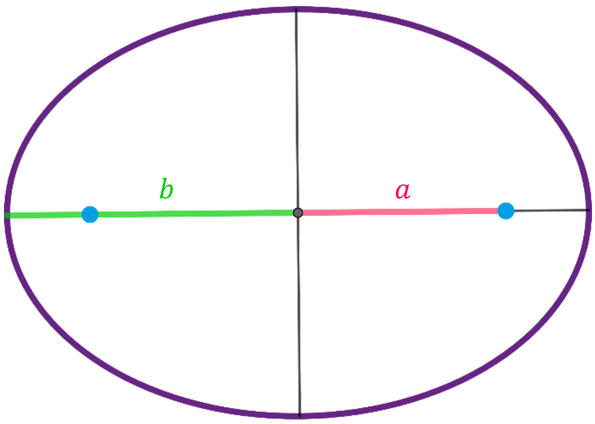
Tipo de cónica	Circunferencia	Elipse	Parábola	Hipérbola
Valores de *e*	$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$

Por ejemplo, para una elipse la excentricidad se calcula como el cociente de la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos entre la distancia desde el centro hasta uno de los extremos de su eje mayor (la mitad de la longitud de su eje mayor).

$$e = \frac{a}{b}$$

Figura 22

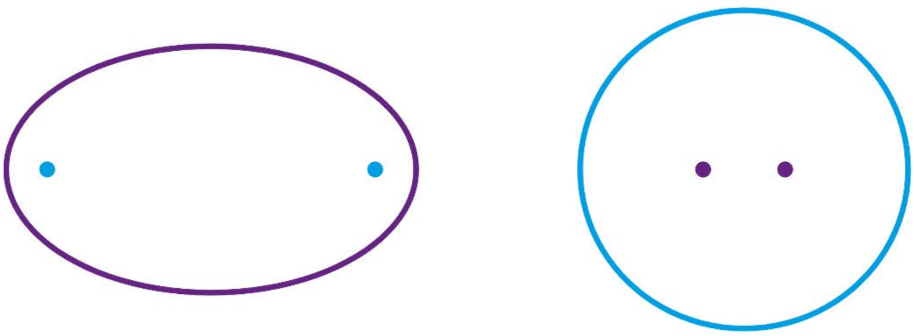
Longitudes implicadas en el cálculo de la excentricidad de una elipse



Como se refleja en la Tabla 2, su valor se encuentra entre cero y uno e indica la forma de la elipse. Si una elipse es muy redondeada su excentricidad tendrá un valor cercano a 0 (a la excentricidad de la circunferencia) y si tiene una forma muy achatada su excentricidad será cercana a 1.

Figura 23

Elipses de distinta excentricidad



En la Figura 23 tenemos una elipse violeta de excentricidad 0,8 y otra azul de excentricidad 0,25. Como podemos comprobar visualmente, la excentricidad está ligada a su vez a la cercanía entre los focos. Cuanto más cerca se encuentran los focos, más redondeada es la elipse resultante y más se parece a una circunferencia, es decir, más se acerca a la excentricidad cero. De hecho, en este sentido, podemos considerar la circunferencia como una elipse en la que los focos y el centro coinciden.

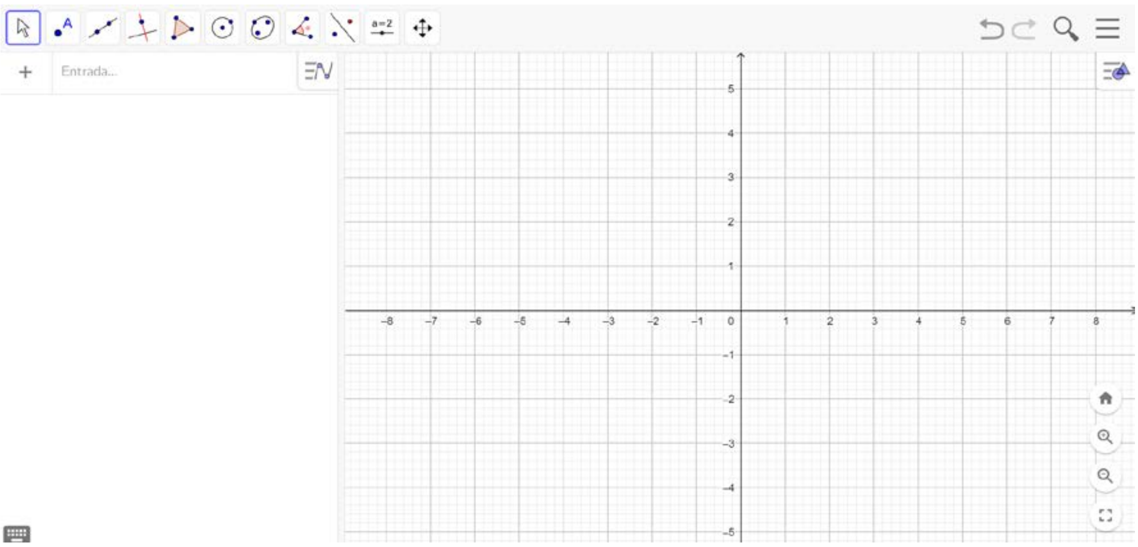
3.2. Actividades previas

Este taller se llevará a cabo a través de GeoGebra, un software matemático de uso libre diseñado para todos los niveles educativos. Dado que lo utilizaremos para la adquisición de competencias geométricas, es conveniente que el alumnado se haya familiarizado con el entorno previamente a la sesión.

Para ello, será preciso realizar una pequeña introducción explicándoles qué es GeoGebra. Recomendamos utilizar en particular GeoGebra Classic (https://www.GeoGebra.org/classic) por tener una interfaz que nos parece más accesible para el alumnado, Figura 24.

Figura 24

Interfaz de GeoGebra Classic



Como podemos ver en la figura anterior, el espacio aparece dividido en varias partes. En la parte derecha (con los ejes cartesianos y una rejilla orientativa) tenemos la Vista Gráfica, donde podemos introducir distintos cuerpos geométricos utilizando simplemente el ratón. En la parte superior se encuentran las herramientas para trabajar en la Vista Gráfica, agrupadas por tipos. Por último, en la parte izquierda tenemos la Vista Algebraica, que nos permite introducir elementos geométricos en la Vista Gráfica a través de fórmulas y ecuaciones e, inversamente, nos permite visualizar las ecuaciones asociadas a los cuerpos geométricos que dibujemos directamente en la Vista Gráfica.

Para llevar a cabo esta introducción de una forma más amena se pone a disposición, en el canal de YouTube de *Te lo cuentan las matemáticas*, un pequeño vídeo de aproximadamente cinco minutos donde se explica brevemente qué es GeoGebra y se muestran las principales herramientas que utilizaremos. Se recomienda que se visione su contenido previamente a la sesión presencial del taller tecnológico.

En particular, en este vídeo se describen las Vistas Gráficas 2D, 3D y Algebraica, así como sus herramientas básicas. En la vista gráfica 2D se abordan:

- Herramientas: “Mueve”, “Figura a mano alzada”, “Punto”, “Recta” y “Segmento”.
- Con el botón derecho del ratón: objeto visible, etiqueta visible, mostrar rastro y propiedades (cambiar color).

En el final del vídeo se incluye el funcionamiento básico de la Vista 3D, concretamente se muestra cómo crear y mover un plano, pero no será necesario visualizar esa parte para este taller.

3.3. Material

El material necesario previo a la sesión será el vídeo explicativo que permitirá a los participantes del taller familiarizarse con el entorno de GeoGebra, explicado en el epígrafe Actividades previas.

El material para llevar a cabo el taller será simplemente un ordenador con acceso a Internet por cada participante y una serie de enlaces que se le proporcionarán a través del **ENLACE 1**. Además, será conveniente que dispongan del material utilizado en el taller manipulativo, concretamente será imprescindible que tengan la ficha “La estrella oculta” (Figura 13).

3.4. Temporización y secuenciación

Las sesiones están pensadas para una duración aproximada de hora y media. En este caso, la actividad estará dividida en tres partes diferenciadas, cuya duración será flexible en función de las necesidades de los participantes y la adaptación de estos a GeoGebra:

- *Primera parte: la órbita terrestre*
- *Segunda parte: lanzamiento de un satélite*
- *Tercera parte: excentricidad*

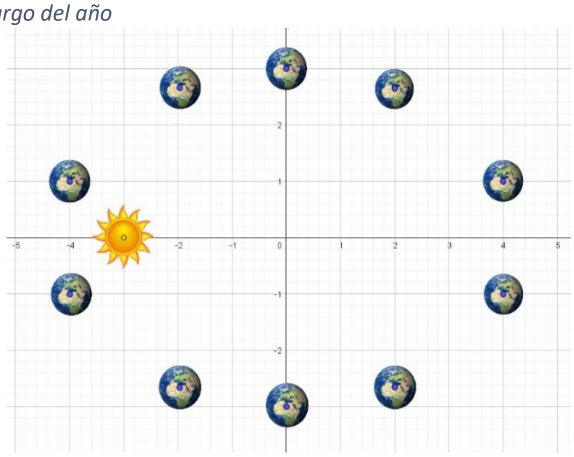
3.5. Desarrollo de la sesión

Primera parte: la órbita terrestre

En la primera parte de la sesión explicaremos la importancia de estudiar los movimientos de los astros y cuerpos celestes: estrellas, planetas, satélites, cometas y asteroides (Diapositiva 2). Comenzaremos trabajando con la representación del Sol y las distintas posiciones de la Tierra a lo largo del año (Diapositiva 3). Para ello accederemos "Posiciones de la Tierra respecto al Sol" a través del **ENLACE 2** (Figura 25), es decir, el primero de los enlaces de GeoGebra disponibles en el **ENLACE 1.** Será necesario que el alumnado abra el archivo en GeoGebra, utilizando el menú desplegable ubicado en la parte superior derecha de la página (Diapositiva 4).

Figura 25

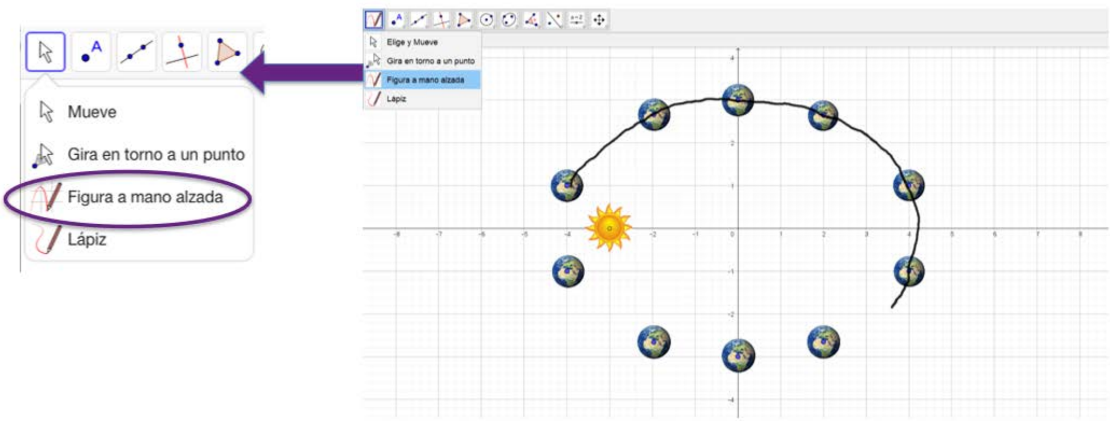
Posiciones de la Tierra a lo largo del año



Utilizando la herramienta de GeoGebra "Figura a mano alzada" (Figura 26) se dibujará la órbita terrestre deduciendo que el movimiento que describe la Tierra alrededor del Sol (Diapositiva 5) es, como ya habíamos adelantado en el taller manipulativo, una elipse (Diapositiva 6).

Figura 26

Herramienta "Figura a mano alzada"



Una vez obtenemos la elipse nos centraremos ahora en su simetría, utilizando las herramientas de GeoGebra. Comenzaremos dibujando con la herramienta "Segmentos" su eje mayor y su eje menor (Diapositiva 7).

Explicaremos entonces que la elipse es simétrica y les pediremos que lo comprueben haciendo uso de la ficha del taller manipulativo "La estrella oculta" (Figura 13). En ella ya deberían tener trazado el eje mayor. Les pediremos que doblen el folio por ese eje y comprueben que efectivamente las dos partes de la elipse coinciden, colocando el folio a contraluz si es necesario (Diapositiva 8).

Seguidamente, les pediremos que intenten volver a doblar el folio de forma que las cuatro partes resultantes de la elipse coincidan. Una vez lo consigan y vuelvan a desplegar el folio obtendrán, a partir de las dobleces marcadas, los dos ejes de la elipse: el mayor, que ya deberían haber trazado; y el menor, que ahora pueden repasar con lápiz o bolígrafo.

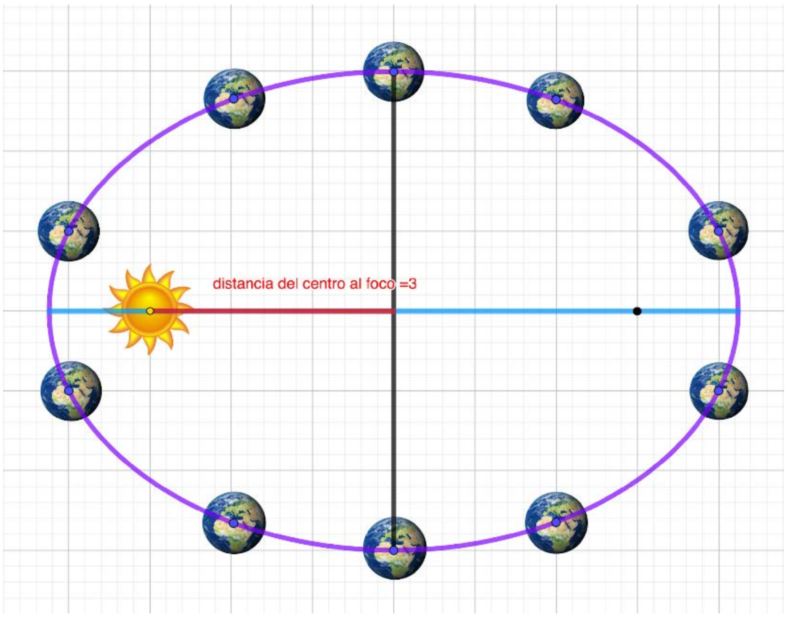
Volviendo ahora a GeoGebra (Diapositiva 9), les propondremos que encuentren el otro foco de la elipse. Para ello deberán, a partir de los ejes, determinar el centro de la elipse, que es precisamente el punto en el que se cortan los dos ejes. Bastará para ello con utilizar la herramienta "Punto" y colocar un punto en dicha intersección. Otra opción, un poco más compleja pero más exacta, sería utilizar la herramienta "Intersección" y seleccionar los dos segmentos correspondientes a los ejes.

Teniendo en cuenta que Sol está en uno de los focos, para recuperar el otro foco una vez obtenido el centro bastará con utilizar la herramienta "Simetría axial".

A continuación, utilizando las herramientas "Segmento" y "Distancia o longitud" comprobaremos que efectivamente ambos focos se encuentran a la misma distancia del centro de la elipse (Diapositiva 10).

Figura 27

Focos de la órbita terrestre



Finalizaremos esta parte (Dispositiva 11) marcando el perihelio y el afelio y explicándoles cuando se producen (ver Figura 20). Reflexionaremos en grupo sobre las siguientes cuestiones ¿en qué posición se ve más grande el Sol? ¿Y más pequeño?

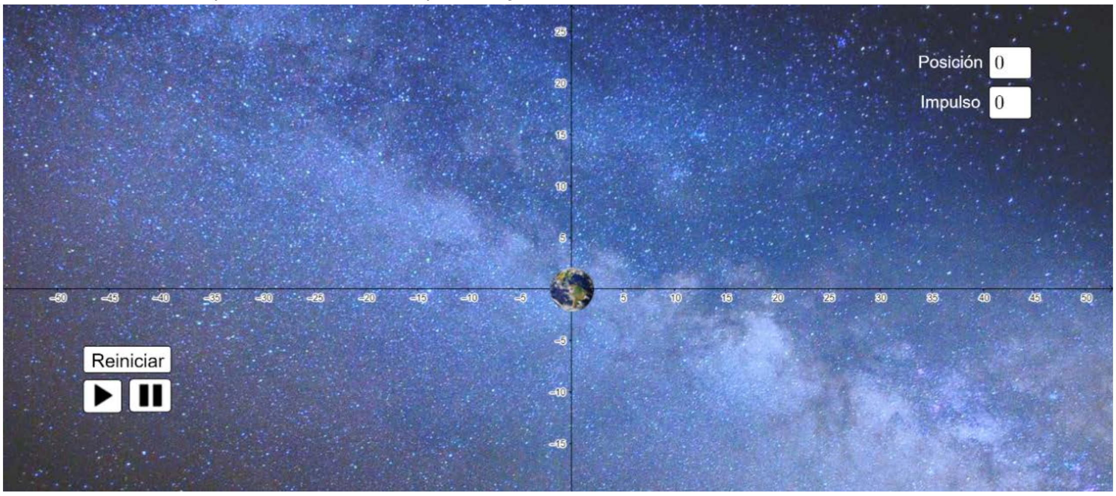
Con esta primera parte pretendemos afianzar los conocimientos adquiridos en el taller manipulativo sobre las elipses y sus propiedades, además de ampliarlos y aplicarlos al estudio de la órbita terrestre (orientando las actividades así de nuevo al aprendizaje funcional).

Segunda parte: lanzamiento de un satélite

Ahora que ya sabemos más sobre la órbita de la Tierra alrededor del Sol, vamos a trabajar con otro tipo de astros. Participaremos en el lanzamiento de un satélite artificial desde la Tierra y nuestro objetivo es encontrar la órbita correcta (Diapositiva 12). Para empezar vamos a estudiar las posibles formas de la órbita del satélite utilizando el segundo de los enlaces de GeoGebra disponibles en el **ENLACE 1**, "Forma de las órbitas del satélite", o lo que es lo mismo el **ENLACE 3** (Diapositiva 13).

Figura 28

Material de GeoGebra para el estudio de las posibles formas de la órbita de un satélite

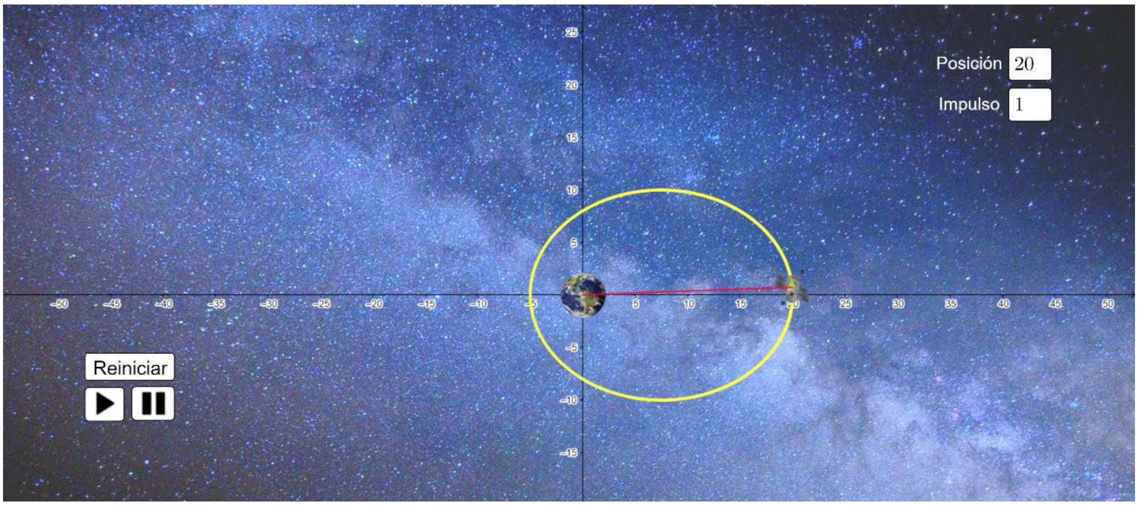


El funcionamiento es sencillo: deberán dar valores positivos a "Posición del satélite" e "Impulso" y pulsar el botón de inicio de la animación. Disponen a su vez de un botón de pausa y de reinicio para volver al estado inicial.

Propondremos al alumnado que descubran qué ocurre con el satélite en función de los distintos valores de "Posición del satélite" e "Impulso". Por ejemplo, para valores de posición 5 y de impulso 3.2 obtenemos una órbita muy cercana a la circular, mientras que para impulso 5 el satélite se aleja indefinidamente. También podemos comprobar que para la misma posición pero impulso 2 el satélite chocaría con la Tierra. Si tomamos la posición 20 con impulso 1, por ejemplo, obtenemos una órbita elíptica más alejada de la circunferencia (Diapositiva 14).

Figura 29

Órbita del satélite resultante de ubicarlo en la posición 20 con impulso 1



Después de dejarles investigar por su cuenta durante un rato, pondremos en común todos los posibles comportamientos que hayan encontrado y realizaremos las siguientes preguntas: ¿para qué valores se escapa el satélite? ¿Tiene lógica que esto ocurra?

Intentaremos guiarlos hacia la conclusión de que, partiendo de posiciones muy alejadas de la Tierra con poco impulso o con impulsos muy fuertes aunque que nos encontremos de la Tierra, el satélite tiende a describir una órbita abierta y escapar de la atracción terrestre.

La clave está en encontrar un equilibrio entre la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite y el impulso inicial para que este comience su movimiento. Una vez hayamos llegado a esta conclusión les invitaremos a que comprueben de nuevo que esto ocurre.

Con esta parte nos enfocamos de nuevo en el trabajo de las cónicas a través del aprendizaje funcional: para la consecución de un objetivo real, que es enviar un satélite al espacio para conseguir datos acerca de nuestro planeta Tierra, estudiaremos las formas de las posibles trayectorias que podrá seguir un satélite, resultando ser precisamente las cónicas estudiadas.

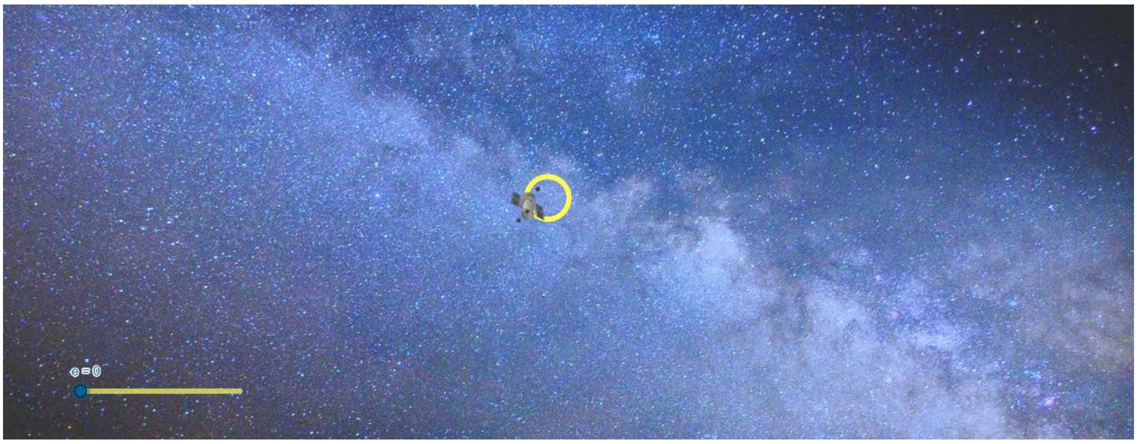
Tercera parte: excentricidad

Para introducir la tercera parte del taller les preguntaremos si han reconocido alguna de las formas de las órbitas del satélite. Posteriormente procederemos a explicar que en general podemos clasificar los satélites según el tipo de órbita que siguen.

Pasaremos entonces a trabajar con el tercer enlace de **ENLACE 1**, "Excentricidad de las órbitas", o lo que es lo mismo el **ENLACE 4** (Diapositiva 15). Les explicaremos que cada cónica se corresponderá con unos determinados valores de la excentricidad, representada por el deslizador *e.*

Figura 30

Material de GeoGebra para el estudio de las excentricidades de la órbita de un satélite



La siguiente tarea que les propondremos es que consigan determinar los valores de *e* para los cuales la cónica obtenida es una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola. Para ello les presentaremos la Tabla 3 (Diapositiva 16), que tendrán que completar valiéndose de la simulación anterior (Diapositiva 17).

Tabla 3

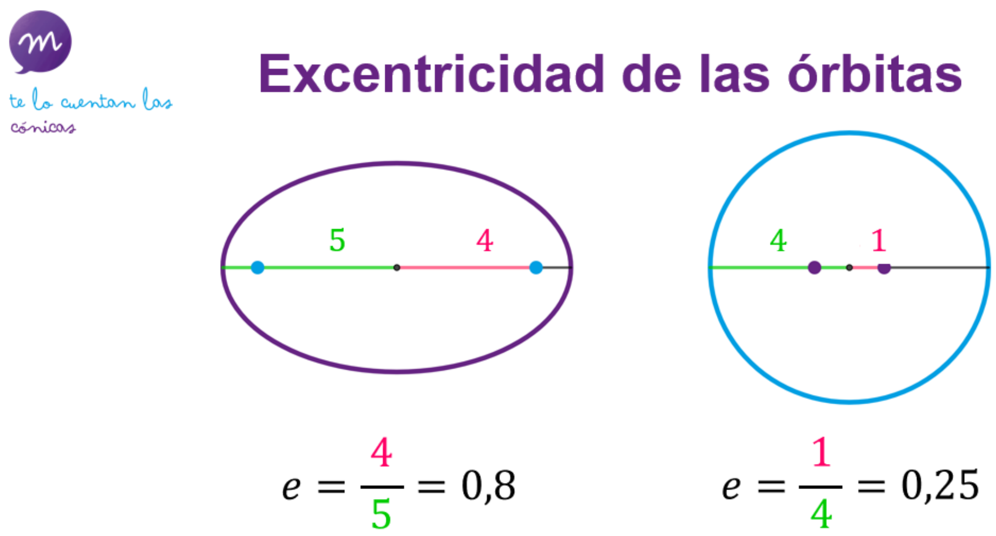
Tabla de excentricidades para completar

Tipo de cónica	Circunferencia	Elipse	Parábola	Hipérbola
Valores de *e*				

A continuación, les mostraremos dos ejemplos del cálculo de la excentricidad de una cónica, concretamente de la elipse, tal y como se describe en la Figura 22 (Diapositiva 18). Podrán así comprobar que cuanto más se acerca la excentricidad a 1 más "ovalada" será la elipse.

Figura 31

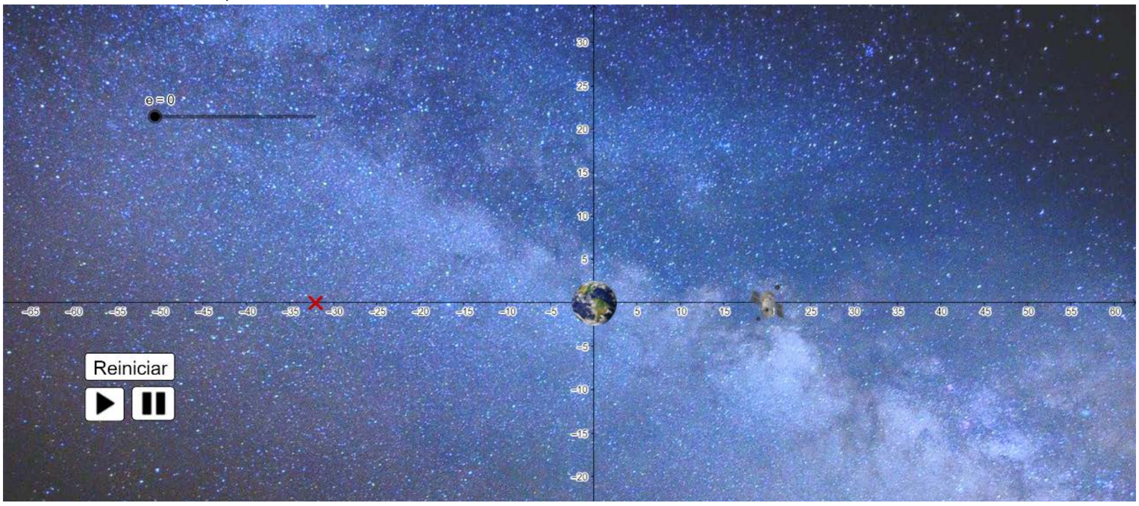
Contenido de la Diapositiva 18



Para finalizar pasaremos al último de los enlaces de **ENLACE 1**, “La órbita correcta”, o lo que es lo mismo al **ENLACE 5** (Diapositiva 19). En ese momento, como sabremos más sobre las formas de las órbitas, ya podremos colaborar en el lanzamiento de nuestro satélite. En este caso, cada vez que el satélite recorra una vuelta completa a la órbita, necesitamos que pase por el punto marcado con un aspa roja en la Figura 32, para enviarnos la información recogida a nuestra oficina.

Figura 32

Material de GeoGebra para la elección de la órbita correcta del satélite



En esta actividad el objetivo es encontrar la órbita cerrada que pase por ese punto y para ello necesitarán indicar el valor de la excentricidad de esta. Con lo deducido anteriormente, podrán intuir que dicha órbita debe ser una elipse y, moviendo el deslizador *e,* podrán hacer distintas pruebas hasta encontrar la correcta. El valor de la excentricidad de la órbita es concretamente 0,6 (Diapositiva 20).

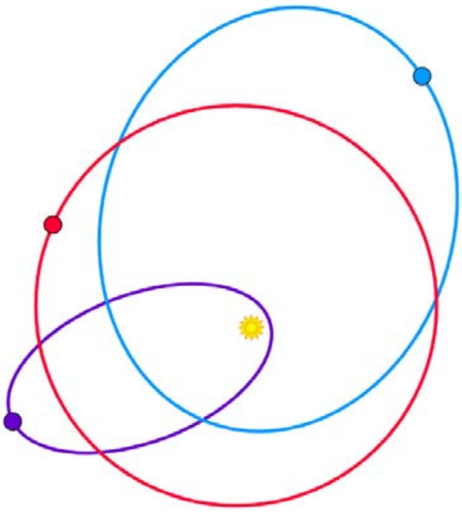
En esta última parte conseguiremos finalmente alcanzar el objetivo propuesto en la segunda parte: enviar un satélite artificial al espacio en la órbita correcta para la toma de datos. Para ello, hemos tenido que estudiar las formas de las órbitas a través de su excentricidad, un concepto que hemos abordado directamente a través de la herramienta TIC GeoGebra.

Reto propuesto: ¿quién es quién?

En el Observatorio Astronómico de Forcarei están estudiando tres astros del Sistema Solar: el asteroide Hygeia, y los cometas Kopff y Encke. Mediante los datos obtenidos a través uno de sus instrumentos de observación astronómica han representado en la siguiente imagen las órbitas sus órbitas, pero están sin identificar (Diapositiva 21).

Figura 33

Representación obtenida con los instrumentos de observación astronómica



Para poder relacionar cada órbita con su astro, hemos consultado las excentricidades de sus órbitas. Estas son ya conocidas y las recogemos en la siguiente tabla. Con estos datos, ¿serán capaces de identificar quién es quién?

Tabla 4

Excentricidades de las órbitas del asteroide Hygeia y los cometas Kopff y Encke

Astro	Asteroide Hygeia	Cometa Kopff	Cometa Encke
Excentricidad	0,1146	0,5477	0,8483

Para resolver el reto deberán tener en cuenta las formas de las órbitas de la Figura 33. Cuanto más ovalada es la forma de la órbita más cercano será el valor de su excentricidad a 1, mientras que cuanto más se acerque a una circunferencia más se acercará su excentricidad a 0. Por ello, el asteroide Hygeia será el fucsia, el cometa Kopff será el azul y el cometa Encke será el que describe la órbita violeta.