

# APUNTES DE DIBUJO TÉCNICO DE BACHILLERATO

## GEOMETRÍA MÉTRICA APLICADA

*CONTENIDO DEL PRIMER TRIMESTRE*

AUTOR: RAMÓN DEL AGUILA CORBALÁN  
JUNIO 1997

# **DIBUJO TECNICO**

## **SEGUNDO DE BACHILLERATO**

### **Organización y distribución de los contenidos a lo largo del curso.**

El primer trimestre los dedicaremos a la Geometría métrica, se expondrán contenidos proponiendo ejercicios que el alumno realizará en clase con la mayor exactitud, pero utilizando únicamente el lápiz, se propondrán tareas de aplicación de los trazados aprendidos en el dibujo de piezas, como por ejemplo la aplicación de tangencias.

El segundo trimestre lo emplearemos en el comienzo de los sistemas de representación, comenzando por el sistema diédrico y continuando con axonometrías ortogonales y oblicuas, analizando sus métodos operativos, para terminar se analizaría la perspectiva cónica y algunas ideas de planos acotados. Las propuestas de tareas serán las mismas que el trimestre anterior, ejercicios y problemas realizados a lápiz, y alguna tarea realizada a tinta o con el ordenador. Estas tareas podrían ser dibujos de piezas con realización de secciones.

El tercer trimestre lo emplearíamos en la Normalización y la aportación de las nuevas tecnologías al dibujo. Se propondrán ejercicios de aplicación a tinta, realizando algún proyecto representado en sus distintas fases: Memoria, boceto, croquis acotado, dibujo de taller y perspectiva.

## **CONTENIDOS**

### **Primer trimestre**

#### **Técnicas gráficas**

Material fundamental y su uso.

*Lapiceros. Plantillas. Reglas. Estilografos.*

Conocimientos de soportes.

*Papeles blancos y de color.*

*Papeles vegetales y acetatos.*

*Cartulinas especiales.*

Técnicas de borrado y restauración.

*Cuchillas y lápices especiales.*

*Eliminación de errores.*

Uso correcto de plantillas.

*Plantillas para rotular, de elipses, círculos, de curvas,  
plantillas especiales.*

Calidad en el acabado de planos y su presentación.

### **Geometría métrica aplicada.**

Trazados fundamentales en el plano.

*Paralelas.*

*Perpendiculares.*

*Mediatrices.*

*Ángulos.*

*Arco capaz.*

Construcción de formas poligonales.

*Triángulos.*

*Cuadriláteros.*

*Polígonos regulares e irregulares.*

*División de la circunferencia.*

Proporcionalidad y escalas.

*Conceptos fundamentales.*

*Elementos que definen una semejanza.*

*Determinación de la media proporcional.*

*Cuarta proporcional.*

*Equivalencia*

*Construcción de escalas gráficas y volantes.*

Potencia. Eje radical.

Transformaciones geométricas

*Traslaciones.*

*Giros.*

*Simetría.*

*Homotecia e inversión.*

Tangencias.

*Rectas y circunferencias.*

*Entre dos o más circunferencias.*

*Enlaces.*

*Ovalos y ovoides.*

Cónicas

Elipse.

Parábola.

Hipérbola.

Ejercicios de aplicación. (ver mapa conceptual)

**Segundo trimestre.**

**Geometría descriptiva.**

Fundamentos y finalidad de la geometría descriptiva.

Diferenciación de los distintos campos de acción.

Generalidades sobre los distintos sistemas

Sistema diédrico.

*Generalidades.*

*Punto, recta y plano.*

*Paralelismo.*

*Perpendicularidad.*

*Distancias.*

*Sólidos.*

*Secciones y desarrollos.*

Ejercicios de aplicación. (ver mapa conceptual)

Sistema axonométrico ortogonal.

*Generalidades*

*Proyección de un punto.*

*Elementos que definen una axonometría.*

*Coeficientes de reducción y escalas axonométricas.*

*Proyección isométrica y dimétrica.*

*Perspectiva isométrica.*

*Proyecciones en los tres sectores definidos por los ejes axonométricos de figuras planas: triángulos, cuadrados polígonos etc.*

Ejercicios de aplicación ( ver mapa conceptual)

Sistema cónico.

*Fundamentos del sistema cónico.*

*Elección del punto de vista y sus elementos, con relación al plano del cuadro y al plano geométral.*

*Proyección del punto recta y plano.*

*Perspectiva de figuras planas: cuadrados, triángulos y*

*círculos.*

*Proyección de sólidos sencillos.*

Ejercicios de aplicación ( ver mapa conceptual)

Sistema de planos acotados.

*Generalidades.*

*Punto recta y plano.*

*Intersección de planos. Cubiertas.*

*Curvas de nivel*

### **Tercer trimestre.**

#### **Normalización**

Generalidades.

*La normalización como factor que favorece el carácter universal del lenguaje gráfico.*

*Normas ISO, DIN, UNE y ASA.*

*Principales aspectos que la norma impone en el dibujo Técnico.*

Convencionalismo sobre representación de objetos.

*Tornillos, Ruedas dentadas, muelles.*

*Simplificaciones en los dibujos.*

Acotación

*Normas generales.*

*Tipos de cotas.*

*Sistemas de acotación.*

*Acotación de arcos, radios y circunferencias.*

Manejo de instrumentos de medida.

*Pie de rey.*

*Galgas.*

*Compás de espesores.*

Reproducción y archivo de planos.

Aplicaciones (ver mapa conceptual)

#### **Aportación de nuevas tecnologías a la ejecución de planos técnicos.**

*La informática en el dibujo Técnico. El CAD.*

*Acotación.*

*Dibujo en tres dimensiones.*

*Principales programas de dibujo técnico.*

*Aplicaciones ( Ver mapa conceptual)*

*Uso de material transferible. Letras, líneas, tramas, texturas, color, etc.*

## **BLOQUE BÁSICO: GEOMETRÍA MÉTRICA APLICADA**

### **NÚCLEO TEMÁTICO I.- TÉCNICAS GRÁFICAS, PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD, TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS**

#### **OBJETIVOS DIDACTICOS**

Realizar los trazados geométricos fundamentales en el plano: paralelismo y perpendicularidad entre rectas, ángulos, bisectrices, mediatrices, arco capaz, construcción de formas poligonales.

Conocer los fundamentos teóricos de dichos trazados.

Aplicar dichos trazados a la realización de trabajos más complejos.

Usar correctamente el compás, la regla, la escuadra, el cartabón, los estilografos y el lápiz.

Ver el dibujo técnico como un lenguaje.

#### **CONTENIDOS**

##### **CONCEPTOS:**

**Primera unidad.** El primer trimestre del curso comenzaremos por Técnicas Gráficas, donde el alumno estudiará el material de dibujo con el que va a trabajar. Esta parte es fundamental para conseguir un máximo rendimiento de los instrumentos de dibujo, así como para sentar las bases de adquisición de hábitos de exactitud, limpieza, ejecución de trabajo finalizado, etc.

**Segunda unidad.** Continuaremos por geometría aplicada: paralelas, perpendiculares, mediatrices, ángulos y arco capaz.

**Tercera unidad.** Construcción de formas poligonales: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, división de la circunferencia.

##### **PROCEDIMIENTOS**

Método de los lugares geométricos

Método de aplicación de teoremas

Método de semejanza

Uso adecuado de la regla, el compás, la escuadra y el cartabón.

## **PRIMERA UNIDAD. *Material fundamental y su uso***

### ***Contenido:***

Lápices, reglas, escuadra y cartabón. Compases. Estilografos

### ***Conocimiento de soportes:***

Papeles blancos y de color. Papeles vegetales y acetatos. Cartulinas especiales.

### ***Técnicas de borrado y restauración.***

Gomas, cuchillas y lápices especiales. Eliminación de errores.

### ***Uso correcto de plantillas.***

Plantillas para rotular, de elipses, de círculos, de curvas, plantilla especiales.

### ***Calidad en el acabado de planos y su representación.***

## **DESARROLLO DE LA PRIMERA UNIDAD TEMÁTICA**

### **1.1. GENERALIDADES**

*Vamos a comenzar a dibujar y por tanto lo primero que se debe conocer son los instrumentos y materiales que se vayan a utilizar y la forma correcta de emplearlos, así como tener los suficientes conocimientos para conservarlos, y de esta forma obtener el mayor rendimiento de ellos.*

### **1.2. LAPICEROS, REGLAS, ESCUADRA Y CARTABÓN, COMPASES. GOMAS DE BORRAR, ESTILOGRAFOS.**

#### ***LAPICEROS Y PORTAMINAS***

Aunque en la actualidad se suele dibujar con portaminas, que nos evita el engorro de sacar punta a los lápices, con estos se obtiene mayor precisión en los trazados. Los lápices suelen ser de sección redonda o exagonal para el dibujo se prefieren estos últimos ya que no tienen la tendencia de rodar en la mesa, estos están contruidos por madera blanda, sin nudos y fibras duras. En su interior lleva una mina cuya dureza define al lápiz.

El dibujante debe de elegir la mina adecuada al tipo de dibujo que se vaya a realizar. La dureza de la misma se indica por siglas formadas por letras y números. Según la dureza de las

minas tendremos.

7H y 8H: muy dura, poco empleada.

6H, 5H: dura, se emplea para dibujos técnicos muy precisos.

4H, 3H y 2H: Menos dura, se emplea para dibujos técnicos.

H, HB, B, 2B: blanda, se emplea para croquizar.

Cualquiera que sea la dureza de la mina empleada, la punta del lápiz ha de tener la forma necesaria para permitir un trazado fino y limpio. Ha de afilarse con bastante frecuencia, para lo cual emplearemos un raspador de lija. La punta ha de ser cónica y puntiaguda, de 7 a 8 mm. De longitud. Las líneas se trazan de izquierda a derecha, inclinando el lápiz o portaminas unos  $60^\circ$  en la dirección del trazado.

El portaminas esta formado por un tubo que contiene la mina y que dispone en uno de sus extremos de un mecanismo de ajuste. La boquilla del mismo está preparada para albergar minas de 0,5-0,7 y 0,9. Al igual que los lápices las minas se clasifican por su dureza.

### ***REGLA, ESCUADRA Y CARTABÓN***

Para las medidas en los dibujos se emplea una regla pequeña llamada doble decímetro, esta regla esta biselada en los extremos con la graduación grabada en el bisel. Este instrumento sólo debe emplearse en la toma de medidas y jamás trazar líneas con el mismo, ya que perdería la precisión.

El juego de escuadra y cartabón constituye el principal instrumento de dibujo, tanto para el trazado a lápiz como a tinta. Están construidas de celuloide, generalmente verde o gris, las construidas en blanco suelen estar graduadas y no son de calidad.

La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos por tanto son de  $45^\circ$ . El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos miden  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .

Algunas de estas plantillas suelen llevar un lado biselado para facilitar el trazado a tinta, sin embargo, esto que en principio parece una ventaja, crea mas inconvenientes que aquellos otros que son rectos. Por tanto las plantillas que deben de emplearse serán con cantos rectos.

Para conservar estas plantillas y trabajar con la mayor exactitud, no deben de emplearse objetos cortantes en sus bordes biselados. Dado que lo dibujos a realizar serán de tipo medio, debemos de emplear instrumentos que sean de un tamaño medio, por ejemplo que la hipotenusa del cartabón mida 285 mm.

### ***COMPASES***

El compás es un instrumento con dos patas articuladas, una termina en una aguja de acero y otra tiene el elemento trazador, que puede ser de lápiz o tinta. La mina debe de ser semidura afilada en forma de bisel hacia dentro y no de punta. Para pinchar en el punto exacto, se debe de

guiar la aguja con el dedo, esta debe de estar algo más saliente que la pata que tiene el elemento trazador. Para el uso correcto del compás se debe de tener presente las siguientes recomendaciones.

- a) Afilar la mina en forma de bisel hacia el interior del compás.
- b) Sujetar el compás con los dedos índice y pulgar por el cilindro estriado que tiene en la parte superior.
- c) Manipular las articulaciones de forma que estas queden perpendiculares al plano de trabajo.
- d) Inclinar ligeramente el compás al iniciar el trazado, no sobrepasar los 15°.

Cuando las circunferencias que tenemos que trazar son demasiado pequeñas, será preciso utilizar un pequeño compás llamado bigotera.

Las bigoteras de mala calidad producen fácilmente círculos mas o menos ovalados e irregulares. Los compases de poca calidad al trazar una circunferencia, especialmente si ésta es grande, varían su medida.

### **1.3. CONOCIMIENTO DE SOPORTES. Papeles blancos y de color. Papeles vegetales y acetatos. Cartulinas especiales.**

El papel es una lámina delgada hecha con pasta de fibras de origen generalmente vegetales, blanqueadas y desleídas en agua, que después se hacen secar y endurecer por procedimientos especiales.

El papel de dibujo se puede presentar en rollos y en pliegos cortados. El espesor del papel está en relación con el peso en gramos por metro cuadrado. La superficie puede ser rugosa y mate o bien lisa y algo brillante, (papel satinado).

Cuando dibujamos a lápiz se utilizará el papel rugoso, y sin embargo a tinta utilizaremos el papel liso o satinado.

El papel lo podemos dividir en dos grandes grupos: **papel opaco** ( blanco o de color), y papel **transparente**.

**Papel opaco:** Es blanco o ligeramente amarillento. Se utiliza para dibujos que no van a ser reproducidos a la luz. Está compuesto de celulosa con adición de materias textiles. El papel de calidad inferior está formado por celulosa y pasta de madera.

El buen papel para dibujar debe soportar una línea de tinta china de 1,5 mm., de espesor sin correrse; se debe de poder borrar sobre el y volver a dibujar en la zona borrada.

**Papel transparente:** Entre estos tipos de papel tenemos; papel vegetal, papel cebolla. El papel vegetal es de color gris claro o azulado. Se emplea para los dibujos originales en los que van hacerse copias hiliográficas. Debe de admitir la tinta y el borrado, sobre todo debe de ser muy transparente, ya que este se emplea para calcar los dibujos realizados a lápiz en papel opaco. No

debe de doblarse ya que los dobleces son permanentes.

Existe otro papel formado por materiales celulósicos llamados **acetatos**, alisados por ambas caras y tan transparentes como el vidrio; son muy resistentes al borrado, a la humedad y al calor, y de gran resistencia. Se emplean para planos topográficos.

#### ***1.4. TÉCNICAS DE BORRADO Y RESTAURACIÓN: Gomas, cuchillas y lápices especiales. Eliminación de errores.***

La goma de borrar se emplea para suprimir las partes sobrantes en los dibujos. Las hay para lápiz y tinta. Las gomas para lápiz conviene que sean blandas e incoloras o blancas. No deben de dejar coloreado el papel. La punta de la goma debe permanecer siempre limpia.

Los errores a tinta se hacen desaparecer raspando con una cuchilla de afeitar de las antiguas, si se trata de papel vegetal, para ello debe de pasarse la cuchilla completamente vertical al papel, a continuación se pasará una goma y la uña unas cuantas veces. También puede emplearse un borrador con una mina de fibra de vidrio, en este caso se puede emplear en papel guarro.

#### ***1.5 USO CORRECTO DE PLANTILLAS. Plantillas para rotular, de elipses, de círculos, de curvas, plantilla especiales.***

En el comercio existe un gran número de plantillas, que nos permiten de forma rápida trazar todo tipo de curvas, símbolos de mecánica, electricidad, construcción, para rotular, etc.

Calidad en el acabado de planos y su representación.

## SEGUNDA UNIDAD. Trazados fundamentales en el plano

### Contenido:

Paralelas  
Perpendiculares  
Mediatrices  
Ángulos  
Arco capaz

### 2.1. RECTAS PARALELAS. GENERALIDADES

Se llaman rectas paralelas aquellas que situadas en un mismo plano no se encuentran por más que se prolonguen en ambas direcciones.

**Teorema:** Si dos rectas son perpendiculares a una tercera estas son paralelas entre si, de lo contrario se cortarían en un punto desde el cual pudrían trazarse dos perpendiculares a una misma recta.

**Distancia entre dos rectas paralelas:** Es el segmento de perpendicular a ambas comprendido entre ellas, que por lo dicho será siempre igual, cualquiera que sea el punto por donde se trace.

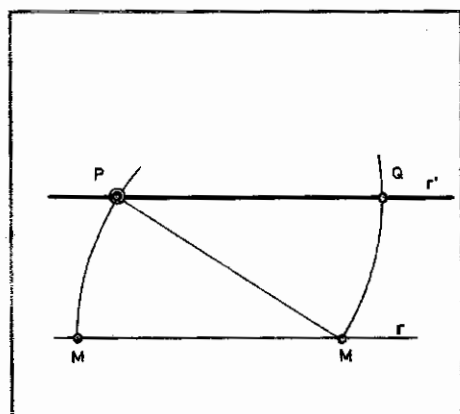


Fig..1

### 2.2. TRAZADO DE UNA PARALELA A UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO EXTERIOR.

**Primer procedimiento.** ( Fig..1) Trazamos con centro en  $P$ , un arco cualquiera que corte a  $r$  en  $M$ , y con centro en este punto trazamos otro arco con el mismo radio, que pasará necesariamente por  $P$ . Llevando  $NP = MQ$ , la recta  $PQ$ , será la paralela deseada.



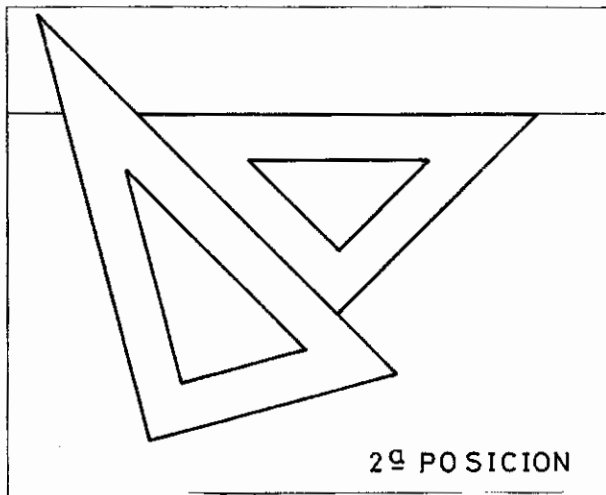


Fig. 4b

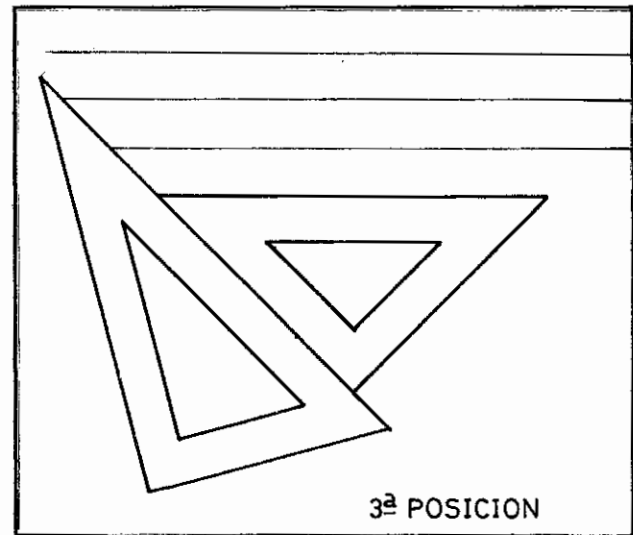


Fig. 4c

**Tercera posición:** Sin mover ahora el cartabón, deslizamos la escuadra para el trazado de horizontales.

#### 2.4. RECTAS PERPENDICULARES. DEFINICIÓN.

Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando ángulos rectos. Dos rectas perpendiculares forman por tanto al cortarse cuatro ángulos rectos.

#### 2.5. TRAZADO DE LA PERPENDICULAR A UN SEGMENTO EN SU PUNTO MEDIO. (Fig. 5).

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de  $a$  y  $b$ , y es por tanto la perpendicular en su punto medio.

Se toma un arco mayor que  $ab/2$ , y haciendo centro en cada uno de los extremos se trazan dos arcos que nos determinan los puntos  $m$   $n$ , que unidos nos dan la mediatriz.

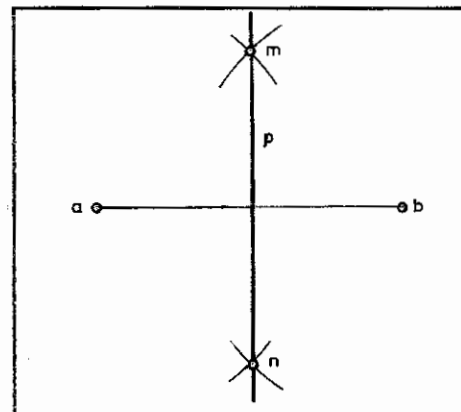


Fig. 5

#### 2.6. TRAZADO DE LA PERPENDICULAR A UNA RECTA EN UN PUNTO DE ELLA. (Fig. 6).

Sea la recta  $r$ , y un punto de la misma  $P$ . Tracemos un arco cualquiera con centro en  $P$ , que nos determina los puntos  $a$   $b$ , quedando reducido al problema anterior.

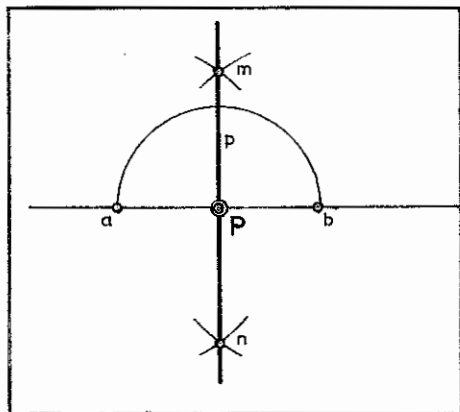


Fig.6

## 2.7. TRAZADO DE LA PERPENDICULAR A UNA RECTA DESDE UN PUNTO EXTERIOR. (Fig. 7)

Sea la recta  $r$  y el punto  $P$ . Haciendo centro en  $P$ , y con un radio cualquiera, mayor que la mínima distancia de  $P$  a  $r$ , tracemos un arco que nos determina los puntos  $a$   $b$ , equidistantes de  $P$ . La mediatriz será la solución buscada.

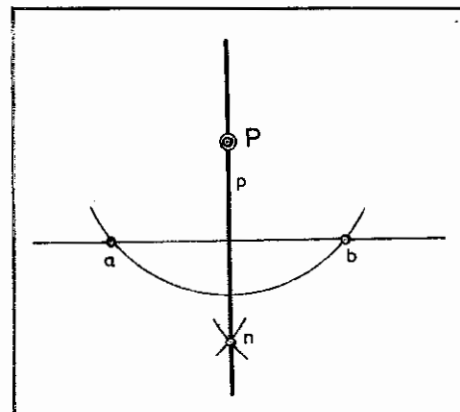


Fig.7

## 2.8. TRAZADO DE LA PERPENDICULAR A UNA RECTA EN SU EXTREMO. (Fig.8).

**Primer procedimiento:** Sea la recta  $r$  y su extremo  $P$ . Con centro en  $P$  y con radio cualquiera, tracemos la mediatriz de  $mn$ , que nos da la solución.

**Segundo procedimiento:**(Fig. 9). Sea la recta  $r$  y el punto  $P$ . Se determina  $m$  como en el caso anterior, sobre la prolongación de  $am$  llevamos un segmento  $mp' = aP = am$ .

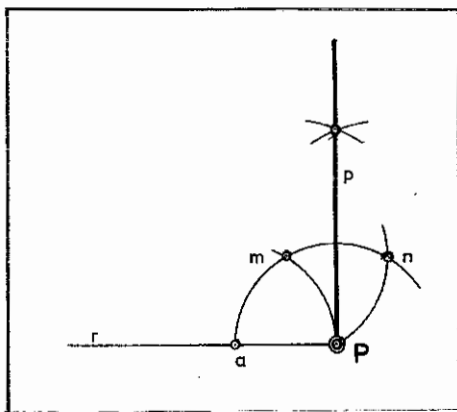


Fig.8

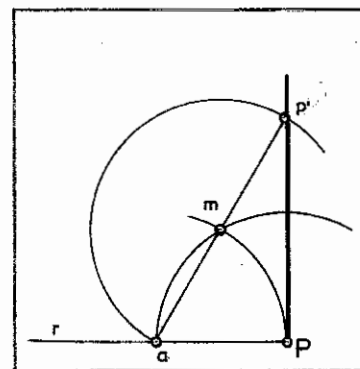


Fig.9

**Tercer procedimiento:**(Fig.10). Tracemos un triángulo rectángulo que tenga un cateto sobre la semirrecta  $r$ , y el vértice del ángulo recto en  $P$ . Para ello tracemos una circunferencia en un punto  $O$  exterior a la recta y de radio  $OP$ , esta corta a la recta en  $a$ , la recta  $Oa$  corta a la circunferencia en  $p'$ , siendo  $Pp'$  la solución.

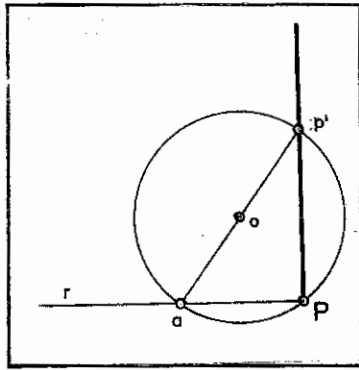


Fig. 10

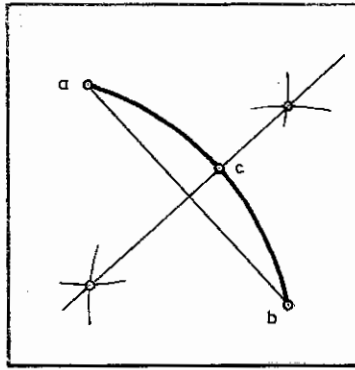


Fig. 11

## 2.9. DIVISION DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA EN DOS PARTES IGUALES.

(Fig. 11).

Es una aplicación del ejercicio 2.5. Sea el arco *ab*, se une *a* con *b* y se traza la mediatriz del segmento que será la del arco.

## 2.10. DADOS TRES PUNTOS QUE NO ESTEN EN LINEA RECTA, HALLAR LA CIRCUNFERENCIA QUE PASE POR ELLOS. (Fig. 12)

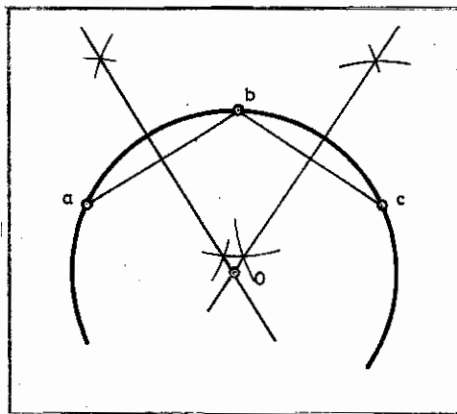


Fig. 12

Sean los puntos *a*, *b*, *c*, que no están en línea recta, se une *a* con *b* y *b* con *c* y se trazan las mediatrices *m* y *n* de las cuerdas *ab* y *bc*, las cuales se cortan en el punto *O*, centro de la circunferencia.

## 2.11. TRAZADO DE PERPENDICULARES CON ESCUADRA Y CARTABÓN

**Primera posición.** (Fig. 13). Hacemos coincidir la hipotenusa de la escuadra con una línea horizontal

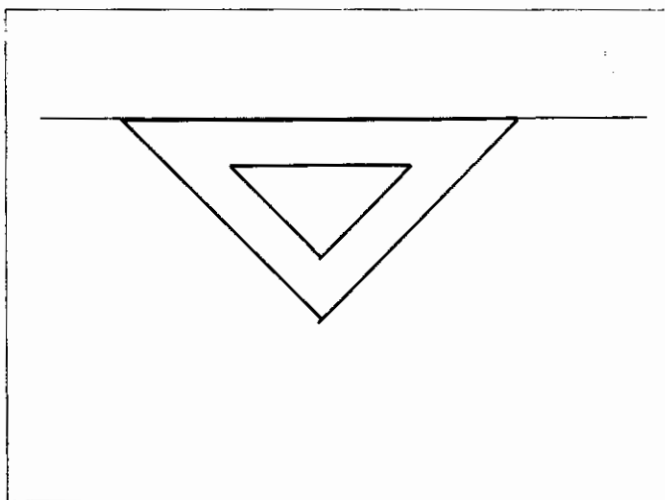


Fig. 13

**Segunda posición.** (Fig. 14). Sin mover la escuadra ajustamos el cartabón.

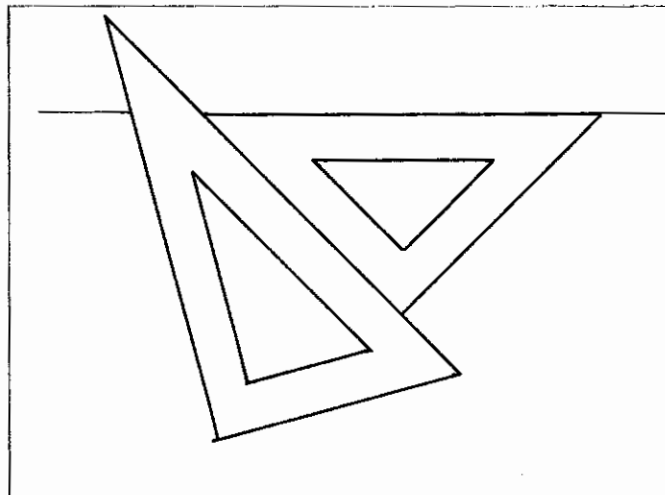


Fig. 14

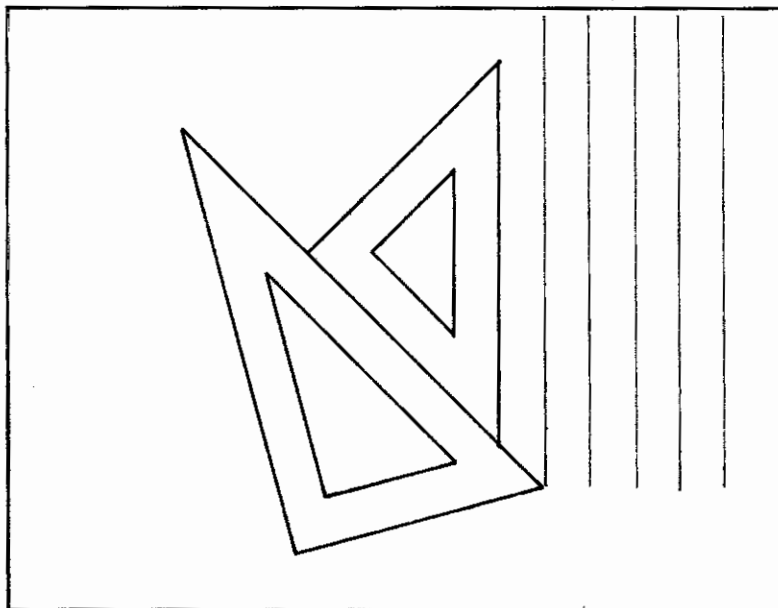


Fig. 15

**Tercera posición:** (Fig. 15). Sin mover ahora el cartabón giramos la escuadra de forma que quede la hipotenusa en posición vertical. En esta posición seguimos sin mover el cartabón y deslizamos la escuadra para el trazado de perpendiculares.

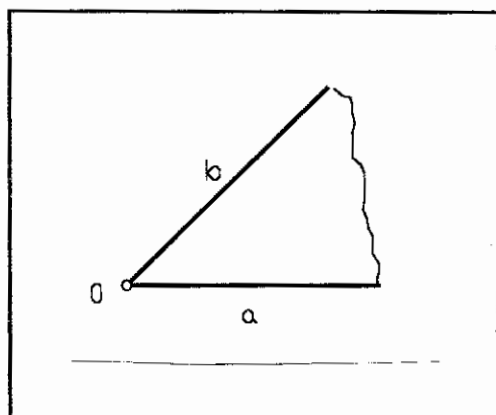


Fig. 16

## 2.12. ANGULOS. DEFINICIONES FUNDAMENTALES. (Fig. 16)

Se llama ángulo plano convexo definido por dos semirectas  $a$  y  $b$  de origen común, al semiplano comprendido entre la recta  $a$  y  $b$ .

Se llama ángulo llano, al definido por dos semirectas opuestas.

Se llama ángulo adyacente, al contiguo cuyos lados no comunes son semirectas opuestas, su suma por

tanto es un ángulo llano.

La suma de dos ángulos rectos es un llano..

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Se llaman ángulos complementarios, aquellos que su suma vale un recto.

Se llaman ángulos suplementarios, aquellos cuya suma vale dos rectos.

### 2.13. TRAZADO DE UN ÁNGULO IGUAL A OTRO. (Fig. 17)

La construcción de un ángulo igual a otro se fundamenta en que ángulos iguales tienen arcos iguales y cuerdas idénticas. Para su construcción, basta trazar arcos de radios iguales en los centros de los vértices  $A$  y  $A'$ , y hacer que las cuerdas  $M$  y  $N$  sean iguales a  $P$  y  $Q$ .

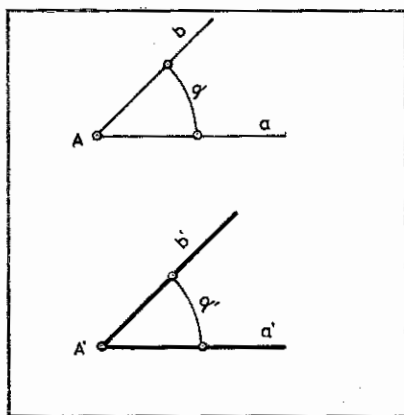


Fig.17

### 2.14. SUMA DE ANGULOS. (Fig. 18).

Para sumar un ángulo  $A$  y otro  $B$ , se construye uno  $C$ , igual en amplitud y sentido a la suma de ambos.

Para ello haciendo centro en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se trazan tres arcos de radio cualquiera, y sobre la semirecta de extremo  $C$ , se llevan en igual sentido los arcos  $m$  y  $m'$ , obteniendo la suma.

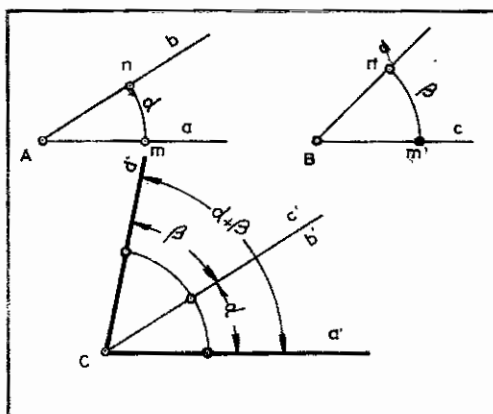


Fig.18

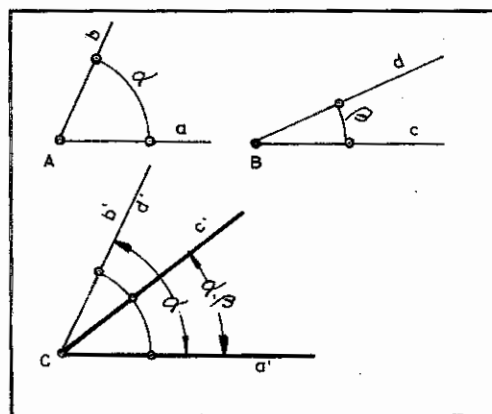


Fig.19

### 2.15. DIFERENCIA DE ÁNGULOS. (Fig. 19).

Para la diferencia de ángulos el procedimiento es bastante similar al anterior, hay que tener en cuenta que los dos ángulos deberán de tener un punto común y sentidos contrarios.

## 2.16. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

Se llama bisectriz de un ángulo al rayo que lo divide en dos partes iguales.

**Primer procedimiento.** (Fig.20). Con centro en el vértice  $A$ , se traza un arco con un radio cualquiera, que nos determina los puntos  $a$   $b$ , la mediatriz del arco  $ab$  será la bisectriz del ángulo.

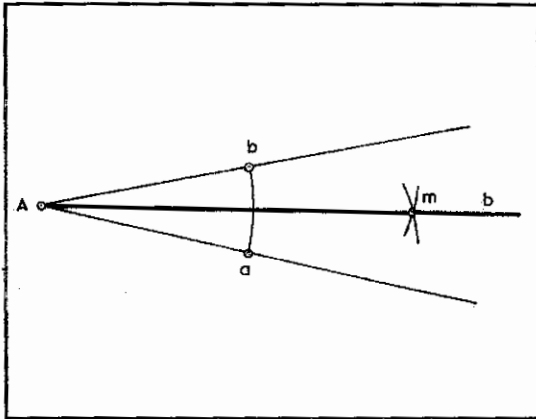


Fig.20

**Segundo procedimiento:** ( Fig.21)

Haciendo centro en el vértice  $A$ , se trazan dos arcos cualquiera, que nos determinan los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , uniendo  $bc$  y  $ad$ , nos da el punto  $m$ , que unido con el vértice, tendremos la solución.

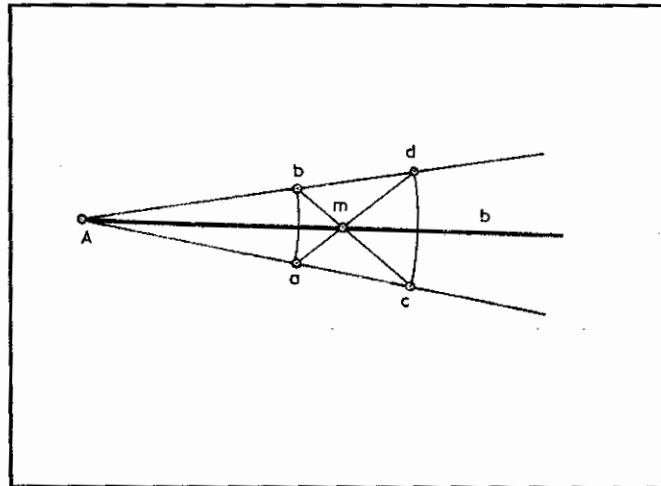


Fig.21

## 2.17. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DE VÉRTICE DESCONOCIDO.

( Fig.22)

Sea el ángulo formado por las rectas  $r$  y  $s$ . Se traza una secante cualquiera  $S$ , obteniendo los ángulos  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ , las bisectrices de estos ángulos se cortan en los puntos  $m$ ,  $n$ , la recta que pasa por ellos será la solución.

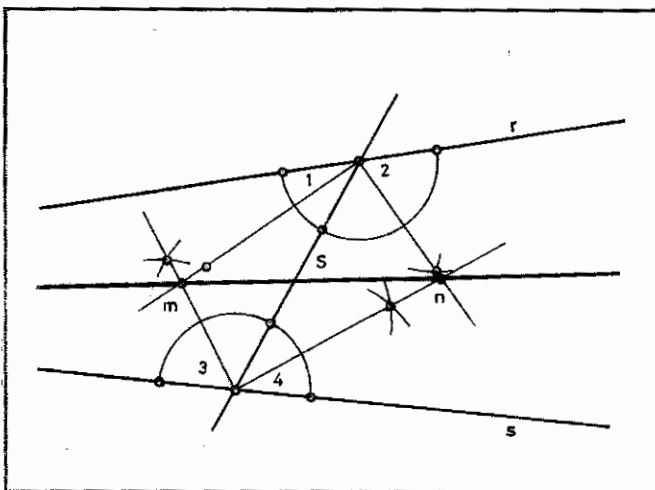


Fig.22

## 2.18. OBTENCIÓN DE UN ÁNGULO DE $60^\circ$ Y $30^\circ$ . ( Fig.23)

Se toma una recta  $AB$ , con centro en los extremos se trazan dos arcos cualquiera iguales que se cortan en el punto  $C$ , la recta  $AC$  forma  $60^\circ$  con la  $AB$ . La bisectriz de este ángulo nos determina el de  $30^\circ$ .

## 2.19. OBTENCIÓN DE UN ÁNGULO DE $90^\circ$ Y $45^\circ$ (Fig.24)

Se toma una recta  $r$ , en un punto cualquiera de ella se traza una vertical  $v$  que formará con  $r$  los  $90^\circ$ , la bisectriz de este ángulo, nos da la segunda solución.

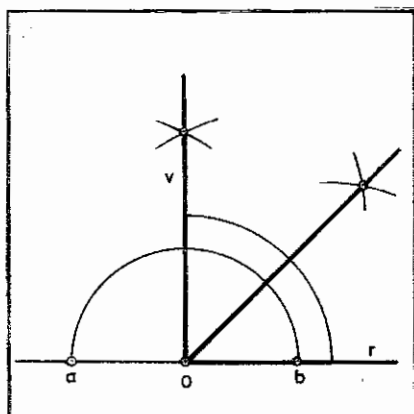


Fig.24

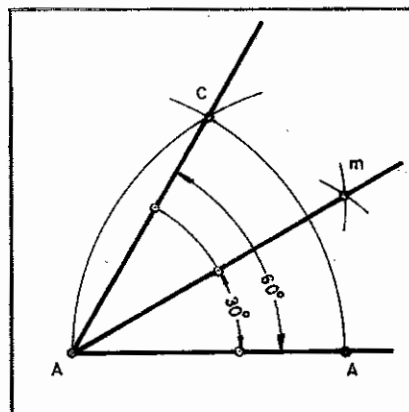


Fig.23

## 2.20. ARCO CAPAZ

Arco capaz de un ángulo dado  $C$ , que abarca un segmento  $AB$  es el lugar geométrico de los puntos que unidos con  $A$  y con  $B$  forman dos rectas cuyo ángulo es igual a  $C$ . En la figura el arco capaz del ángulo  $C$  es el arco  $AMB$  y del ángulo suplementario  $D$ , el arco  $AMB$ .

También lo podemos definir el “arco capaz” de un segmento respecto de un ángulo, al lugar geométrico de todos los puntos, desde los cuales se ve el segmento  $AB$ , bajo un mismo ángulo.

Ejemplo: Dado un ángulo  $C$ , y un segmento  $I$ , hallar el arco capaz. Para ello tracemos la mediatriz del lado  $I = AB$ , y en  $A$  se construye el ángulo  $C$ , por  $A$  se traza la perpendicular al otro lado del ángulo  $C$ , hasta que corte en  $O$  a la mediatriz. La circunferencia de centro  $O$  y radio  $OA$ , es el arco capaz del ángulo  $C$ . ( Fig. 25)

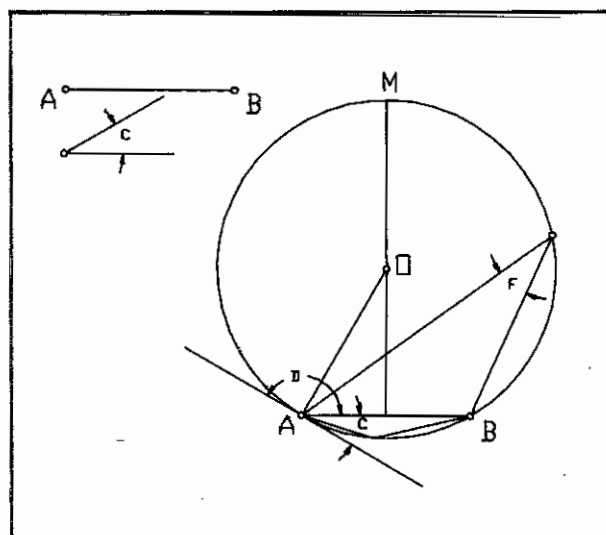


Fig.25

## TERCERA UNIDAD. Construcción de formas poligonales

### Contenido:

Triángulos  
Cuadriláteros  
Polígonos regulares e irregulares  
División de la circunferencia

### 3.1. DEFINICIONES. CLASIFICACIÓN

Se llama triángulo a la porción de espacio del plano limitado por tres segmentos rectilíneos.

Lados de un triángulo son los segmentos que lo limitan.

Ángulo interior del triángulo, o simplemente ángulo, el formado por dos de sus lados.

Ángulos exteriores, son los adyacentes a los interiores.

Vértices, son los de los ángulos.

Los vértices se designan por letras mayúsculas A,B,C.

Los lados se designan por sus extremos o por las letras minúsculas correspondientes al vértice opuesto.

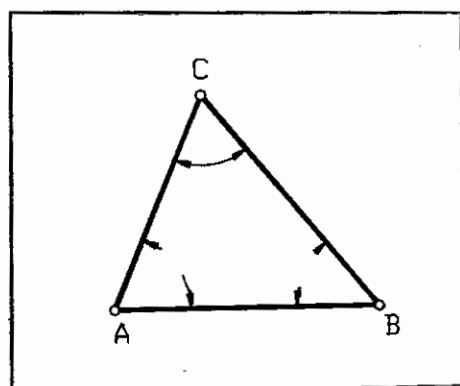


Fig. 26

Los ángulos se designan por la letra de su vértice con el signo de A.

**Ángulos de un triángulo.** (Fig. 26 La suma de los tres ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, o lo que es igual un ángulo llano.

Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

$$\beta = \alpha + \alpha_2$$

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$$

$$\begin{aligned}\beta + \alpha_1 &= 180^\circ \\ \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 &= \beta + \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \beta\end{aligned}$$

**Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.**

- a) A mayor ángulo se opone siempre mayor lado.
- b) La suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el tercero.
- c) Un lado de un triángulo es siempre mayor que la diferencia entre los otros dos.

**3.2. PUNTOS NOTABLES EN UN TRIANGULO**

**Altura:** Se llama altura *ha* de un triángulo, a la distancia perpendicular del vértice a la recta a que pertenece el lado opuesto.

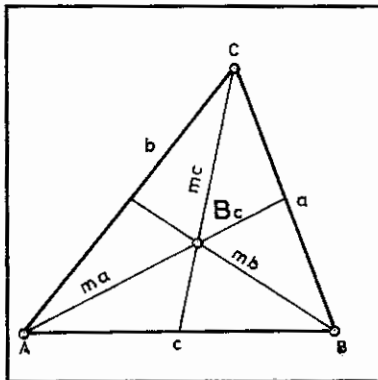


Fig.27

**Mediana:** Se llama mediana *ma* a los segmentos de las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

**Baricentro:** se llama baricentro *Bc*, al punto de intersección de las medianas. Fig. 27

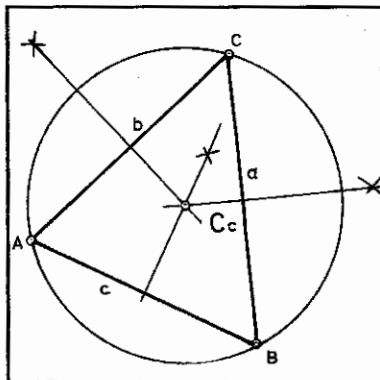


Fig.28

**Circuncentro:** Se llama circuncentro de un triángulo *Cc*, al punto de intersección de las mediatrices de sus lados, por ello equidista de sus vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita. Fig.28

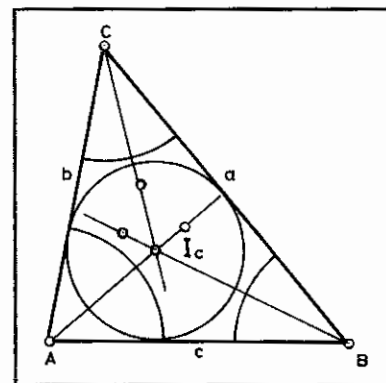


Fig.29

**Incentro:** Se llama incentro de un triángulo *Ic*, al punto de intersección de las bisectrices de sus ángulos, por ello equidista de sus tres lados y por ello es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Fig.29

Existen también puntos exteriores que tienen la misma propiedad y que se denominan exincentros.

La circunferencia que es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos se llama exinscrita.

**Ortocentro:** Se llama ortocentro de un triángulo *Oc* al punto donde concurren las alturas de un triángulo. Fig. 30

### Recta de Euler

Leonardo Euler (1707-1783), demostró que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo, están alineados; a dicha recta se le llama *recta de Euler*.

Además se verifica que el baricentro está situado entre el ortocentro y el circuncentro y a doble distancia del primero que del segundo.

### 3.3. CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS.

Los triángulos, atendiendo a sus lados se clasifican en: equiláteros, isósceles, y escalenos. Fig 31

Triángulo equilátero: es el que tiene tres lados iguales.

Triángulo isósceles: es el que tiene dos lados iguales y uno desigual.

Triángulo escaleno: es el que tiene los tres lados desiguales.

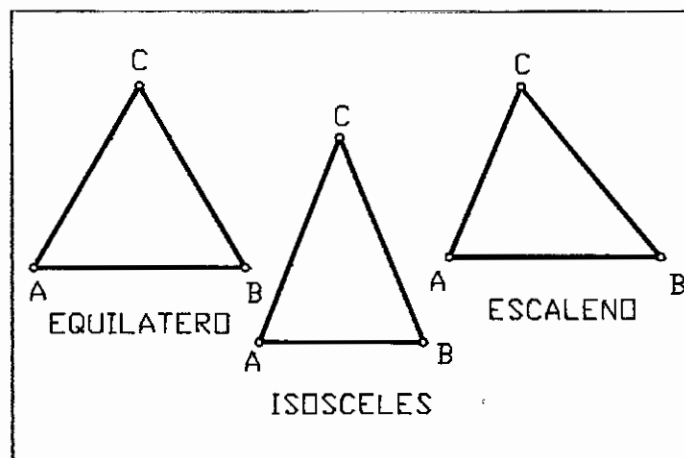


Fig.31

Atendiendo a sus lados ángulos, los triángulos pueden ser: rectángulos, acutángulos y obtusángulos. Fig. 32

El triángulo rectángulo: es el que tiene un ángulo recto y dos agudos.

El triángulo acutángulo: es el que tiene tres ángulos agudos.

El triángulo obtusángulo: es el que tiene un ángulo obtuso y dos agudos.

### 3.4. TRAZADO DE TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS.

Para su definición basta con conocer un dato (ángulo o lado), ya que los otros dos son iguales.

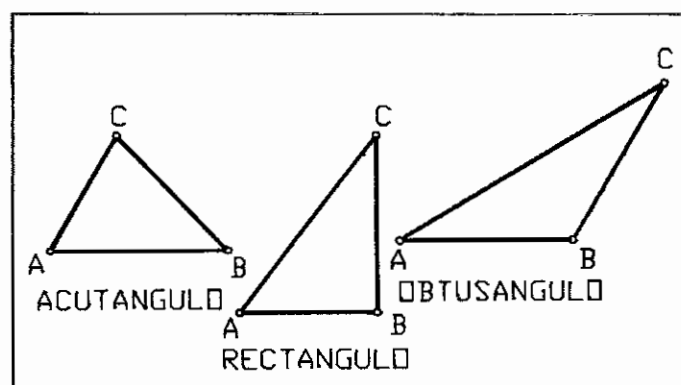


Fig32

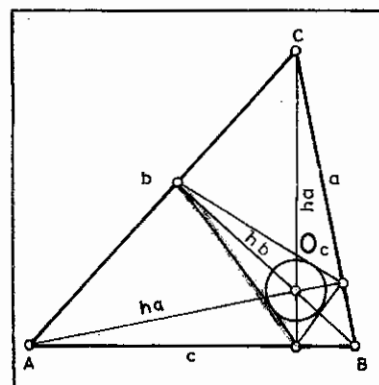


Fig.30

**Trazado de un triángulo equilátero dado el lado  $l$ :** Se traza el lado dado, en los extremos del mismo, se trazan dos arcos haciendo centro en  $A$  y  $B$  y con radio  $l$ . Los extremos de los arcos se cortan en el punto  $C$ . Se unen los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , obteniendo el triángulo. (Fig.33)

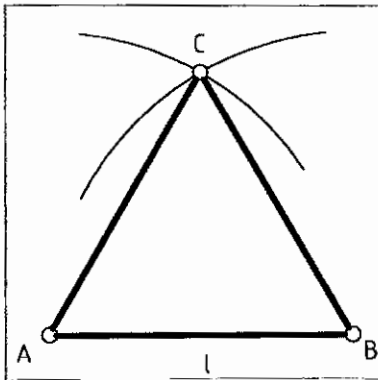


Fig.33

**Trazado de un triángulo equilátero conociendo el radio  $r$  de la circunferencia circunscrita.** (Fig.34)

Sea la circunferencia de centro  $P$  y radio  $r$ , trazamos un arco con centro en  $m$  de radio  $r$ . El arco corta a la circunferencia en los puntos  $A$  y  $B$ . Se unen los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , obteniendo el triángulo.

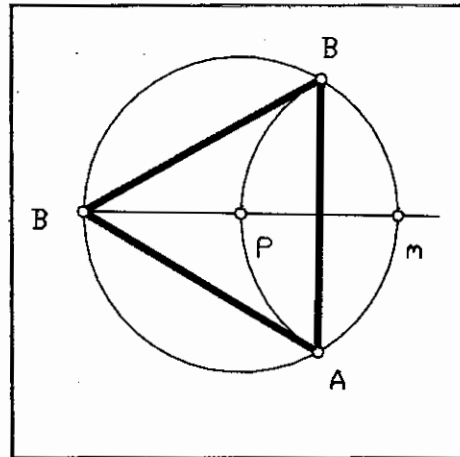


Fig.34

### 3.5 TRAZADO DE TRIÁNGULO ISÓSCELES.

Para poder construirlos será preciso conocer dos datos.

**Trazado de un triángulo isósceles dados dos lados.** (Fig.35.

Sean por ejemplo los lados  $a$  y  $b$ , tomamos un lado desigual por ejemplo  $a$  y con radio  $b=c$  tracemos dos arcos que se cortan en el tercer vértice del triángulo  $A$ .

**Trazado de un triángulo isósceles dado un lado y el ángulo desigual.** (Fig.36

Sea el lado desigual  $a$  y el ángulo  $A$ ; se construye el lado desigual  $A$  y se traza la bisectriz y sobre una perpendicular a esta se lleva  $a/2$  a cada lado. Se desplaza

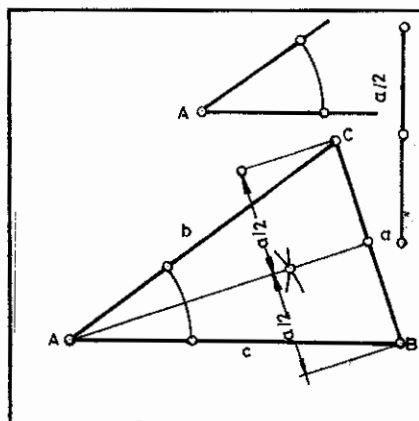


Fig.36

paralelamente este segmento hasta que corte a los lados del ángulo  $A$ , los que nos determinan los vértices  $B$  y  $C$ .

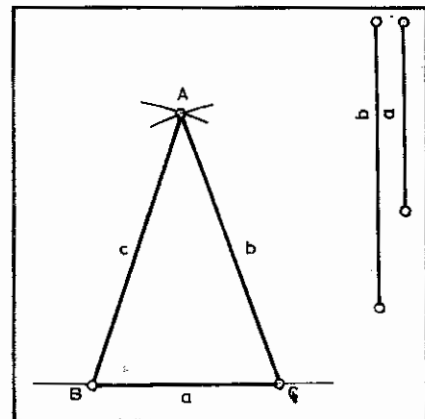


Fig.35

**Trazado de un triángulo isósceles dado el ángulo desigual y el lado que se repite.** (Fig.37

Sea el lado  $b$  y el ángulo  $A$ ; se construye el ángulo desigual dado y llevamos sobre sus lados desde el vértice los segmentos iguales  $b = c$ , que nos determinan el triángulo buscado.

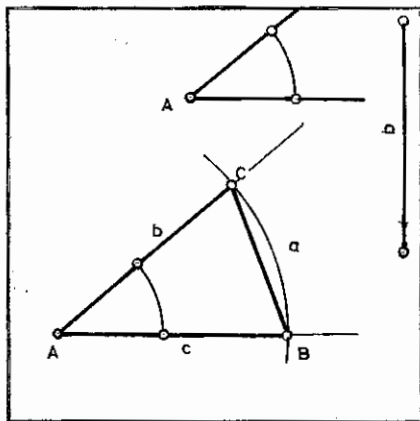


Fig.37

### 3.6. TRAZADO DE TRIÁNGULOS ESCALENOS.

Para su construcción necesitamos conocer tres datos.

**Construcción de un triángulo escaleno dados los tres lados.** (Fig. 38)

Sean los lados  $a$ ,  $b$ , y  $c$ , se coloca uno de los lados, por ejemplo el  $a$ , con centro en  $B$  se traza un arco con radio  $c$ , y con centro en  $C$ , un arco con radio  $b$ , ambos se cortan en  $A$ , vértice buscado.

**Construcción de un triángulo escaleno dados dos lados y el ángulo que forman.** (Fig.39)

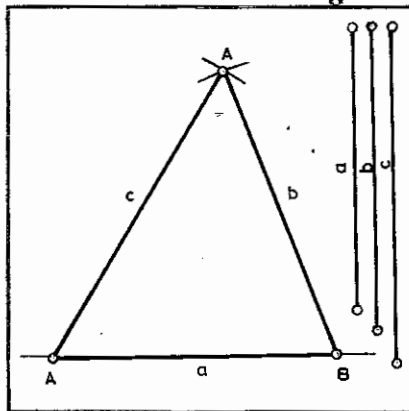


Fig.38

Sean los lados  $a$ ,  $b$  y el ángulo  $C$ ; se coloca uno de los lados por ejemplo, el  $a$  y en su extremo se construye el ángulo  $C$ , llevamos sobre el otro la magnitud de  $b$ , que nos determina el extremo  $A$ , que unido con  $B$ , nos da la solución.

**Triángulo escaleno dado dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.** (Fig.40).

Se toma el lado  $a$  y sobre su extremo se construye el ángulo  $C$ , con centro en  $B$  y radio el lado  $c$ , se traza un arco:

Según la magnitud de  $c$ , se obtiene dos, una o ninguna solución.

Si  $c' < d$ , no hay solución. Si  $c' > d$  hay dos soluciones. Si  $c = d$ , hay una solución. (siendo  $d$  la altura del vértice  $B$  al lado  $b$ ).

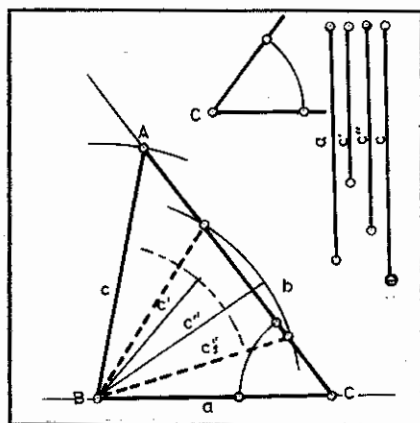


Fig.40

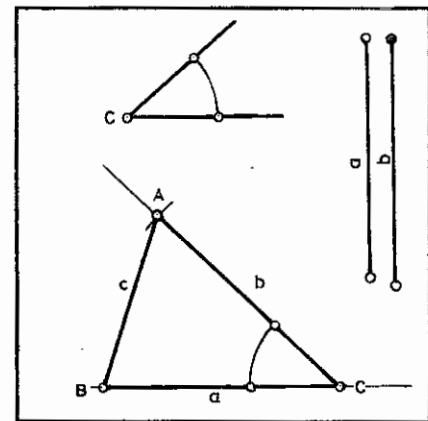


Fig.39

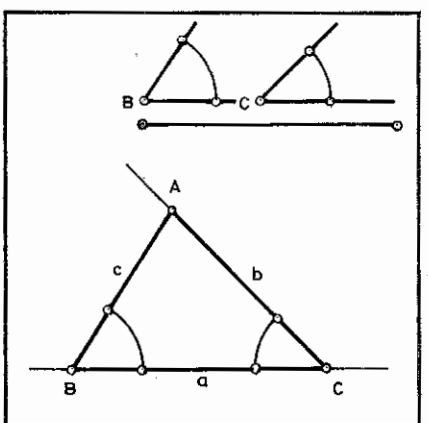


Fig.41

### Triángulo escaleno dados un lado y los ángulos adyacentes. (Fig. 41)

Sea el lado  $a$  y los ángulos  $B$  y  $C$ ; se coloca el lado y con centro en sus extremos se construyen los ángulos  $B$  y  $C$ , prolongando sus lados hasta que se corten en  $A$ .

### Construcción de un triángulo escaleno conociendo su base, el ángulo opuesto y otro lado. (Fig. 42)

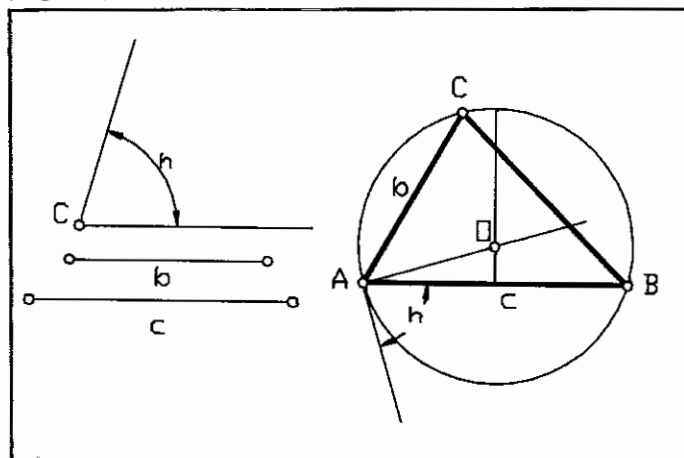


Fig. 42

Se traza el segmento de la base  $c$ , sobre ella se halla la mediatriz, en el extremo  $A$  se traza el ángulo  $h$ , por  $A$  se traza la perpendicular al otro lado del ángulo  $h$ , hasta que corte en  $O$  a la mediatriz. La circunferencia de centro  $O$  pasará por los extremos de  $A$  y  $B$ , que es el arco capaz. Seguidamente se toma el valor del otro lado  $b$ , y se corta a la circunferencia en el vértice  $C$ , uniendo  $C$  con  $A$  y con  $B$ , tendremos la solución.

## 6. TRAZADO DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Para su definición bastará con conocer dos datos.

### Construcción de un triángulo rectángulo conociendo dos catetos. (Fig. 43).

Sean el lado  $b$  y  $c$ ; se sitúa uno de ellos, por ejemplo el  $c$ , por  $A$  se traza la perpendicular y se lleva el cateto  $b$ , obteniendo el triángulo.

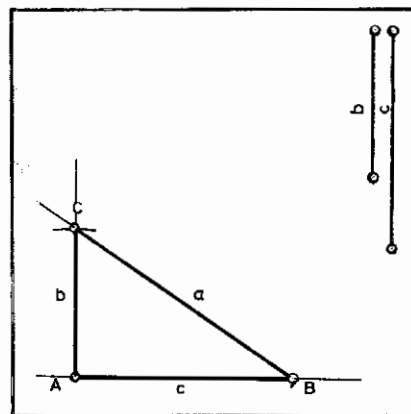


Fig. 43

3.

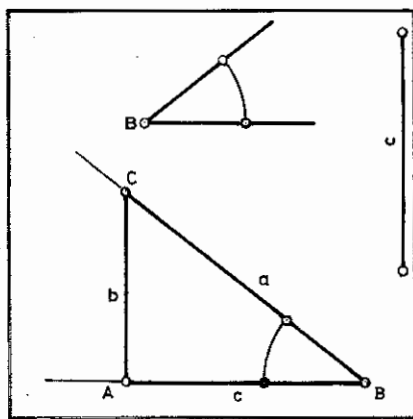


Fig. 44

### Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo agudo. (Fig. 44).

Sea el lado  $c$  y el ángulo  $B$ ; se sitúa el cateto  $c$ , y en un extremo se traza el ángulo  $B$  y en el otro se traza la perpendicular hasta que corte a la prolongación del ángulo.

### Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa. (Fig. 45).

Con radio el valor de la hipotenusa se traza una circunferencia y haciendo centro en un extremo y con radio el valor del cateto se traza un arco que corte a la circunferencia en  $A$ , tercer vértice del triángulo.

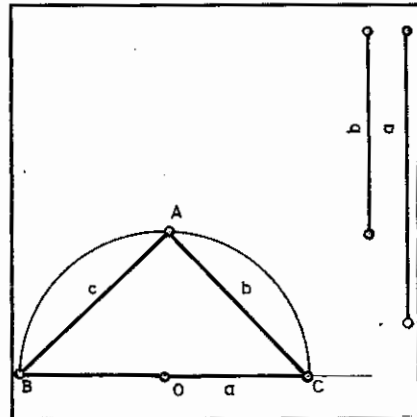


Fig.45

## 3.7. CUADRILÁTEROS.

Se llama cuadrilátero a un polígono de cuatro lados.

Lados opuesto de un cuadrilátero, son los que no tienen ningún vértice común.

Vértices opuesto de un cuadrilátero son los que no pertenecen a un mismo lado.

**Clasificación de cuadriláteros.** Los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos, se llaman, paralelogramos, si tienen dos lados opuestos paralelos y los otros dos no, se llaman trapezios, si no tienen ningún par de lados paralelos, se llaman trapezoides..

**Paralelógramos.** Los paralelogramos equiángulos, es decir que tiene sus ángulos iguales ( rectos) se llaman rectángulos. Si son equiláteros o sea tienen sus lados iguales y ángulos iguales dos a dos, se llaman rombos, y si no tienen ninguna de estas propiedades, se llaman romboides. Si tienen ambas propiedades, es decir son equiángulos y equiláteros, se llaman cuadrados.

**Diagonales.** Los paralelogramos tienen como centro de simetría donde se cortan las diagonales. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Los ángulos contiguos de un paralelogramo son suplementarios por ser colaterales.

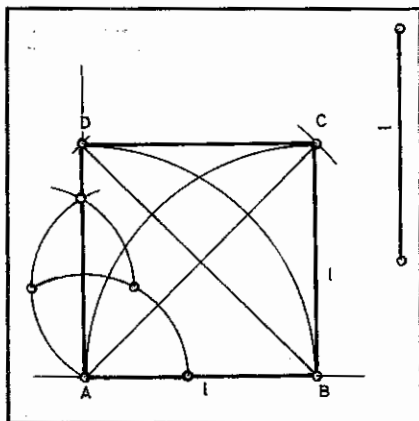


Fig.46

**Número de diagonales.** Un cuadrilátero tiene dos diagonales.

### Construcción de un cuadrado dado el lado. (Fig.46)

Sea el lado  $l$ ; se traza el lado  $l$  y sobre sus extremos se levanta una perpendicular, sobre la que se lleva el valor de los lados, trazando dos arcos con centro en  $A$  y  $B$ , a continuación con centro en  $A$  y con valor de la diagonal se traza el arco que nos determina el punto  $C$ .

**Construcción de un cuadrado dada la diagonal.** ( Fig.47).

En un cuadrado, la diagonal es el valor del diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrado. Por ello, trazamos la circunferencia de diámetro  $D$ , trazamos los dos diámetros perpendiculares, que nos determinan los puntos  $ABCD$  del cuadrado.

**Construcción de un rectángulo conociendo dos lados.** (Fig.48).

Sean los lados  $a$  y  $b$ ; situamos el lado  $a$ , y en su extremo trazamos una perpendicular, sobre ella llevamos el lado  $c$ , por su extremo  $D$  trazamos la paralela al lado  $a$  y al lado  $b$ , por  $B$ , que se cortan en  $E$ .

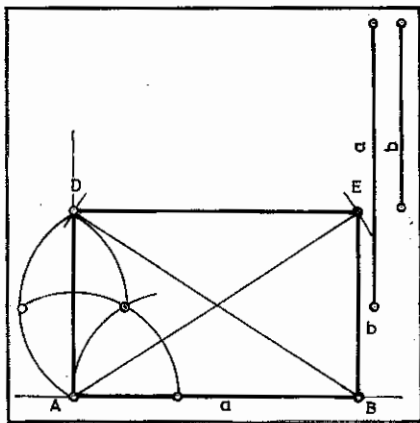


Fig.48

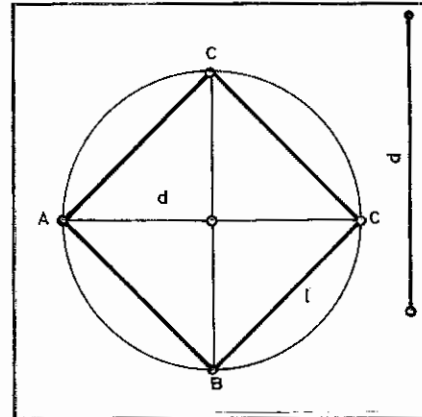


Fig.47

**Construcción de un rectángulo dado un lado y la diagonal.** (Fig.49).

Sea el lado mayor  $b$  y la diagonal  $d$ ; se construye el triángulo rectángulo que tenga por lado el lado  $b$  y por hipotenusa la diagonal  $d$ ; tracemos por  $D$  una paralela al lado mayor  $b$ , y haciendo centro en  $A$ , y con el valor de la diagonal se traza un arco que corte en  $E$  a la paralela.

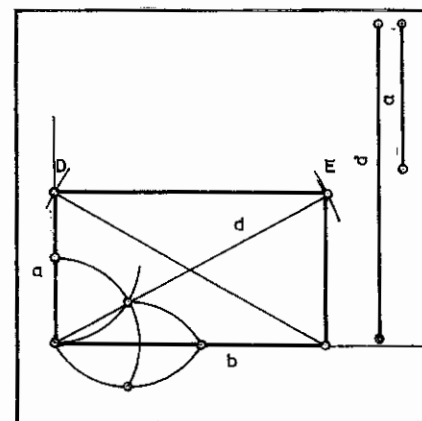


Fig.49

**Construcción de un rombo dado el lado y la diagonal.** (Fig.50).

Dos datos son necesarios para definirlo, ya que los triángulos isósceles  $A, B, C$  y  $C, B, D$ , son iguales. Cualquier problema que se nos presente nos llevará a la construcción de uno de los triángulos isósceles mencionados.

Sea el lado  $l$  y la diagonal  $d$ ; se sitúa la diagonal, y a continuación se traza la mediatriz, haciendo centro en los extremos  $A$  y  $B$  se trazan dos arcos que nos determinan los

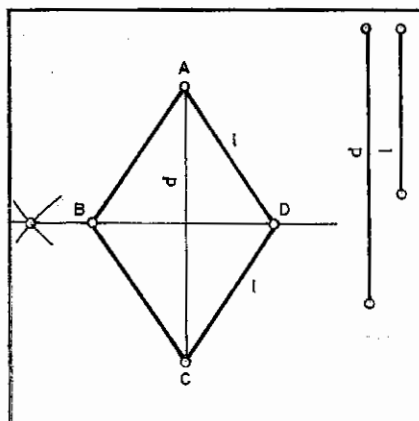


Fig.50

vértices  $BD$ .

**Construcción de un romboide dados dos lados y la diagonal.** ( Fig.51).

Como una diagonal divide al romboide en dos triángulos escalenos iguales, se necesitarán tres datos para su correcta definición.

Sean los lados  $b$  y  $c$  y la diagonal  $d$ ; se construye el triángulo con valor de estos tres lados, que nos da la mitad del romboide, repitiendo la operación tendremos la solución.

**Construcción de un romboide dados dos lados y el ángulo que forman.** ( Fig.52).

Sean los lados  $a$  y  $b$  y el ángulo  $C$ ; se toma el lado  $b$ , y en uno de sus extremos se construye el ángulo  $C$ , sobre el que se lleva el valor de lado  $a$ , trazando las paralelas a los lados  $a$  y  $b$ , tendremos la solución del problema.

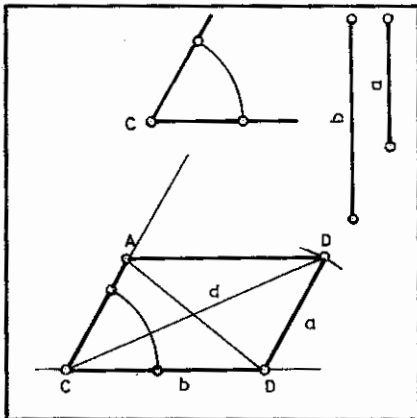


Fig.52

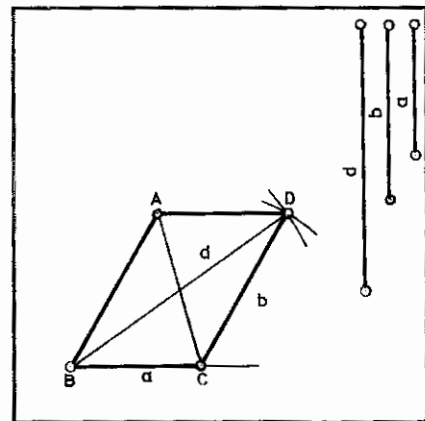


Fig.51

**Trapezio rectángulo dados dos lados contiguos y perpendiculares y el ángulo agudo opuesto.** (Fig. 53).

Sea  $h$  la altura,  $b$  el lado y  $C$  el ángulo. Se traza el lado  $b$  y su perpendicular en el extremo  $B$ , en el extremo  $C$ , se lleva el ángulo  $C$  dado, la paralela al lado  $b$  nos dará el trapecio.

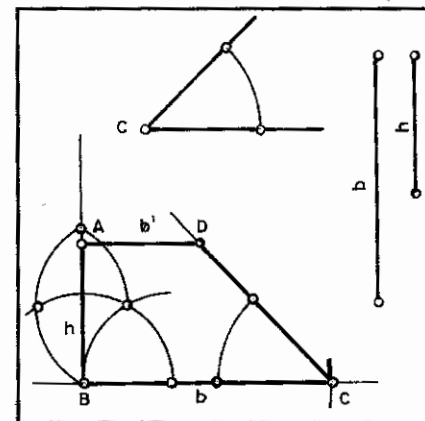


Fig.53

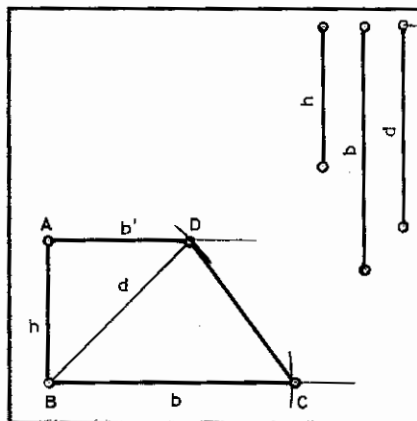


Fig.54

**Trapezio rectángulo dada la base mayor, una de las diagonales y la altura.** ( Fig.54).

Sea  $b$  la base mayor,  $d$  la diagonal y  $h$  la altura; sobre las rectas perpendiculares  $b$  y  $h$ , se lleva la paralela por  $A$ , y con el valor de la diagonal se cortará en el punto  $D$ , cuarto vértice.

**Trapezio isósceles dada la base mayor, la media y la altura. (Fig.55).**

Sea  $b$  la base mayor  $b_m$  la media y  $h$  la altura; se lleva la base mayor  $b$  y haciendo centro en  $B$  y  $C$  se lleva la distancia de la base menor, por donde se levantan dos perpendiculares, seguidamente se traza la mediatriz de la base, sobre la que se lleva la altura  $h$ , se traza su mediatriz, que nos determinan los puntos 1 y 2, intersección de las perpendiculares  $a$  y  $b$  con la mediatriz, uniendo los puntos  $B1$  y  $C2$ , nos determinarán los puntos  $A$  y  $D$ , a la paralela por  $h$ .

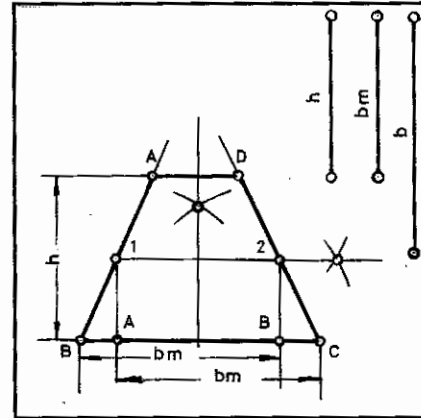


Fig.55

**Trapezio escaleno dadas las dos bases y los dos ángulos adyacentes a la base mayor. ( Fig.56).**

Sean las bases  $b$  y  $b'$ , y los ángulos  $B$  y  $C$ ; se llevan los ángulos  $B$  y  $C$  sobre la base mayor. A partir de  $B$  se resta la base menor, que nos determina el punto  $h$ , por donde se traza una paralela a  $BA$ , que cortará en  $D$ , que será el cuarto vértice.

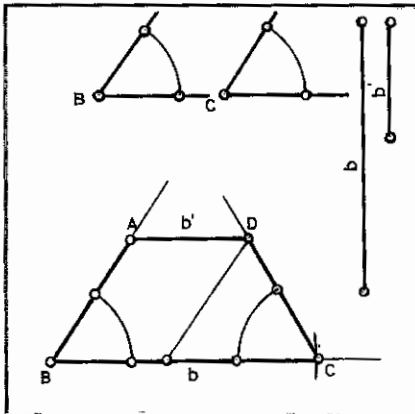


Fig.56

**Trapezoide dados los cuatro lados y la altura correspondiente a uno de ellos. ( Fig.57).**

Sean los lados  $a b c d$ , y la altura  $ha$ ; trazamos una paralela al lado  $a$ , a la distancia  $ha$ , a continuación haciendo centro en  $C$  y con radio  $b$ , cortamos a la paralela trazada en el vértice  $D$ , seguidamente con el valor del lado  $c$  trazamos un arco, con centro en  $D$ , y con el valor del lado  $d$ , trazamos otro arco, que cortará al anterior en el cuarto vértice  $A$ .

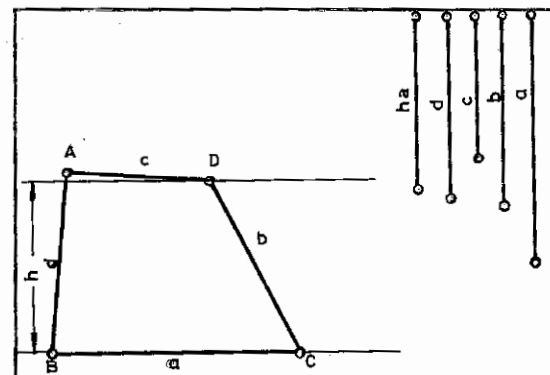


Fig.57

### 3.8. POLÍGONOS REGULARES. CONSTRUCCIONES EXACTAS.

#### 3.8.1 DEFINICIONES.

**Polígono equilátero:** Se llama polígono equilátero, a aquel que tiene todos sus lados iguales; por

ejemplo, el rombo.

**Polígono equiángulo** es el que tiene todos sus ángulos iguales; por ejemplo, el rectángulo.

**Polígono regular**, es el equiángulo y el equilátero; por ejemplo, el cuadrado.

**Teorema.** Todo polígono regular es incriptible en una circunferencia, y circunscristible a otra que tiene el mismo centro. ( Fig.58)

**Radio  $r$**  del polígono regular es el de la circunferencia circunscrita a el.(Fig.58)

**Apotema  $a$**  del polígono regular es el radio de la circunferencia inscrita en el. ( Fig.58)

**Ángulo central  $\alpha$**  del polígono regular, es el formado por los radios que pasan por dos vértices consecutivos del polígono. ( Fig.59)

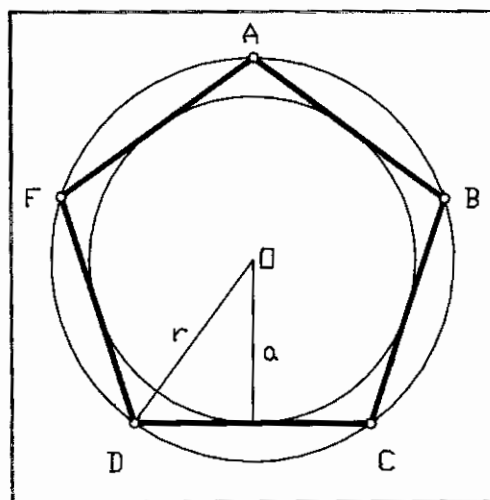


Fig.58

#### Clasificación de polígonos.

A) Los que tienen soluciones exactas: cuadrado, octógono, hexágono, decágono, pentágono y en general todos aquellos que se obtienen por bisección de los anteriores.

B) Los que tienen soluciones aproximadas: Heptágono y eneágono.

#### Teoremas fundamentales.

1. Los ángulos centrales de un polígono regular, son suplementarios de los interiores del mismo, y por consiguiente iguales a los exteriores.(Fig.59)

2. El lado del decágono regular, es el mayor segmento aditivo de los que dividen al radio en media y extrema razón.

3. El lado del decágono regular estrellado es el mayor segmento sustractivo de los que dividen al radio en media y extrema razón.

**Polígonos convexos y estrellados.** Cuando un polígono se cierra después de recorrer una sola vez la circunferencia pasando consecutivamente por todos los puntos de división, denomina "**convexo**",

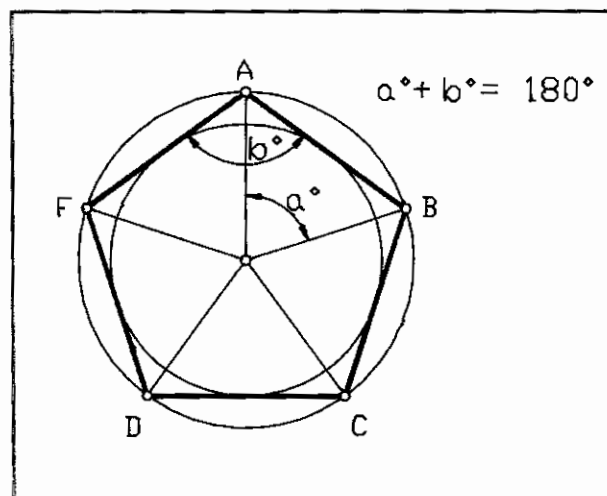


Fig.59

Cuando se cierra después de dos o más vueltas, el polígono se llama "**estrellado**".

Si el cierre se realiza sin pasar por todos los vértices, se consigue una figura que no es estrellado, y se denomina falso estrellado, originando varios polígonos convexos, girados entre sí una misma amplitud de ángulo en el cierre.

**Cuadrado regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (Fig.60).**

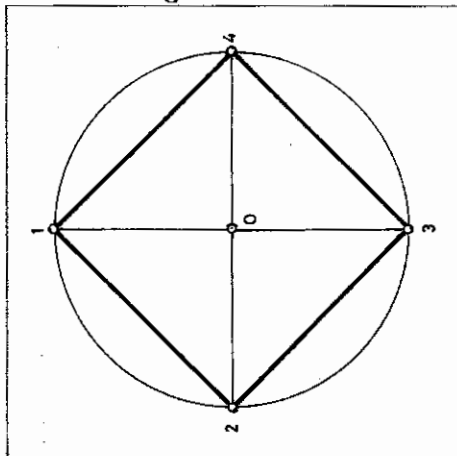


Fig.60

Para inscribir un cuadrado en una circunferencia, se divide la circunferencia en cuatro partes iguales, para ello se trazan los dos diámetros ortogonales, uniendo los puntos, 1, 2, 3 y 4. El lado del cuadrado en función del radio de la circunferencia será:

$$(1 \times b)^2 = (4O)^2 + (1O)^2$$

$$l^2 = 2r$$

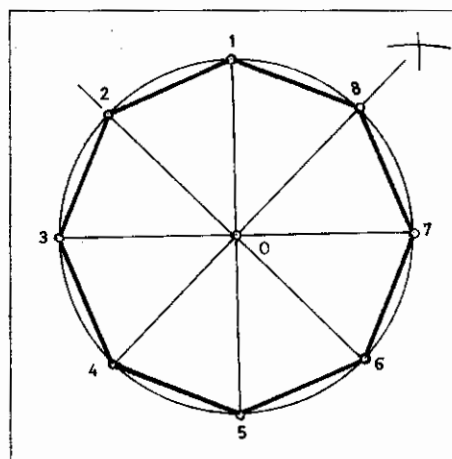


Fig.61

**Octógono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (Fig.61).**

Hallando las bisectrices de los cuatro ángulos del problema anterior, tendremos la solución.

**Hexágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (Fig.62).**

El lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él; por ello trazamos la circunferencia de radio dado y con la misma abertura del compás dividimos la circunferencia en seis partes iguales.

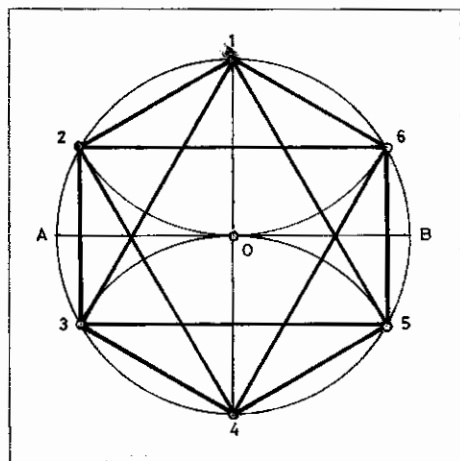


Fig.62

**Decágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita a él. (Fig. 63).**

Esta construcción está basada en los teoremas antes referidos. Trazamos la circunferencia de radio  $AB$ , y los dos diámetros perpendiculares  $A-B$  y  $1-6$ , seguidamente trazamos la mediatriz del segmento  $OB$ , que nos determina el punto  $O'$ , con centro en  $O'$ , trazamos la circunferencia de diámetro  $OB$ , la recta  $O'-1$ , nos da el punto  $m$ ;  $m-1$  será el lado del decágono.

**Pentágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (Fig.64).**

Este ejercicio puede resolverse uniendo los lados de un decágono regular de dos en dos. Otro procedimiento será el siguiente:

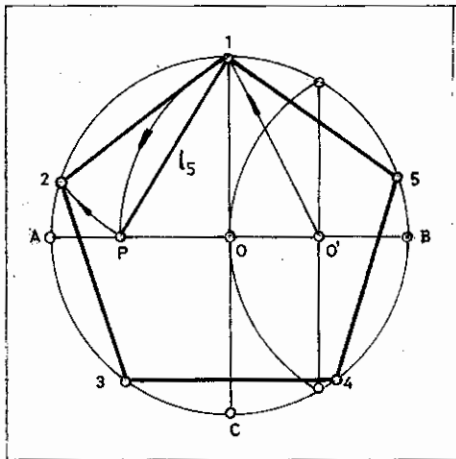


Fig.64

Tracemos los diámetros perpendiculares  $AB-1C$ , con centro  $O'$ , mediatriz del segmento  $OB$ , se traza un arco de radio  $O1$ , que corta al diámetro en  $P$ , el segmento  $P1$ , será el lado del pentágono.

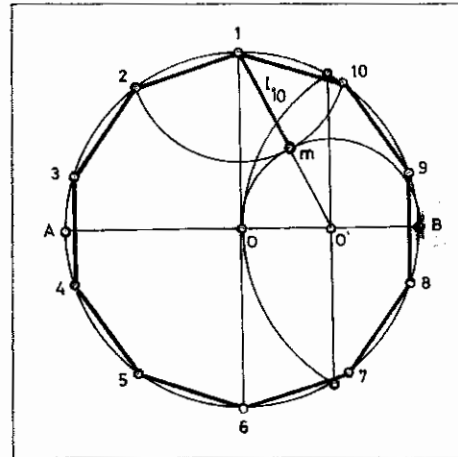


Fig.63

**Pentágono regular dado el lado. (Fig.65).**

Se al lado  $AB$ , tracemos un cuadrado que tenga por valor el lado. Se traza la mediatriz  $m$  del lado, el punto  $O'$  será el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrado, la cual corta a la mediatriz  $m$ , en el punto  $O$ , centro de la circunferencia en la que está inscrito el octógono.

**Octógono regular dado el lado. (Fig. 66).**

Sea el lado  $AB$ , tracemos un cuadrado que tenga por valor el lado dado, se traza la mediatriz  $m$  del lado. El punto  $O'$ , será el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrado, que corta a la mediatriz  $m$ , en el punto  $O$ , centro de la circunferencia en la que está inscrito el octógono.

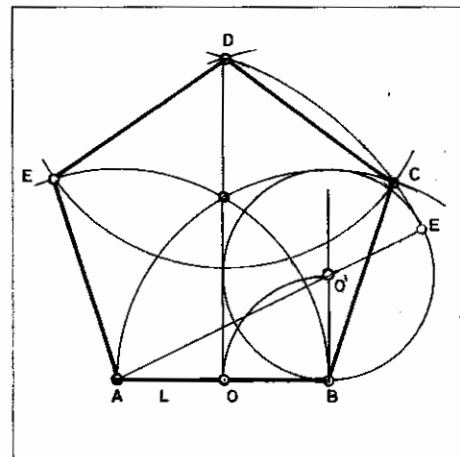


Fig.65

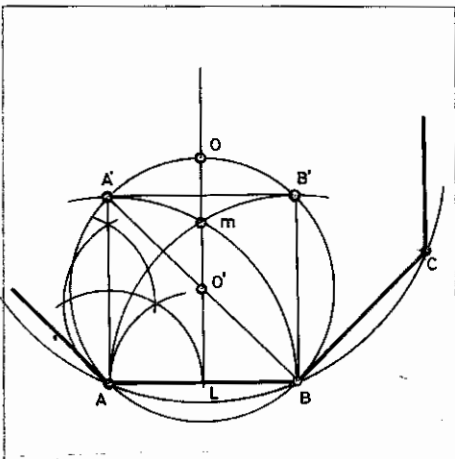


Fig.66

**Decágono regular dado el lado.** (Fig. 67).

Construimos un pentágono que tenga por valor el lado del decágono, el punto  $O$  será el centro de la circunferencia en la que está inscrito el decágono.

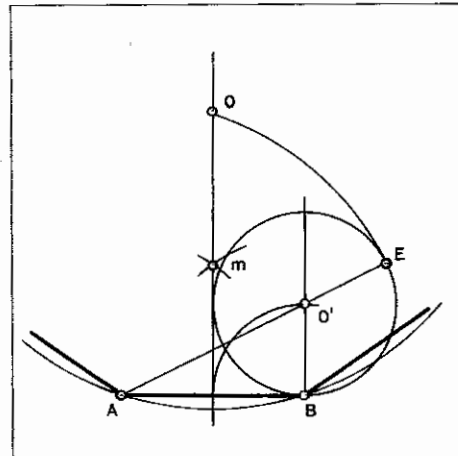


Fig.67

### 3.9. POLÍGONOS REGULARES. CONSTRUCCIONES APROXIMADAS. POLÍGONOS ESTRELLADOS.

**Heptágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita.** (Fig. 68).

Este procedimiento es aproximado y se basa en que el lado del heptágono es aproximadamente con error pequeño, a la mitad del lado del triángulo inscrito en la misma circunferencia.

Sea la circunferencia de diámetro  $AB$ , se traza la mediatriz del radio, y el segmento  $mn$ , será el lado aproximado del heptágono.

**Eneágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita.** (Fig. 69).

Su trazado es también aproximado, consideramos dos diámetros perpendiculares  $AB$  y  $ID$ , con centro en  $I$  y en  $D$ , trazamos dos arcos que corten a la circunferencia en  $m$  y  $n$ ; con centro nuevamente en  $I$  y  $D$ , trazamos otros dos arcos ahora con radio  $Dn$  y  $Im$ , que determinan el punto  $P$ , la circunferencia de radio  $PD = PI$ , cortará al

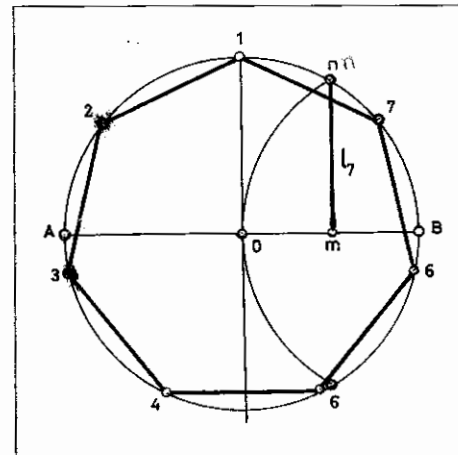


Fig.68

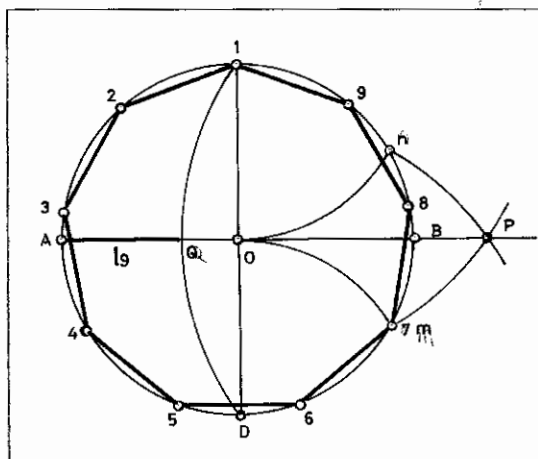


Fig.69

radio en el punto  $Q$ , la distancia  $AQ$ , será aproximadamente el lado del polígono buscado.

**Heptano regular dado el lado.** (Fig. 70).

La construcción es aproximada, se fundamenta en que el radio de la circunferencia circunscrita a un heptágono es aproximadamente igual a la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que un cateto es el lado, y tiene un ángulo contiguo de  $30^\circ$ .

Sea el lado  $AB$ , tracemos la mediatriz  $m$ , y construimos dos arcos  $An$  y  $Bn$ , con centros en  $A$  y  $B$ , dibujamos las bisectrices del ángulo  $nAB$ , la cual corta a la perpendicular en  $B$ , en el punto  $M$ , con centro en  $A$  y radio  $AM$ , trazamos un arco que corta a la mediatriz  $m$ , en el punto  $O$ , centro de la circunferencia en la que está inscrito el polígono.

**Eneágono regular dado el lado.** (Fig. 71).

Trazamos un triángulo equilátero  $ABC$  de lado 19, a continuación se traza la bisectriz del ángulo

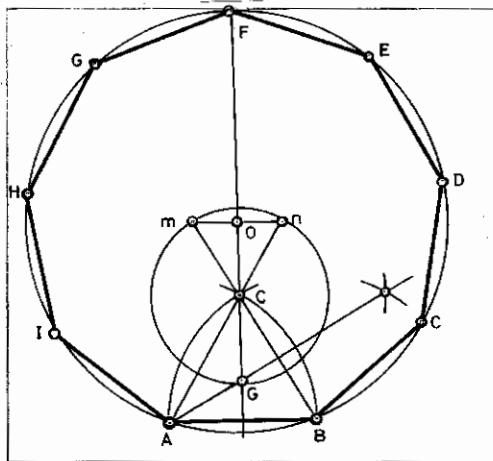


Fig. 71

Número de lados 9  
 Números enteros menores que la mitad 1,2,3,4.  
 Números primos con 9 de los anteriores 2,4.  
 Este último será el orden de unión de los eneágonos regulares.

Por tanto los estrellados serían de dos en dos, así como de cuatro en cuatro.

Uniéndolo de tres en tres tendríamos un falso estrellado, formado por tres triángulos girados entre sí  $360^\circ/9 = 40^\circ$

**Decágono estrellado.** (Fig. 72).

Por lo anteriormente expuesto tendríamos:

Número de lados 10  
 Números enteros menores que la mitad 1,2,3,4.  
 Números primos con 10 de los anteriores 3,4

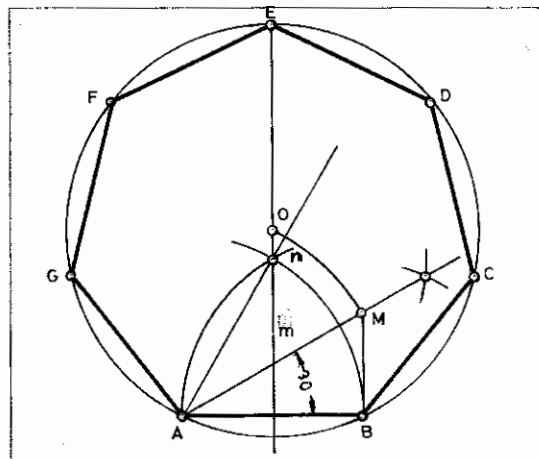


Fig. 70

que nos determinan sobre la mediatriz del segmento  $AB$  el punto  $G$ , haciendo centro en  $G$  y radio  $CG$ , trazamos una circunferencia que nos da sobre las prolongaciones de los lados, los puntos  $m$  y  $n$ , que unidos determinan el punto  $O$ , centro de la circunferencia en la que está inscrito el polígono.

**Orden de unión de un estrellado.** Basta tener en cuenta los números menores que la mitad de la cifra que indica el número de lados y que sean primos con ella. Así para el eneágono regular tendríamos:

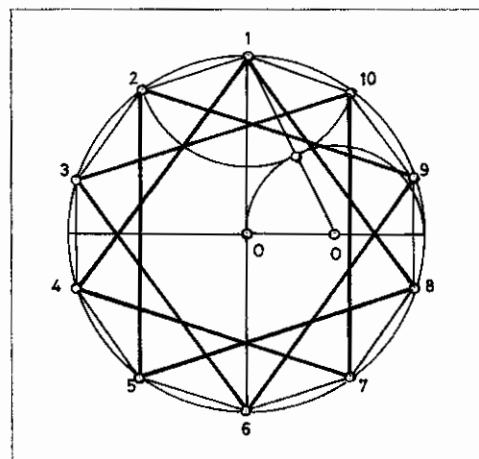


Fig. 72

Este último será el orden de unión de los decágonos regulares.

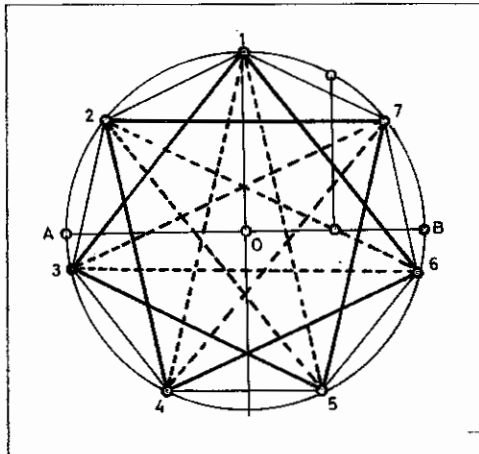


Fig. 73

**Heptágono estrellado.** (Fig. 73).

|                                        |        |
|----------------------------------------|--------|
| Número de lados                        | 7      |
| Números enteros menores que la mitad   | 1,2,3. |
| Números primos con 7 de los anteriores | 2,3    |

Este último será el orden de unión de los heptágonos regulares.

### 3.10. POLÍGONOS IRREGULARES.

### 3.11. DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

Para dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes, se puede emplear el procedimiento siguiente: ( Fig. 74)

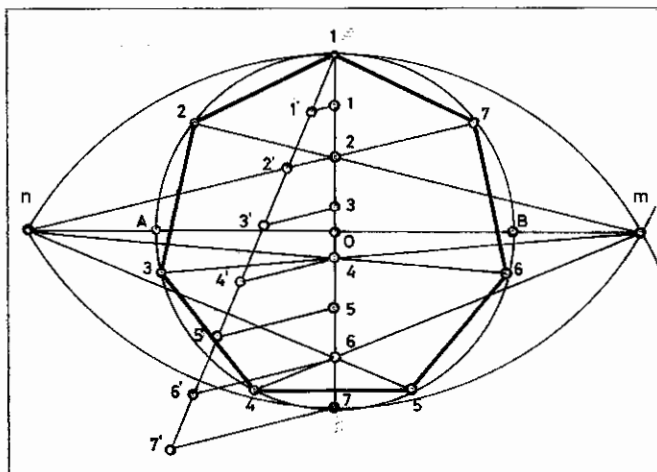


Fig. 74

Por ejemplo dividamos una circunferencia en siete lados: se divide el diámetro de la circunferencia en siete partes iguales, con centro en los extremos *A* y *B*, se trazan dos arcos que nos determinan los puntos *m* y *n*, si unimos *m* y *n* con las divisiones del diámetro alternadas, determinamos en la circunferencia los puntos del heptágono.

## **NÚCLEO TEMÁTICO II.- PROPORCIONALIDAD, ESCALAS Y TRANSFORMACIONES.**

### **OBJETIVOS DIDÁCTICOS**

Resolver problemas gráficos relacionados con la proporcionalidad directa y la semejanza.

Trabajar con distintas escalas.

Resolver problemas gráficos relacionados con la proporcionalidad inversa y la potencia.

### **PROCEDIMIENTOS**

Método gráfico de semejanza.

Construcción de escalas gráficas y volantes.

Procedimientos abreviados para resolver problemas de potencia a partir de circunferencias o rectas accesorias.

**Cuarta unidad.** Proporcionalidad y escalas: Conceptos fundamentales, elementos que definen una semejanza, determinación de la media proporcional, cuarta proporcional, construcción de escalas gráficas y volantes.

**Quinta unidad.** Potencia y eje radical.

**Sexta unidad:** transformaciones geométricas. traslaciones, giros, simetría, homotecia e inversión.

Se prestará especial atención al concepto de simetría. Se realizarán ejercicios consistentes en copias de figuras planas. Esta unidad debe de servir junto con la tres, para, averiguar si se cumple el primer objetivo.

## CUARTA UNIDAD. *Igualdad, Semejanza, Equivalenci, Proporcionalidad y Escalas.*

### **Contenido:**

Conceptos fundamentales  
Igualdad, semejanza y simetría.  
Determinación de la media proporcional  
Cuarta proporcional  
Equivalencia  
Construcción de escalas gráficas y volantes

### 4.1 IGUALDAD.

**Conceptos fundamentales.** Dos elementos son iguales, cuando tienen todos sus elementos iguales, es decir, tienen la misma forma y la misma magnitud.

Para construir un polígono igual a otro, existen distintos procedimientos, entre los que caben destacar los siguientes:

**Descomposición por triángulos:** (Fig.75). Sea el polígono *ABCDE*. Se toma un vértice y se trazan las diagonales *AC* y *AD*, construyéndolas aparte de forma ordenada. Ya que basta con construir los triángulos formados, en los que se conocen todos sus lados.

**Método de coordenadas.** (Fig. 76).

Se toma una recta cualquiera y se levantan las perpendiculares a ella por los vértices *A, B, C*, et. El resto del ejercicio puede obtenerse fácilmente.

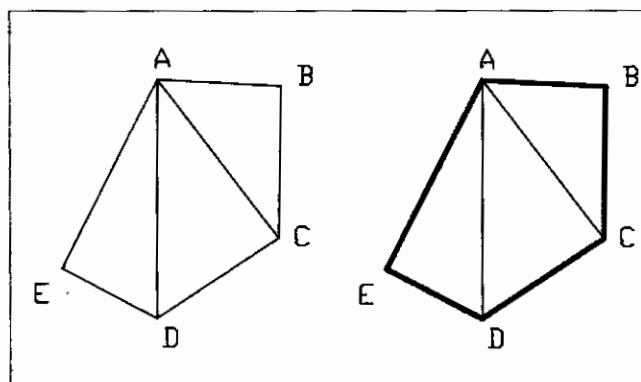


Fig.75

### 4.2. SEMEJANZA.

Dos figuras son semejantes, cuando teniendo el mismo número de lados, los ángulos formados por los mismos son iguales y las dimensiones de sus lados son proporcionales.

La razón existente entre dos figuras semejantes se llama, *razón de semejanza*.

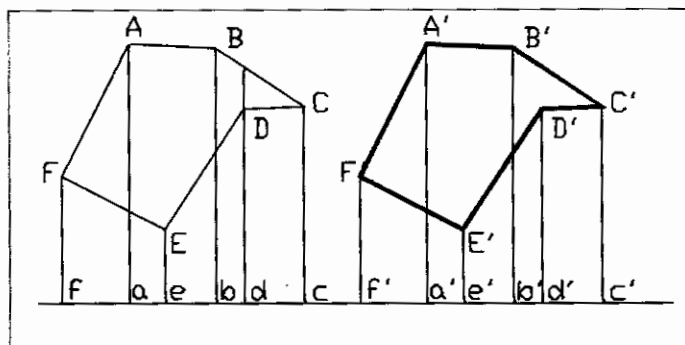


Fig. 76

#### 4.2.1 CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES.

Existen distintos métodos para obtener polígonos semejantes: Método copia de ángulos, por coordenada, por triangulación. Veamos este último.

*Construcción de un polígono semejante a otro, cuya relación sea  $1/2$ .* (Fig. 77).

Tomamos un cualquiera  $P$ , el cual unimos con los vértices del polígono dado  $A, B, C, D, E, F$ . Se toma el punto  $A'$  medio de  $PA$ , tal que  $PA' = PA/2$ , basta ir trazando paralelas a los lados del polígono dado.

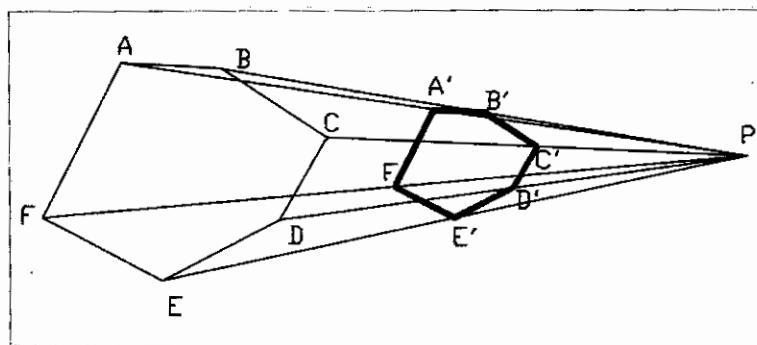


Fig. 77

**Simetría respecto a una recta:** El punto  $A$  es simétrico del  $B$  cuando ambos distan igual del eje y están en la misma perpendicular a él. El punto  $D$  también es simétrico del  $C$  y viceversa. A la recta se le llama eje de simetría. (Fig. 78).

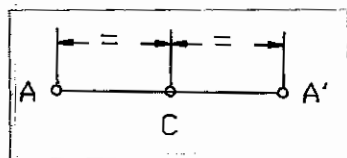


Fig. 78

**Proporcionalidad: Segmento medio proporcional de dos.**

Se llama segmento medio proporcional de dos dados, a otro segmento de longitud  $x$  igual a la raíz cuadrada del producto de  $a$   $x$   $b$ , de los dados. Se cumple pues la proporcionalidad continua:

$$x^2 = axb$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Este segmento media proporcional puede lograrse por tres procedimientos, los cuales los describimos a continuación:

**Primer procedimiento:** (Fig. 79).

Colocamos los dos segmentos  $a$  y  $b$ , uno a continuación del otro, trazamos la circunferencia de diámetro  $a + b$ , la perpendicular trazada por  $B$ , corta a la circunferencia en  $D$ . El segmento  $DB = X$  será la solución buscada.

Fácilmente se demuestra teniendo en cuenta que en un triángulo rectángulo  $ADC$ , la altura  $BD$ , es media proporcional entre los segmentos que dividen la hipotenusa.

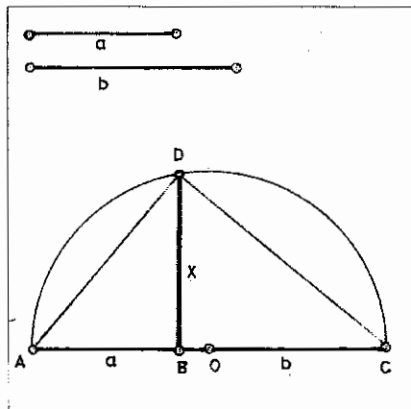


Fig. 79

**Segundo procedimiento.** ( Fig. 80).

Tracemos un segmento  $AB = a$ , y otro  $BN = b$ , trazamos a continuación la circunferencia de diámetro  $AB$ , y por  $N$  levantamos una perpendicular que cortará a la circunferencia en  $E$ . El segmento  $BE$ , es la media proporcional buscada  $x$ .

En el triángulo rectángulo  $ABE$ , un cateto  $BE = x$ , es media proporcional entre la hipotenusa  $a$  y la proyección de aquel sobre esta.

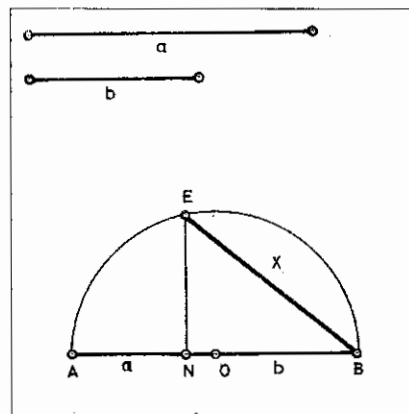


Fig. 80

**Segmento tercero proporcional de dos.**

( Fig. 81).

Se llama proporción continua, aquella los medios iguales: según esto, la tercera proporcional de dos segmentos es una proporción continua en la que se conoce el otro extremo

**Segmento cuarto proporcional de dos.** (Fig. 82).

Partimos de una proporción discontinua  $a / d = c / x$ , se dice que uno de ellos, por ejemplo el  $x$ , es el cuarto proporcional de los otros tres.

Se resolverá de forma idéntica al anterior, teniendo en cuenta que los medios son diferentes.

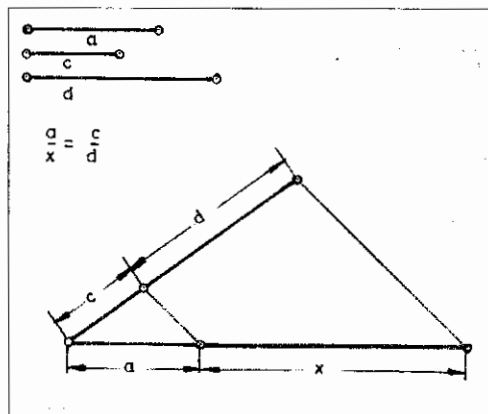


Fig. 82

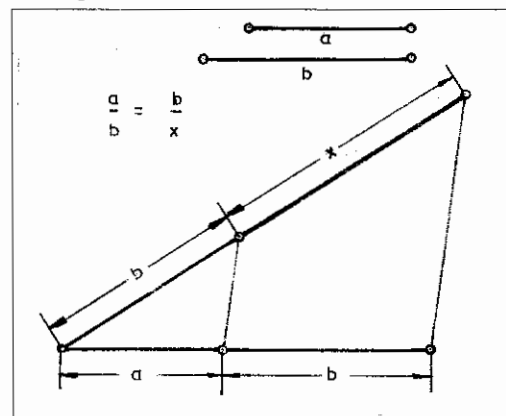


Fig. 81

### 4.3 EQUIVALENCIA.

Se dice que dos figuras son equivalentes cuando sus superficies son iguales, aunque presenten formas diferentes.

**Rectángulo equivalente a un triángulo.** ( Fig 83).

Para su construcción basta tener en cuenta que la altura del triángulo es el doble de uno de los lados del rectángulo.  $h = 2b$ .

Sea el rectángulo ABCD, se traza la mediatriz del lado a, que corta a la mediatriz en el punto p, haciendo centro en p y con radio p a se traza un arco, que determina el punto E tercer vértice del triángulo.

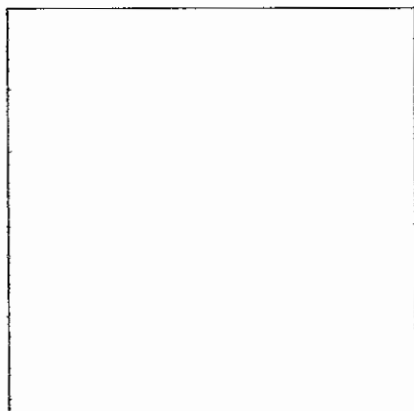


Fig.83

**Cuadrado equivalente a un triángulo.** ( Fig.84).

Sea la superficie del cuadrado igual a  $S=x^2$  y la superficie del triángulo

$S=\frac{C \cdot h}{2}$  igualando ambas expresiones tendremos:

$$S=Cx\frac{h}{2}$$

de donde se deduce que el lado del cuadrado es media proporcional entre el lado del triángulo y la mitad de la altura.

De acuerdo con ello llevamos sobre una recta el lado  $c$  del triángulo dando los puntos  $AB$ , sobre  $B$  restamos la mitad de la altura del triángulo, que nos determina el punto  $h$ , trazamos la mediatriz del segmento  $AB$ , que nos da el punto  $O$ , haciendo centro en  $O$ , trazamos la circunferencia que pase por los extremos  $AB$ , la perpendicular trazada por  $h$  no determina el lado del cuadrado

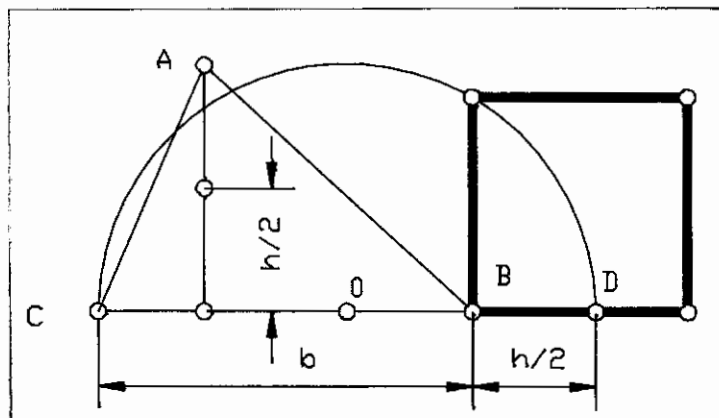


Fig.84

**Cuadrado equivalente a un rectángulo.** (Fig 85).

Sea el rectángulo dado por sus vértices  $A, B, C, D$ , y lado  $a, b$  prolongamos el lado  $a$ , y sobre el llevamos el lado  $b$ . Con centro en  $a$ , y radio  $d, c$ , trazamos el arco  $2A$ .

Con centro en  $O$ , punto medio de  $AB'$ , trazamos una semicircunferencia de radio  $OB'$ .

Por el punto  $a$  levantamos una perpendicular que corte en  $L$  a la semicircunferencia. El segmento  $BL$  será el lado buscado.

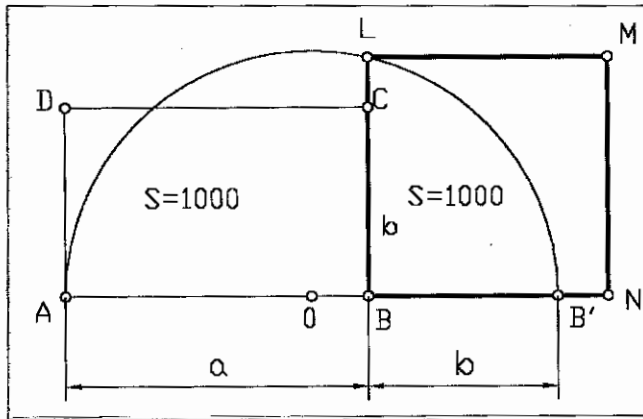


Fig85

#### Triángulo equivalente a un pentágono. (Fig. 86)

Transformamos el número de lados de forma que el pentágono quede reducido a un cuadrilátero y este a su vez a un triángulo, seguidamente operamos de la misma forma que en la fig. 84.

Unimos el punto *D* con los puntos *A* y *B*, y por los puntos *E* y *C* trazamos rectas paralelas a las rectas *DA* y *DB*, respectivamente. Estas rectas cortan a las prolongaciones del segmento *AB* en los

puntos *1* y *2*. Al unir los puntos *1* y *2* con *D*, obtenemos un triángulo equivalente al pentágono.

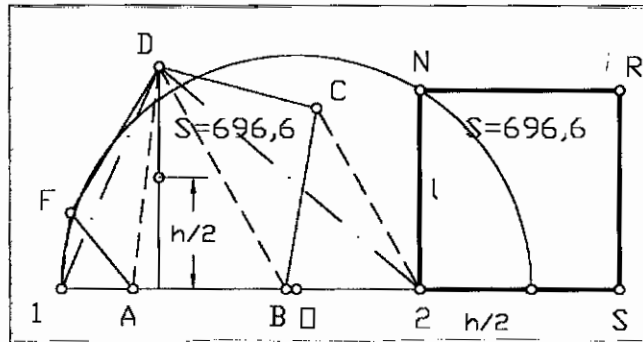


Fig86

### 4.4. CONSTRUCCIÓN DE ESCALAS GRÁFICAS Y VOLANTES.

#### Escalas gráficas. Idea general.

Cuando hay que reproducir un dibujo con unas dimensiones diferentes a las originales, utilizamos las escalas. Siempre que utilicemos una escala debemos de conservar la semejanza entre original y representación.

Una escala la podemos definir como *la relación de dimensiones existente entre el dibujo que realizamos de un objeto y el original correspondiente.*

La escala se representa en forma de fracción, siendo el numerador el número de partes adoptadas con relación al denominador; así, la escala 1:5, indica que de cinco unidades de la realidad tomamos una para el dibujo.

#### Clases de escalas.

Podemos considerar tres grupos de escalas: *natural, de reducción y de ampliación.*

Aunque con fines puramente teóricos trabajaremos con cualquier escala, en el dibujo de planos o piezas industriales, las escalas están normalizadas, estas son principalmente las siguientes.

- A) Escala natural 1:1
- B) Escala de reducción; 1:2,5, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500
- C) Escala de ampliación; 2:1, 5:1, 10:1.

**Escalas de triángulo universal.** (Fig.87)

Es de gran utilidad para relaciones muy próximas a la natural o múltiplos de ella. Presenta contraescala para la apreciación de las décimas, y permite en la misma figura conseguir un elevado número de relaciones.

Tomamos un segmento  $AB = AC = CB = 10\text{ cm}$ . Se divide  $AB$  y  $BC$  en 10 partes iguales de 1 cm. Las paralelas a  $AB$  por las referidas divisiones nos determinan las escalas.

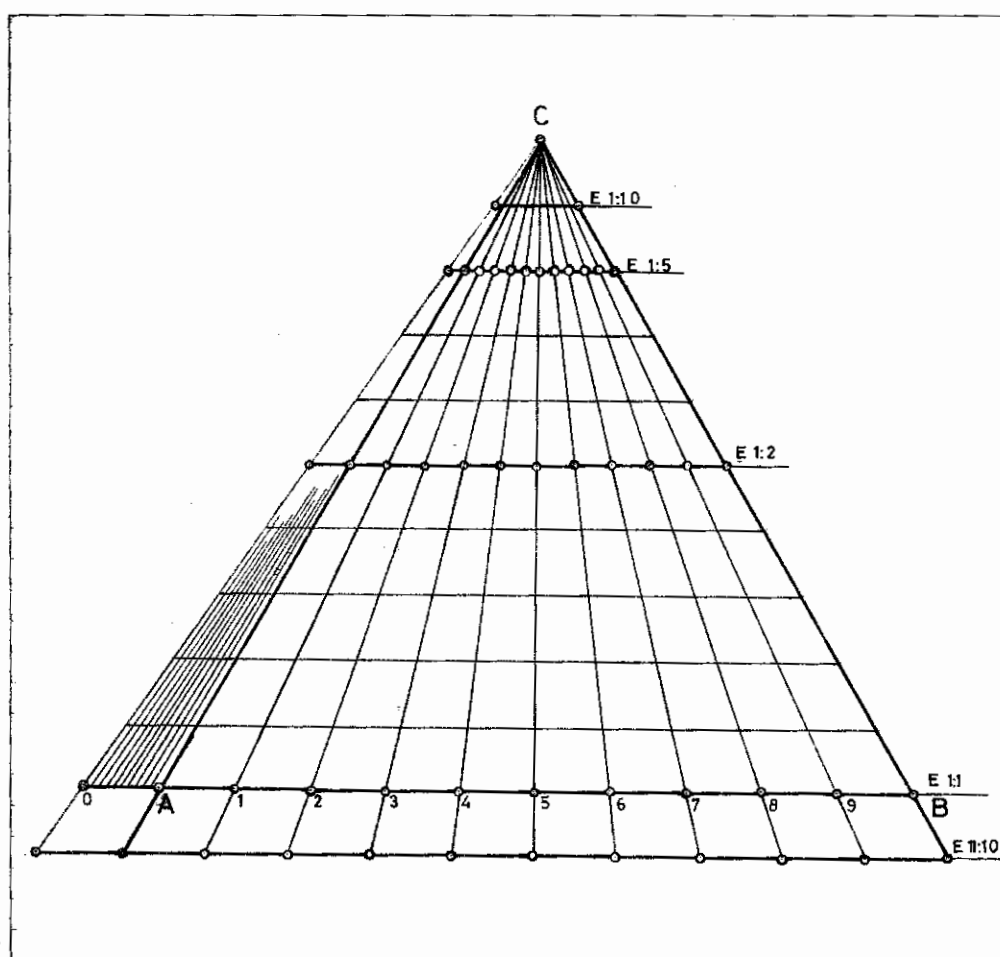


Fig.87

**Escalillas numérico gráficas.** (Fig. 88).

Se consiguen por un cálculo numérico previo. Sea por ejemplo la escala 1:40, quiere decir que una unidad en el dibujo corresponden 40 en la realidad.

Si queremos construir dicha escala tendremos que realizar una simple regla de tres, para

ello vamos a graduar 100 cm., diremos; si 1 cm. en el dibujo son 40 cm. reales, para graduar 100 cm., reales cuantos tendremos que tomar en el dibujo, es decir  $100/40 = 2,5$  cm., es decir 100 cm. reales en el dibujo vendrán representados por 2,5 cm. Para construir la escala trazamos una recta y sobre ella llevamos unidades de 2,5 cm = 1m. A la izquierda del 0 se toma una unidad de contraescala que al dividirla en 10 partes, nos permite apreciar las décimas de la unidad de medida.

En la figura 88, también hemos representado la escala 1:50.

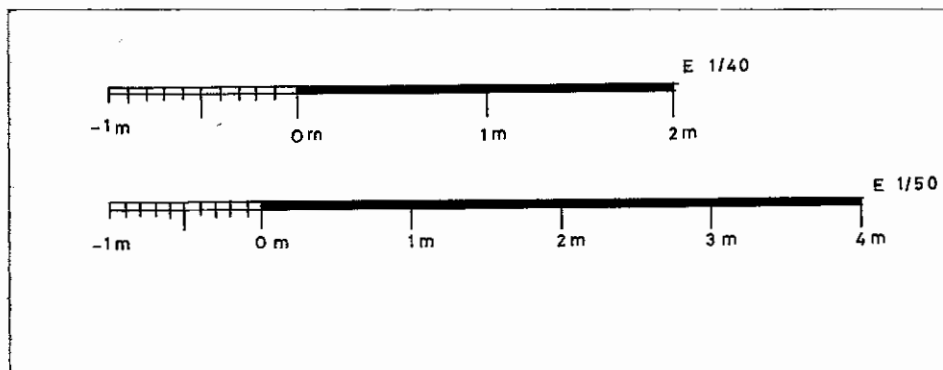


Fig.88

## QUINTA UNIDAD. *Potencia. Eje radical*

### Contenido:

Potencia

Eje radical.

### 5.1.- *Potencia de un punto respecto a una circunferencia.* Fig.89.

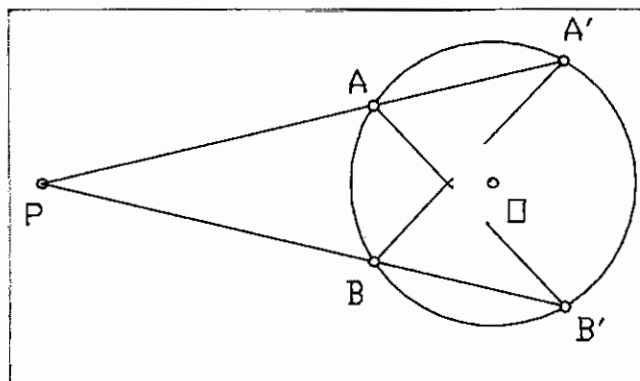


Fig.89

Sea la circunferencia de centro  $O$ , y un punto exterior a ella  $P$ , trazados dos secantes arbitrarias  $PAA'$  y  $PBB'$ , a la circunferencia dada, en ella se verifica que :  $PA \times PA' = PB \times PB'$ . De acuerdo con ello resulta que si una secante variable pasa por un punto fijo  $P$ , el producto de  $PA \times PA'$ , tiene un valor constante, cualquiera que sea la posición de la secante, este valor constante se llama **potencia del punto respecto a la circunferencia**.

De acuerdo con la fig. 89, fácilmente se demuestra que

$$(PT)^2 = PB \times PB'$$

### 5.2.- *Eje radical.*

Todos los puntos de la recta que unen los puntos de intersección de dos circunferencias tienen igual potencia respecto a las dos circunferencias.

### 5.3.-*Eje radical de dos circunferencias que se cortan.* (Fig.90).

Sean las circunferencias de centro  $O$  y  $O'$ , se unen los puntos en donde se cortan ambas circunferencias  $AA'$ , que será el eje radical. Como puede observarse dicho eje radical es

perpendicular a la recta que une los centros de ambas circunferencias.

**5.4.- Eje radical de dos circunferencias que se cortan en un punto.** (Fig.91).

El eje radical será perpendicular a la recta que une los centros de ambas circunferencias en el punto de tangencia.

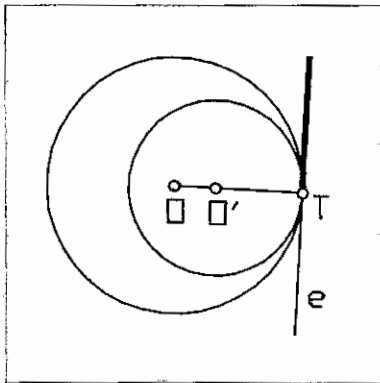


Fig.91

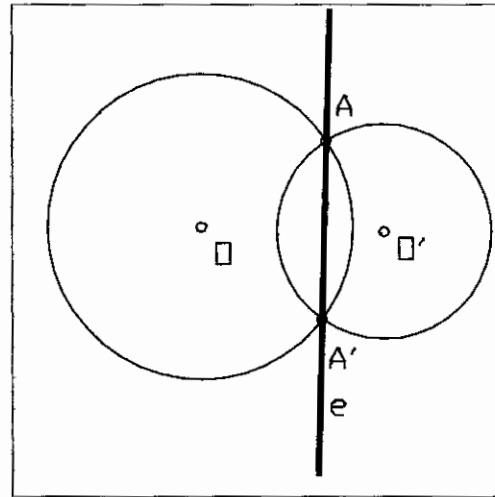


Fig.90

## SEXTA UNIDAD. Transformaciones geométricas. Translaciones, giros, simetría, homotecia e inversión.

### Contenido:

Translaciones  
Giros  
Simetría  
Homotecia  
Inversión

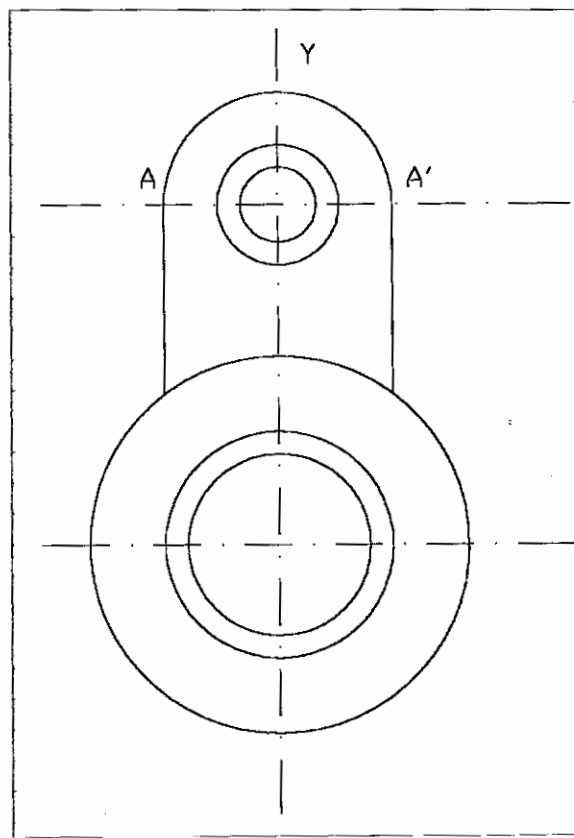


Fig.92

### 6.1. SIMETRÍA.

Se dice que dos puntos A y A' son simétricos respecto a un punto C, llamado centro de simetría, cuando están en línea recta con el y equidistan de dicho centro. (Fig.92)

### 6.2. Homotecia. (Fig.93).

Se dice que los puntos A, B y C de un triángulo son homólogos de los A', B' y C', cuando cumplen las siguientes condiciones:

1º) Están en línea recta con un punto D, fijo llamado centro de homología (A', A y D) (B', B y D).

2º) Que las rectas homólogas, por ejemplo AB y A'B', se corten en puntos de una recta fija llamada eje de homología.

**Ejemplo:** Dada una figura cualquiera, el centro de homología D, y dos puntos homólogos AA', hallar la figura homóloga del

triángulo dado. (Fig. 94).

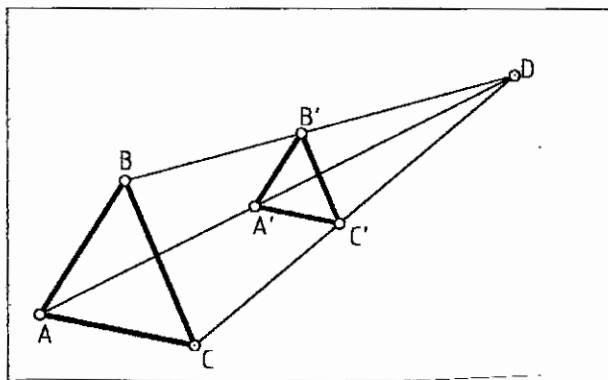


Fig. 93

### 6.3. Inversión.

Se dice que dos puntos son inversos cuando cumplen las siguientes condiciones:

- 1º) Estar en línea recta con otro punto C, fijo, llamado centro de inversión.
- 2º) Que el producto de las distancias de los puntos al centro de inversión sea una cantidad constante llamada potencia de inversión Q. (Fig. 95).

$$CA \times CB = Q$$

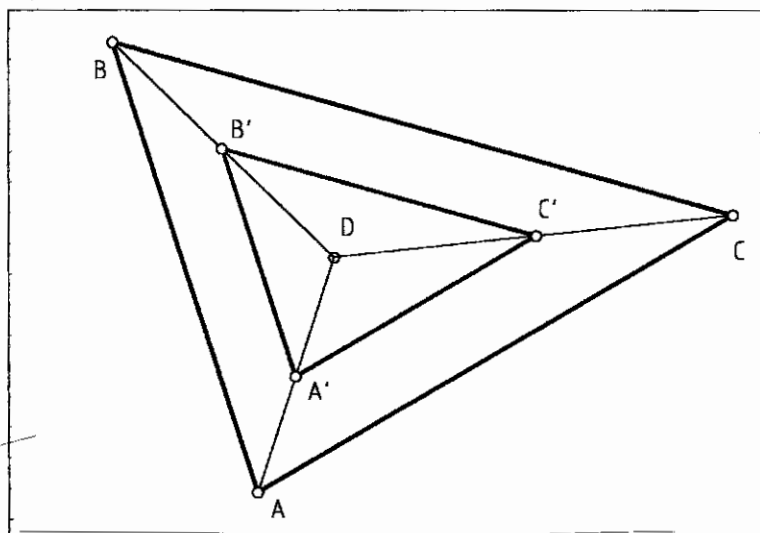


Fig. 94

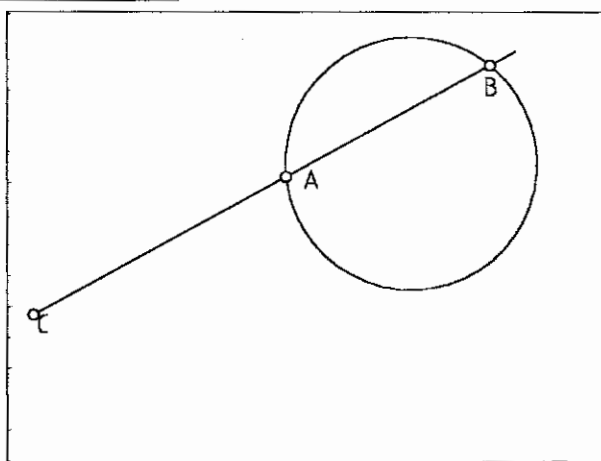


Fig. 95

### **NÚCLEO TEMÁTICO III.- TANGENCIAS Y CÓNICAS**

#### **OBJETIVOS DIDÁCTICOS**

Realizar las construcciones básicas de tangencias entre rectas y circunferencias y entre circunferencias, situando los correspondientes puntos de tangencia.

Realizar con corrección los enlaces correspondientes.

Aplicar el procedimiento gráfico de sumar y restar datos.

Analizar y ordenar todos los casos de tangencias estudiados, para posteriores aplicaciones.

Conocer las propiedades de las tangentes.

#### **CONTENIDOS**

Definición y propiedades de la tangencia entre rectas y circunferencias y entre circunferencias.

Puntos de tangencia.

Rectas tangentes a la circunferencia y tangentes a dos circunferencias.

Circunferencias tangentes entre sí. Circunferencias tangentes a rectas y a circunferencias dadas.

#### **PROCEDIMIENTOS**

Método de los lugares geométricos.

Procedimiento gráfico de suma y resta de datos.

Realización de empalmes.

**Unidad siete.** Tangencias: rectas y circunferencias, entre dos y más circunferencias, enlaces, óvalos y ovoides.

Al llegar a esta parte el alumno debe de haber adquirido los hábitos de limpieza y estética en la presentación de trabajos. Se puede enlazar la unidad con un tema relacionado, como puede ser la mecánica o la automoción, por medio de ejercicios tales como, trazado de una biela o correa de transmisión.

**Unidad ocho.** Cónicas: Elipse, parábola, hipérbola.

#### **OBJETIVOS DIDÁCTICOS**

Dibujar curvas cónicas, mecánicas y técnicas, distinguiendo el origen y las características de cada una.

Conocer y aplicar las propiedades de las curvas cónicas y de su rectas tangentes.

## **CONTENIDOS**

### **CONCEPTOS**

Concepto de cónica, elipse, parábola e hipérbola. Aplicaciones.

Realización de empalmes. Definición gráfica de los puntos de tangencia entre recta y cónica.

### **PROCEDIMIENTOS**

Método gráfico de aplicación de teoremas, definiciones y propiedades.

Realización de empalmes. Definición de puntos de tangencia entre recta y cónica.

Esta unidad ha de relacionarse con la geometría descriptiva, en lo referente a la elipse. Debe servir para la valoración del cuarto criterio de evaluación.

## **SÉPTIMA UNIDAD. *Tangencias entre rectas y circunferencias, entre dos y mas circunferencias, enlaces, ovalos y ovoides.***

### ***Contenido:***

Rectas y circunferencias  
Entre dos o mas circunferencias  
Enlaces  
Ovalos y ovoides  
Inversión

### **7.1. GENERALIDADES**

Se dice que una recta o circunferencia son tangentes a otra circunferencia, cuando la recta o la circunferencia se cortan en un solo punto. Si la recta o la circunferencia cortan a la otra circunferencia en dos puntos, se dice que son secantes, y si no la corta en ningún punto la recta es exterior. ( Fig. 95.bis)

Podemos afirmar que las tangencias es quizas el problema geométrico más importante que se nos puede presentar al construir una determinada pieza.

Los problemas que se nos pueden presentar, los podemos agrupar de la forma siguiente:

- a) Rectas tangentes a circunferencias.
- b) Circunferencias tangentes a rectas.
- c) Circunferencias tangentes a circunferencias.
- d) Circunferencias tangentes a rectas y a circunferencias.

En todos estos problemas se debe tener en cuenta del número de datos o condiciones para poder determinar un problema.

Respecto al número de datos diremos, que cuando la solución sea una circunferencia necesitaremos tres datos para resolver el problema, y cuando sea una recta, dos datos. Una condición puede suplir a un dato. El número de soluciones puede oscilar entre cero y ocho.

Los procedimientos más usuales de resolución son: lugares geométricos, potencia de un

punto respecto a una circunferencia, homotecia, inversión y dilataciones.

## 7.2. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A RECTAS.

**Circunferencia tangente a una recta en un punto de ella y que pase por un punto exterior.** (Fig. 96).

Sea la recta  $r$  y un punto de la recta  $P$ , y el punto exterior  $Q$ . El centro de la circunferencia estará en la perpendicular a la recta por  $P$ , por otro lado para que una circunferencia pase por  $P$  y  $Q$  su centro debe de estar en la mediatriz de los dos puntos, por lo tanto el punto donde se corten la perpendicular y la mediatriz será el centro de la solución.

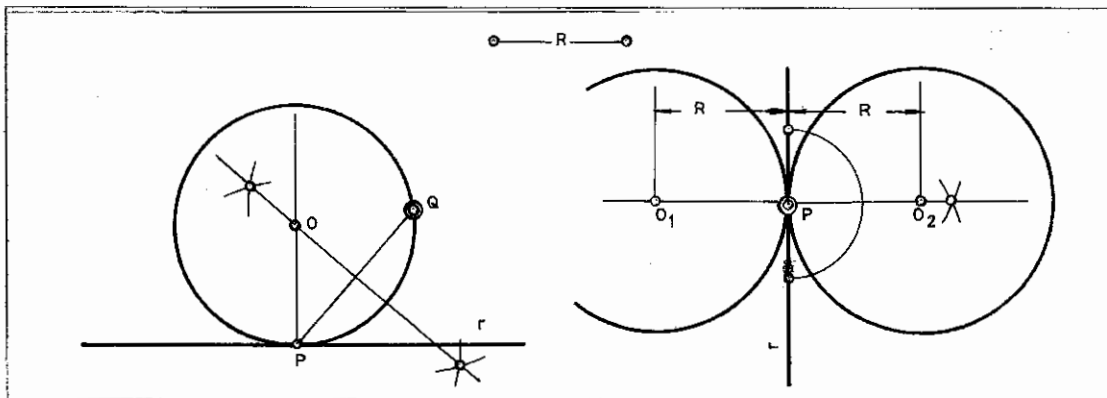


Fig.96-97

**Circunferencia tangente a una recta en un punto de ella conocido el radio de la solución.** (Fig.97)

Sea la recta  $r$ ,  $P$  el punto de tangencia y  $R$  el radio de las soluciones. El problema puede presentar dos soluciones.

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta  $r$  en un punto de ella, es la perpendicular a aquella en este punto. Las intersecciones de esta perpendicular con la circunferencia radio  $R$ , fijarán los centros  $O_1$  y  $O_2$ .

**Circunferencia tangente a una recta que pase por un punto exterior conocido el radio de las soluciones.** (Fig.98).

Los centros de las soluciones se encontrarán en la circunferencia de centro  $P$  y radio  $R$ , y además en la paralela que diste  $R$  de la recta dada  $r$ , los puntos de corte  $O_1$  y  $O_2$ , serán los centros de las soluciones. El número de estas será de dos.

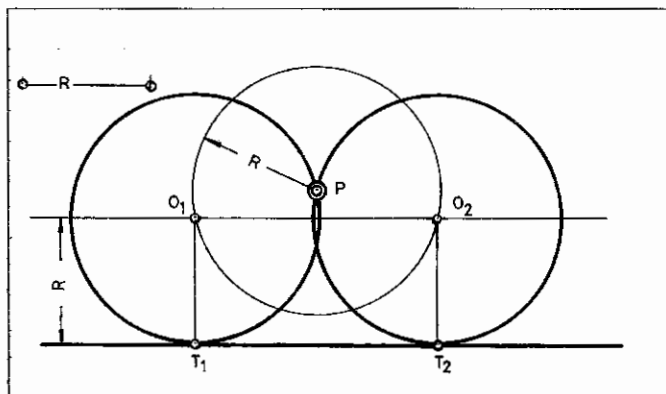


Fig. 98

tendremos la solución.

### 7.3 RECTAS TANGENTES CIRCUNFERENCIAS.

**Recta tangente a una circunferencia en un punto de ella.** (Fig. 99).

Sea la circunferencia de centro  $O$  y  $P$  el punto de tangencia. La tangente será perpendicular a la recta que une  $P$  con el centro de la circunferencia es decir el radio. Por lo tanto basta trazar la perpendicular a  $r$  por  $P$ , y

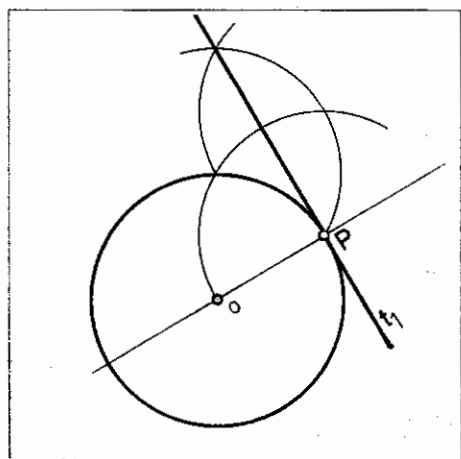


Fig. 99

**Rectas tangentes a una circunferencia paralela a una dirección dada.** (Fig. 100).

La perpendicular  $d$  trazada a la dirección  $d$  que pase por el centro de la circunferencia cortará a esta en los puntos  $a$  y  $b$ , que serán los de tangencia. El problema queda reducido al anterior.

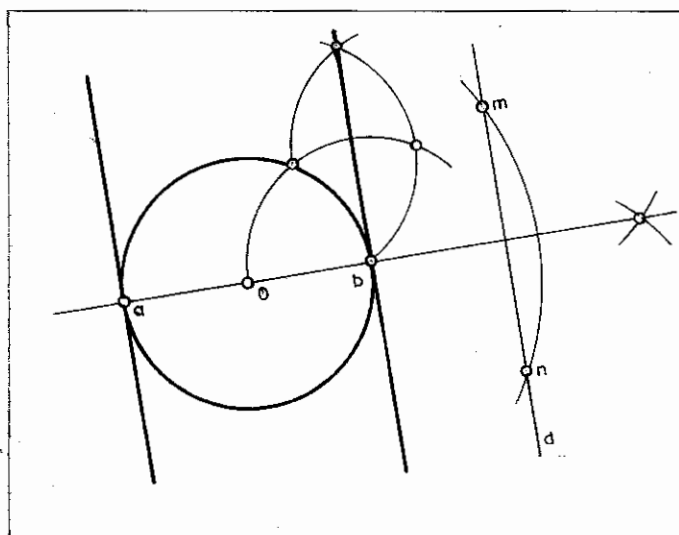


Fig. 100

**Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior (cuatro soluciones).** (Fig. 101).

Como el lugar geométrico de las cuerdas interceptadas en una circunferencia y que pasen por un punto es otra circunferencia de diámetro la distancia del centro al punto, la que tiene de diámetro  $OP$ , cortará a la dada en los puntos de contacto  $T_1$  y  $T_2$ , siendo  $t_1$  y  $t_2$  las soluciones buscadas.

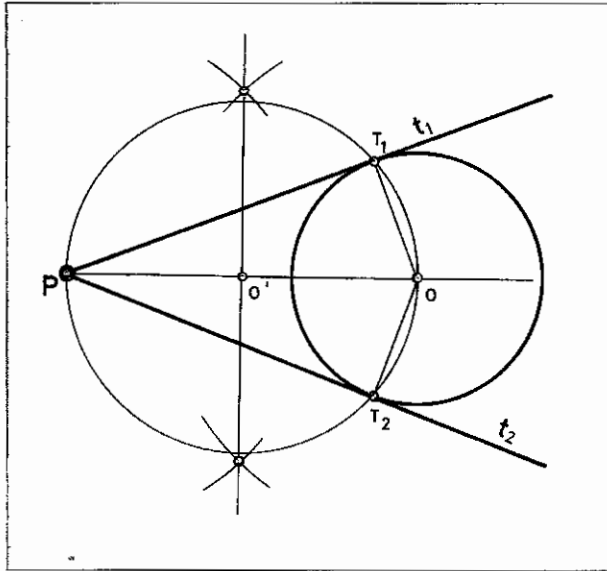


Fig. 101

**Tercer procedimiento.** (Fig. 103).

La circunferencia de centro  $O$  y de radio  $OP$ , cortará a la recta tangente en los puntos  $a$  y  $b$ , que unidos con  $O$ , interceptarán en los puntos  $T_1$  y  $T_2$  de tangencia.

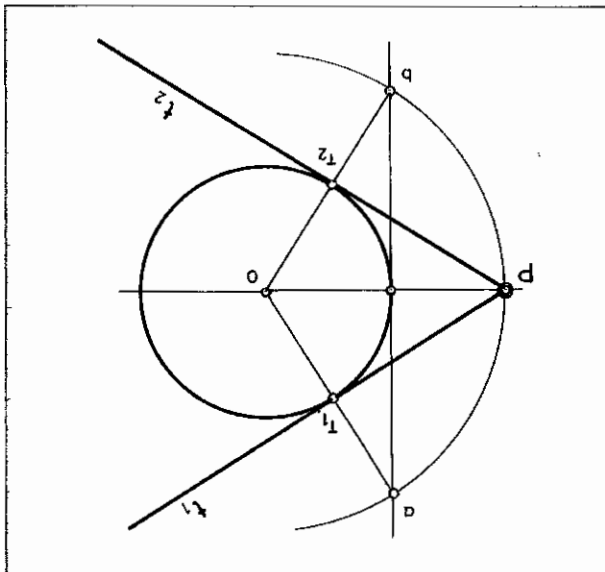


Fig. 103

**Segundo procedimiento.** (Fig. 102)

Tendremos en cuenta que todo radio perpendicular a una cuerda corta a esta en su punto medio. La circunferencia concéntrica con la dada y de radio doble cortará a centro  $P$  y de radio  $PO$  en los puntos  $a$  y  $b$ , que unidos con  $O$ , interceptarán a los puntos  $T_1$  y  $T_2$  de tangencia.

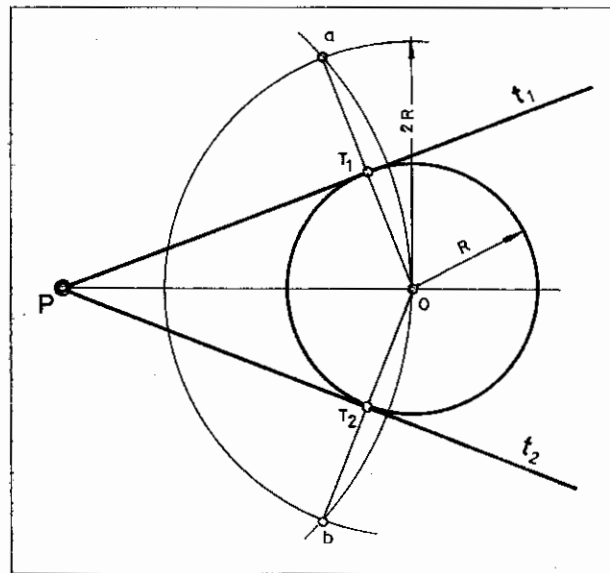


Fig. 102

**Cuarto procedimiento.** (Fig. 104).

El problema se determina por la recta polar, es decir la que une los puntos de contacto y resulta ortogonal con  $OP$ . Bastará trazar dos secantes a la circunferencia que pasen por  $P$ . La unión de su puntos de contacto permitirá determinar  $A$  y  $B$  de dicha polar la cual cortará a la circunferencia en los puntos  $T_1$  y  $T_2$  de tangencia.

#### 7.4. RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS.

**Rectas tangentes comunes exteriores a dos circunferencias.** ( Fig.105).

Restamos a las dos circunferencias el radio de la menor es decir  $R-r$ , y  $r-r$ , la circunferencia menor quedará reducida a un punto, el problema queda reducido a trazar tangentes a una circunferencia de radio  $R-r$  desde un punto exterior  $O'$ , una vez resuelto este problema tendremos los puntos de tangencia  $a$  y  $b$ , que unidos con  $O$ , nos darán los puntos  $T1$  y

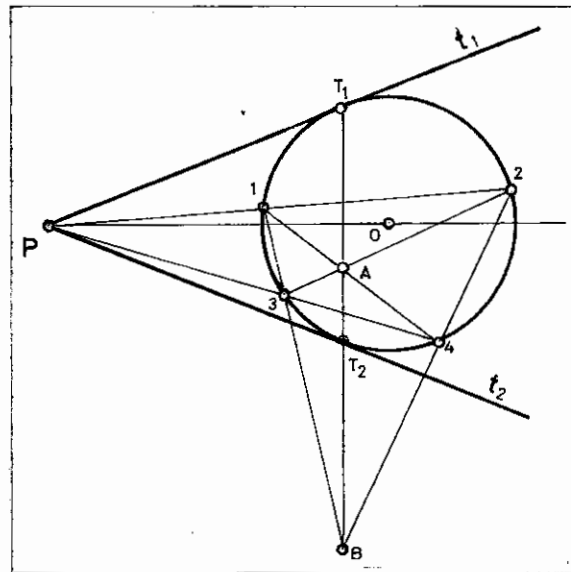


Fig.104

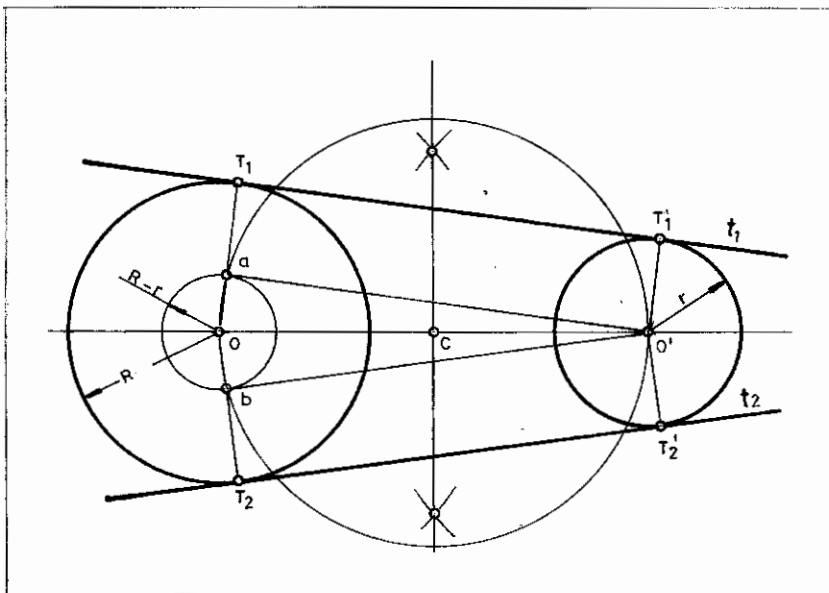


Fig.105

$T2$  de tangencia. Los puntos  $T'1$  y  $T'2$ , se obtienen por paralelismo. Se puede observar en la figura que la recta  $O'a$  es paralela a  $t1$  y se encuentra a la distancia  $r$ , radio de la menor circunferencia.



cortarán en los puntos  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ , centros de las soluciones. Los puntos de tangencia se obtienen trazando las perpendiculares a las rectas por los centros.

## 7.6 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS.

*Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el radio de las soluciones.* (Fig.109).

Este problema puede tener ocho soluciones como máximo. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio dado tangentes a otra, son dos circunferencias concéntricas con las dadas y cuyos radios son la suma o diferencia del radio dado y el de las circunferencias. Las circunferencias de radio  $R+r$  y  $R-r$ ,  $r+r'$  y  $r-r'$ , se cortarán en una serie de puntos que son los

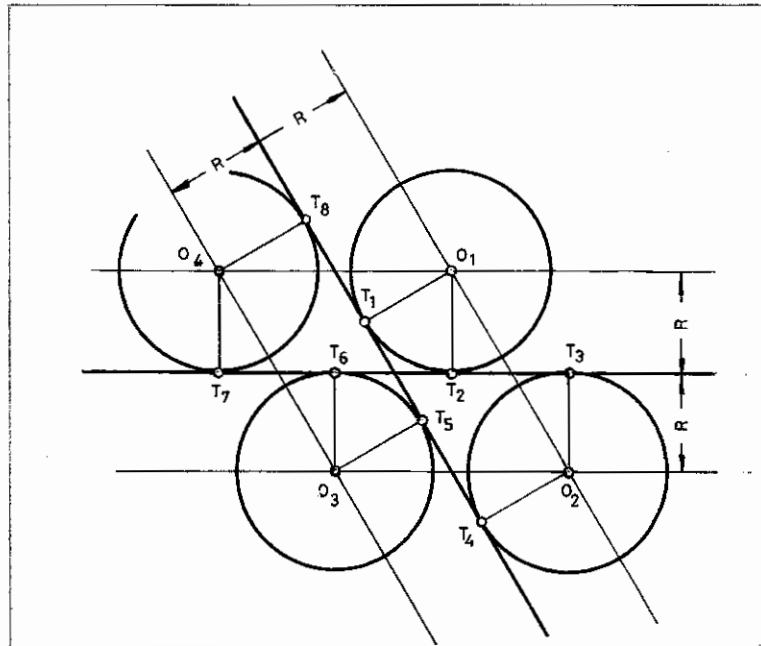


Fig.108

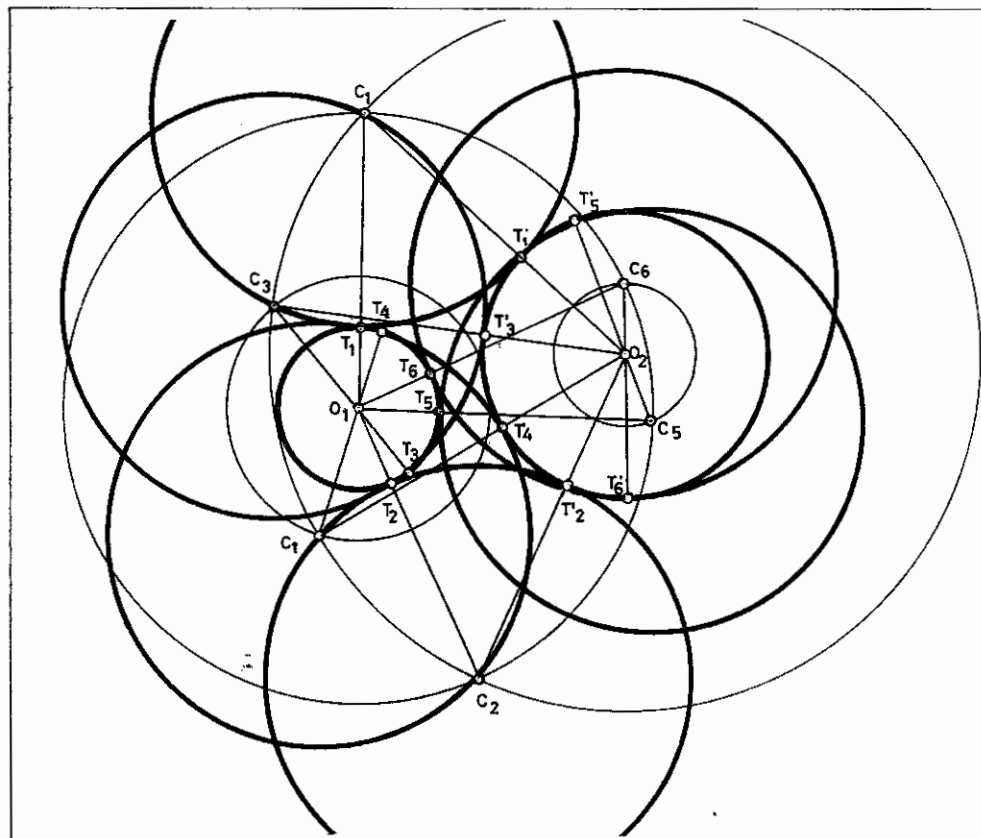


Fig.109

centros de las soluciones. El número de soluciones puede disminuir hasta anularse, así como depende de las distancias entre los centros de las soluciones.



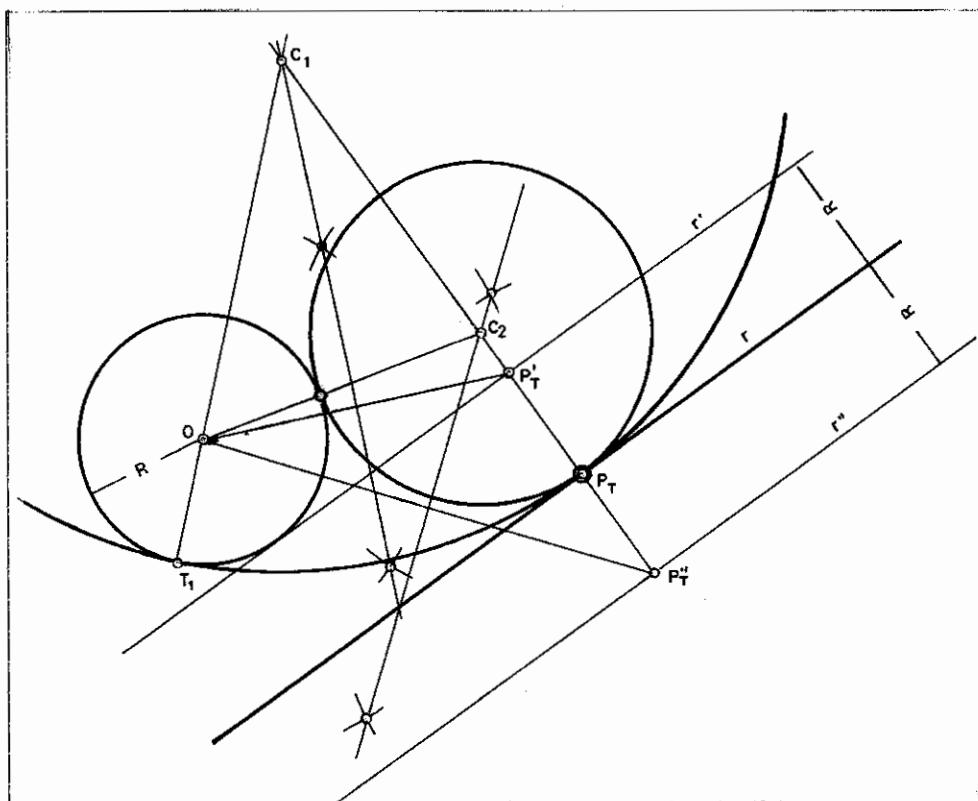


Fig.111

**Circunferencia tangente a una circunferencia y a una recta dado el punto de tangencia sobre la circunferencia. (Fig.112)**

Sea la recta  $r$  y la circunferencia de centro  $O$ . Este ejercicio es idéntico al anterior y tiene dos soluciones.

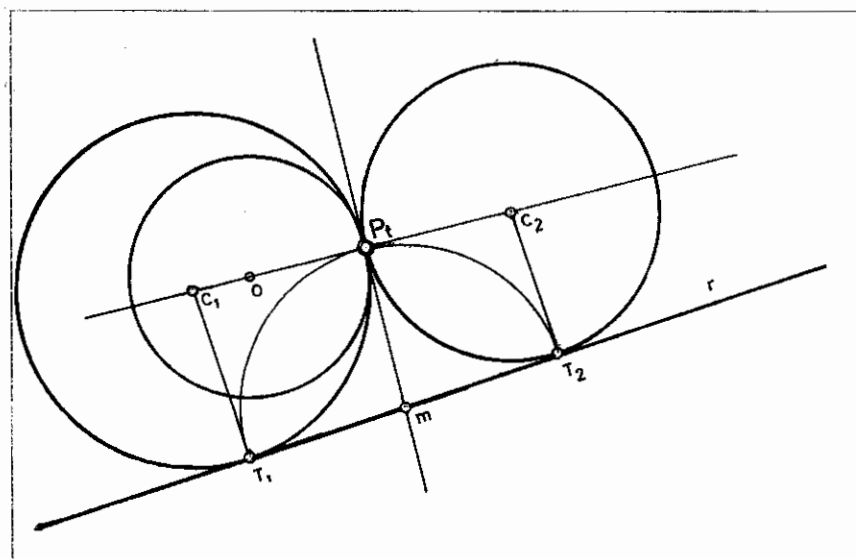


Fig 112

La tangente a la circunferencia en el punto  $P_t$  cortará a la dada en el punto  $M$ , la bisectriz de los ángulos formados cortará a la recta  $P_t-O$  en los puntos  $C_1$  y  $C_2$  centros de las soluciones.

### **Circunferencia tangente a una circunferencia y a una recta dado el radio de las soluciones. (Fig.113)**

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la dada y de radio  $R$ , serán las circunferencias concéntricas con la dada de radio  $R+r$  y  $R-r$ . Por otro lado el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio  $R$ , tangentes a la recta  $r$  son dos rectas  $r'$  y  $r''$  paralelas a la dada y distantes  $R$  (radio de las soluciones). Los puntos de intersección de estos lugares geométricos serán los centros de las soluciones buscadas. Según el número de cortes producidos por las circunferencias  $R+r$  y  $R-r$  en  $r'$  y  $r''$ , el número de soluciones estará comprendido entre 0 y ocho.

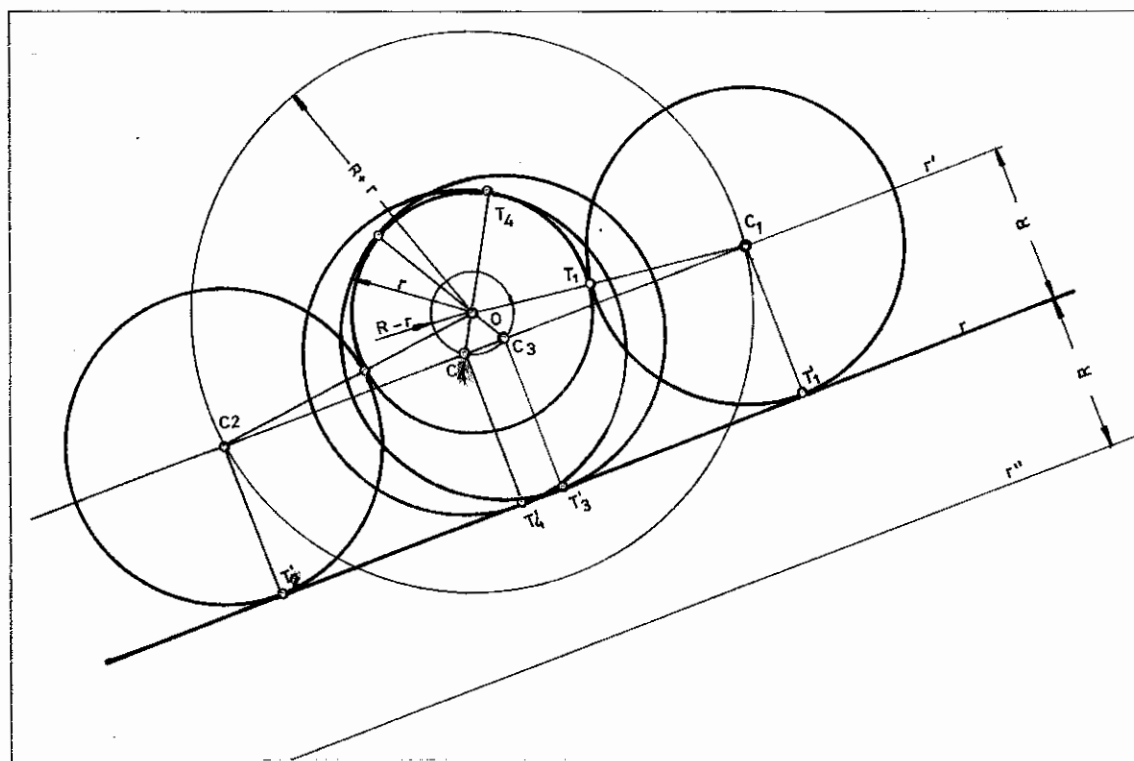


Fig.113

### **7.8 CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A TRES RECTAS. (Fig.114).**

Sean las rectas  $r, s, t$ , al cortarse determinan un triángulo, y ello reducirá el problema a trazar las circunferencias inscritas y esencritas a dicho triángulo. Para lograr esto solo habrá que dibujar las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas dadas y buscar su puntos de intersección  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ , centros de las soluciones. Si las tres son paralelas el número de soluciones es cero.

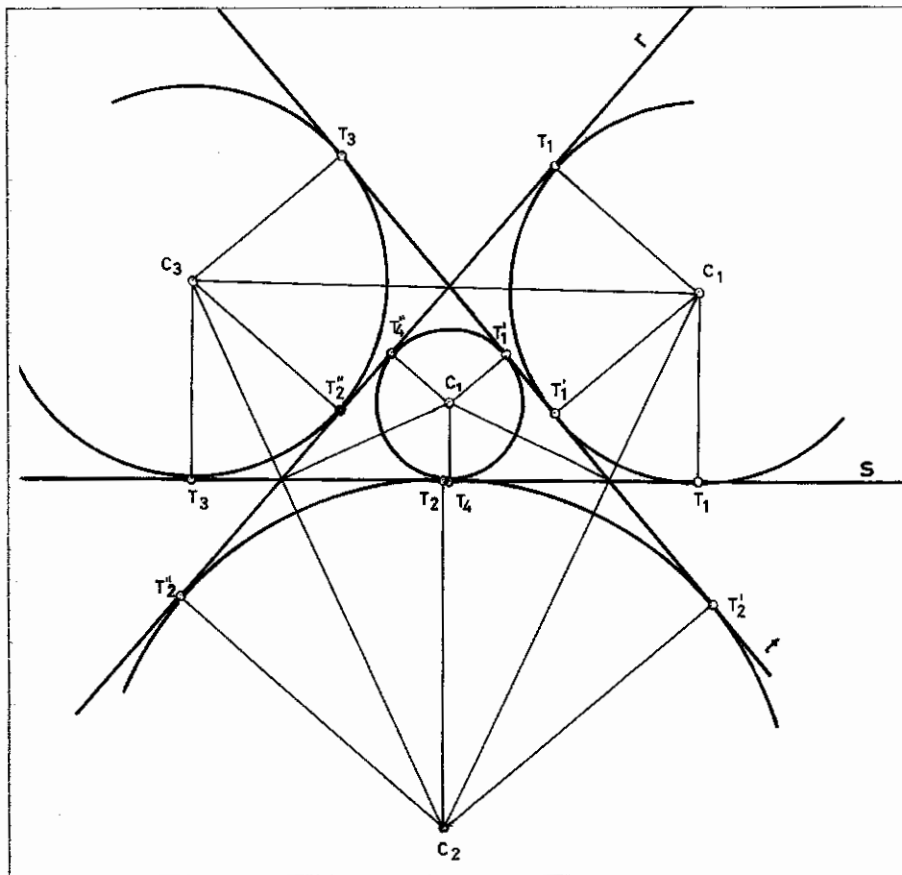


Fig.114

## 7.9 ENLACES Generalidades.

Se denomina enlace o empalme de dos líneas, a la continuidad en el trazado conseguida por medio de algunos de los procedimientos geométricos explicados anteriormente. Se fundamenta exclusivamente en los casos de tangencias, y la aplicación en los trazados industriales es constante.

Se pasa a continuación a la resolución de algunos casos.

### *Empalme de dos rectas paralelas dado el punto de arranque en una de ellas.* (Fig.115).

Sean las rectas  $r$  y  $s$ , y el punto de arranque  $T$ . La perpendicular común a las dos rectas desde  $T$ , nos fijará el centro del arco, en su intersección con la paralela media  $m$ .

### *Empalme de dos rectas concurrentes por un arco de radio $R$ dado.* (Fig.116).

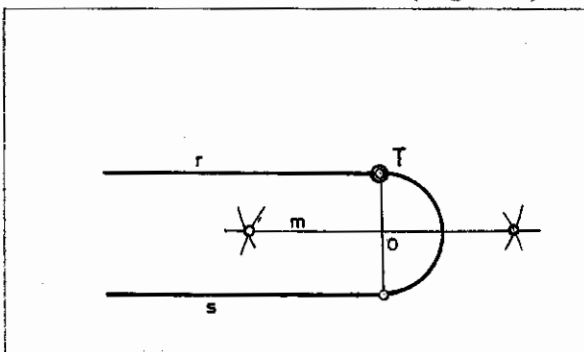


Fig.116

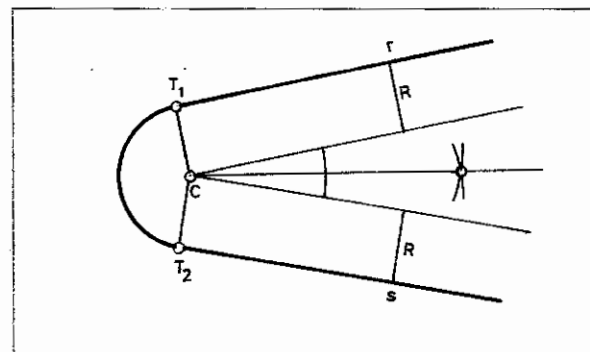


Fig.115

Las paralelas  $r$  y  $s$ , a la distancia  $R$ , se cortarán en el centro  $C$  buscado. La determinación de los puntos de contacto se efectúa trazando las paralelas a la recta por el punto  $C$ . Este ejercicio está fundamentado en que el lugar geométrico de dos rectas que se cortan, es la bisectriz del ángulo formado por ambas rectas.

Si las rectas son perpendiculares el procedimiento se simplifica.

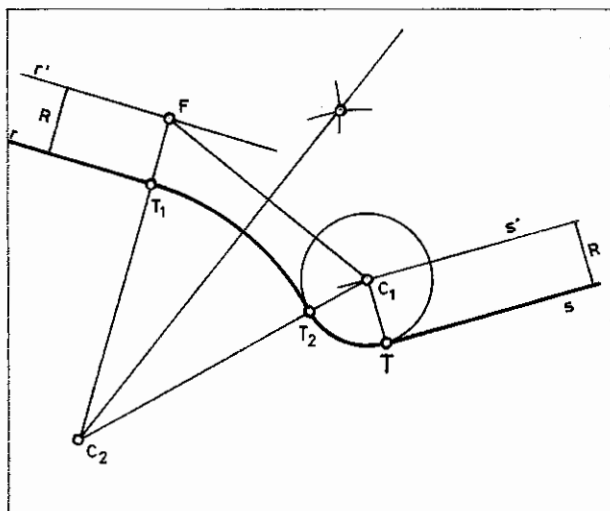


Fig. 117

**Empalme de dos rectas incidentes por dos arcos de sentidos contrarios, conocidos los puntos de arranque y el radio  $r$  de una de ellas.** (Fig. 117).

Sean las rectas  $r$  y  $s$ , el radio de la solución  $R$ , y los puntos de arranque  $T_1$  y  $T_2$ , que determinan los centros  $C_1$  y el punto  $F$ , la mediatriz de  $C_1 F$ , cortará a la prolongación de  $T_1 F$  en  $C_2$ , que es el otro centro buscado, el punto de contacto se hallará uniendo los centros.

**Empalme de recta y circunferencia dado el punto de arranque en la recta.** (Fig. 118).

Sea la recta  $r$  y la circunferencia de radio  $R$ . Se traza una paralela a  $r$  a la distancia  $R$  (radio de la circunferencia dada). La mediatriz  $OT$ , cortará a la prolongación de  $TT'$  en  $C$ , centro buscado. El punto de contacto en la circunferencia se obtiene uniendo los centros.

**Empalme de recta y circunferencia dado el punto de arranque en la circunferencia.** (Fig. 119).

La tangente a la circunferencia en el punto  $T$ , cortará a la recta en el punto  $M$ , la bisectriz del ángulo  $M$ , cortará a la perpendicular en  $T'$  en el punto  $C$ , centro de las soluciones. El punto de contacto se obtiene uniendo los centros.

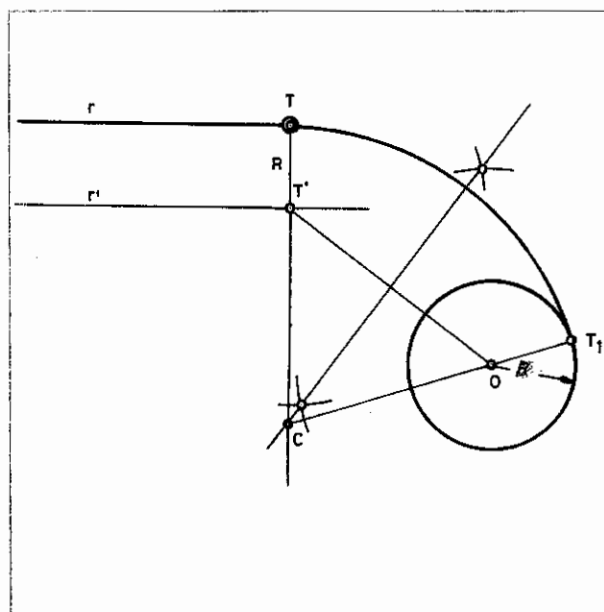


Fig. 118

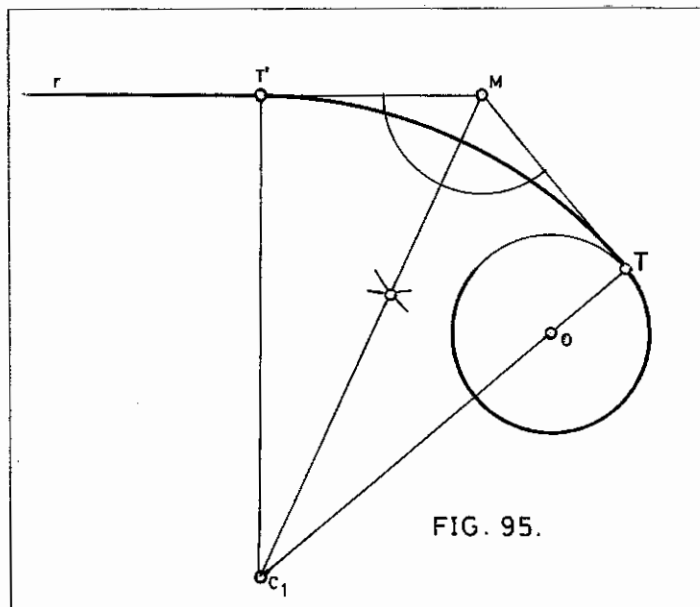


FIG. 95.

Fig.119

## 7.10 OVALOS.

### 7.10.1. Generalidades

Se denomina ovalo a una figura parecida a una elipse que presenta dos ejes de simetría ortogonales que se cortan en su punto medio. Está formada por una serie de arcos de circunferencia tangentes entre sí. Sus aplicaciones industriales son bastante amplias.

### 7.10.2 CONSTRUCCIONES PRINCIPALES

#### Construcción del ovalo de cuatro centros dado el eje mayor

Se puede construir por varios procedimientos de entre ellos destacamos los siguientes:

**Primer procedimiento:** (Fig. 120).

Se divide el eje mayor  $AB$  en tres partes iguales, a continuación se trazan las circunferencias de diámetros  $AC_1$  y  $BC_2$ , los centros serán  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ . Los arcos empalmarán sobre las rectas que unen los centros.

**Segundo procedimiento:** (Fig. 121).

Se divide el diámetro  $AB$  en cuatro partes iguales, y se toman los centros  $C_1$  y  $C_2$ , los arcos de centros y radio  $C_1 C_2 = AB/2$ , se cortarán en dos puntos que serán los centros restantes  $C_3$  y  $C_4$ .

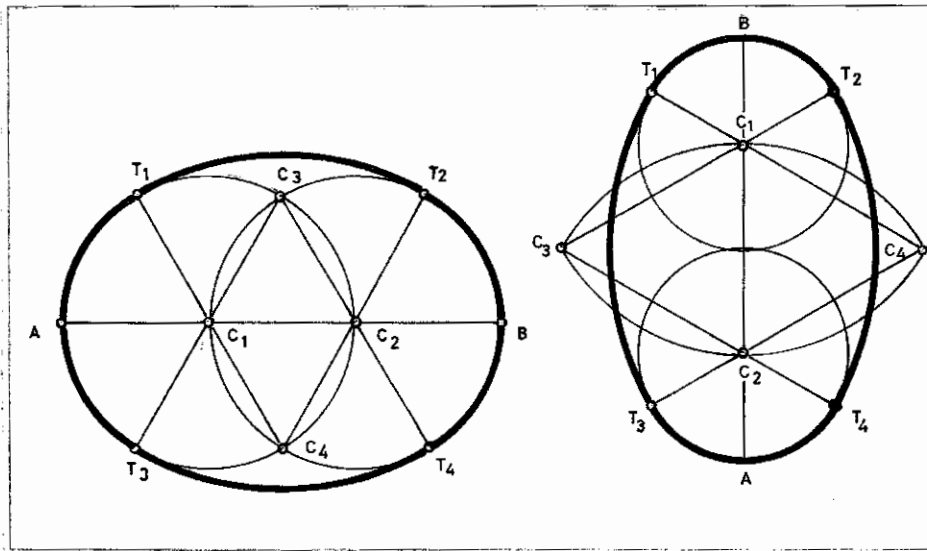


Fig.120 y 121

### Construcción del ovalo de cuatro centros dado el eje menor. (Fig. 122)

Sea el eje menor  $CD$ , la recta del eje mayor coincidirá con la mediatriz del segmento dado. Tomamos como centros los extremos  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , de los ejes ortogonales de la Circunferencia, con lo cual queda resuelto el problema.

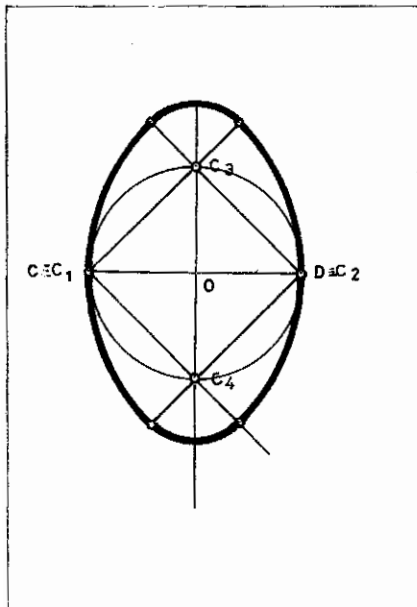


Fig.122

### Construcción del ovalo de cuatro centros dados los dos ejes (Fig. 123)

Es una construcción de bastante interés en el dibujo industrial por suplir en bastantes ocasiones a la elipse, son varios los

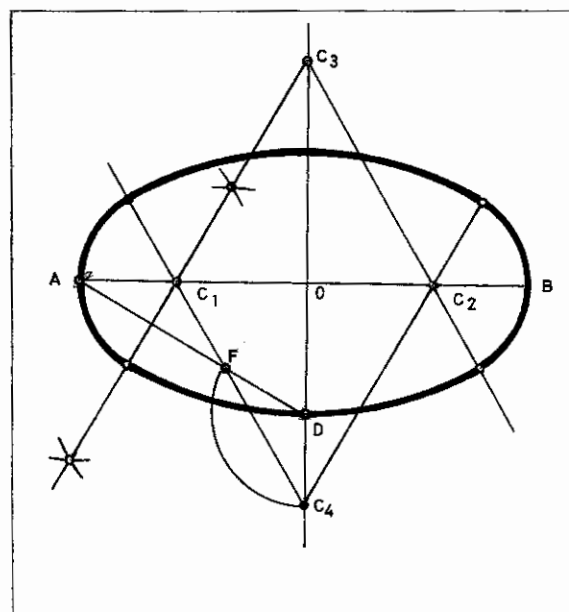


Fig.123

procedimientos para su construcción, aunque solo citaremos los más empleados.

Sean los ejes  $AB$  y  $CD$ , se lleva  $OB$  sobre  $OD$ ,

y la diferencia de semiejes la llevamos sobre la recta  $AD$ , la mediatriz  $AF$  cortará a los dos ejes, o a un eje y la prolongación del otro en los puntos  $C_1$  y  $C_3$ , que serán los centros buscados, los dos restantes serán simétricos de los obtenidos anteriormente respecto al centro  $O$  del ovalo.

**Segundo método** (Fig. 124).

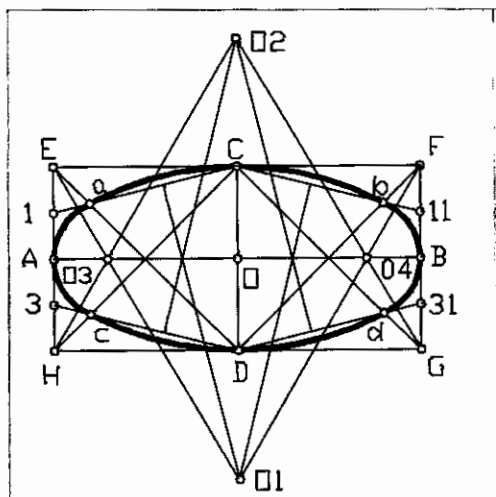


Fig.124

Se contruye el rectángulo  $EFGH$ , circunscrito al ovalo. Se divide  $EH$  y  $FG$  en 4 partes iguales; unimos  $C$  con  $1$ ,  $D$  con  $3$ ,  $C$  con  $11$  y  $D$  con  $31$ . Las rectas  $ED$ ,  $CH$ ,  $DF$  y  $CG$  cortan a las anteriores en los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Se trazan las mediatrices de  $Ca$  y  $Cb$  obtenemos el punto  $O_1$ , en el eje menor y su simétrico respecto de  $O_1$ ,  $O_2$ . La recta  $O_1E$  corta en  $O_3$  al eje menor y la  $O_1F$  en  $O_4$ , centros buscados.

### 7.11 OVOIDE

El ovoide presenta un solo eje de simetría y tiene forma de huevo, se construye también por arcos de circunferencia (normalmente cuatro).

**Construcción del ovoide dado el eje no simétrico** (Fig.125)

Trazamos la circunferencia de diámetro  $AB$  igual al eje dado y situamos los centros  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  de la forma indicada.

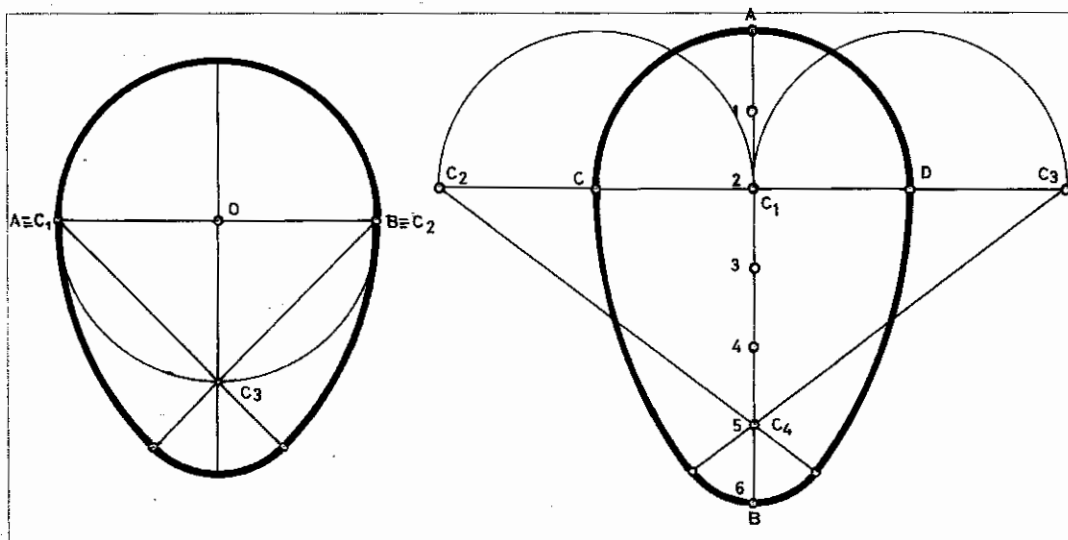


Fig.125 y 126

**Construcción del ovoide dado el eje de simetría. ( dos procedimientos).** ( Fig 126)

Sea el eje de simetría  $AB$ , el cual lo dividimos en seis partes iguales. Por la división dos trazamos una perpendicular, llevamos aun lado y otro de la misma cuatro divisiones de las

anteriores, obteniendo los centros  $C_2$ ,  $C_3$ , se unen con la división cinco, que será el centro de la curva.

### Segundo procedimiento (Fig. 127).

Se toma el punto medio de  $AB$  ( $P_m$ ), y llevamos  $B P_m = BD$  sobre rectas ortogonales y unimos  $D$  con  $A$ , transportamos  $BD = DE$ , y  $AE = AO$ .  $O$  será uno de los centros. La circunferencia de centro  $O$  y radio  $OB$ , nos permite el trazado completo del ovoide de la forma ya indicada.

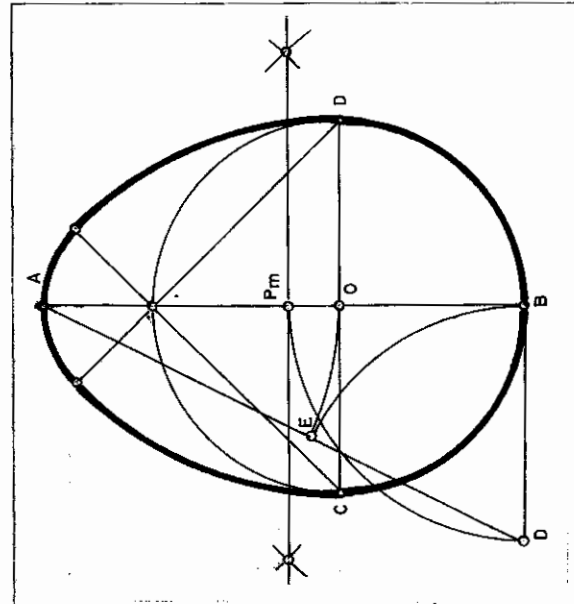


Fig.127

### Ovoide común a dos circunferencias

( Fig. 128).

Habrá que fijar el punto de contacto  $T$  en una de ellas, por ejemplo sobre el mayor. El problema se reduce a determinar la circunferencia tangente a dos dadas conociendo el punto de tangencia en una de ellas. Problema resuelto.

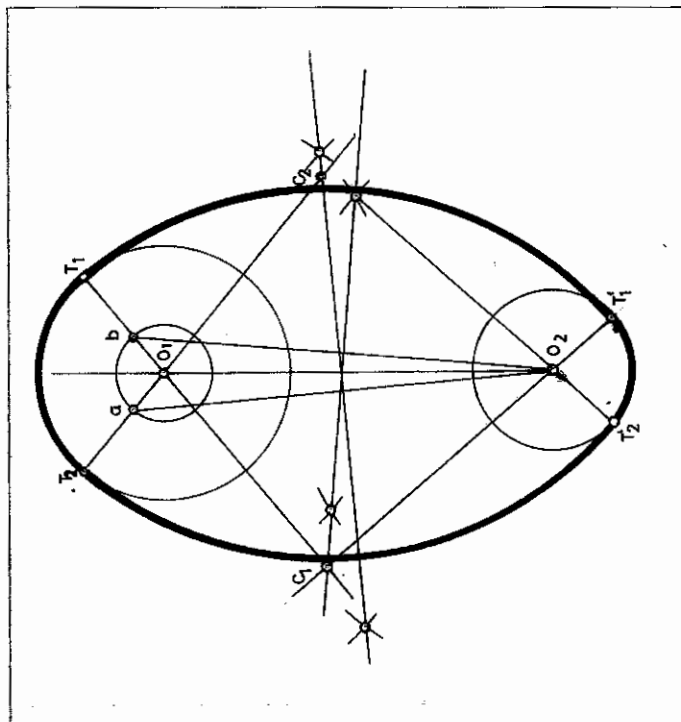


Fig.128

## OCTAVA UNIDAD. Cónicas.

### **Contenido:**

Elipse

Parábola

Hipérbola

### **8.1. ELIPSE**

#### **8.1.1 GENERALIDADES**

Se llama elipse, al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos del mismo plano es constante e igual a  $2a$ . Los puntos fijos se llaman focos, y las rectas que unen un punto de la elipse con los focos radio vectores, y se representan por  $r$  y  $r'$ . Entre ellos se verifica que  $r + r' = 2a$ .

Para construir una elipse, basta tomar una cuerda, fijar sus dos extremos en los puntos fijos  $F$  y  $F'$  ( focos), y manteniéndola tirante mediante un punzón o lápiz la punta de esta describe la elipse.

La elipse tiene dos ejes perpendiculares y se cortan en su punto medio  $O$ , el eje mayor se representa por  $2a$ , y el menor por  $2b$ . Al primero se le llama eje real y al otro imaginario. Los focos están en el eje real.

La distancia focal se representa por  $2c$ .

Entre  $a$ ,  $b$  y  $c$  existe la relación siguiente :  $a^2 = b^2 + c^2$

#### **8.1.2 CIRCUNFERENCIA PRINCIPAL**

Se llama circunferencia principal, a la que tiene por centro el de la elipse y radio  $a$ . Se define, como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a las tangentes a la elipse.

La elipse también se puede definir como el lugar geométrico de los centros de las

circunferencias que son tangentes a la focal y pasan por el otro foco.

### 8.1.3. CIRCUNFERENCIA FOCAL

Circunferencia focal es aquella que tiene por centro uno de los focos y de radio  $2a$ .

### 8.1.4. TRAZADOS MAS REPRESENTATIVOS

**Trazado de una elipse por puntos a partir de los ejes. ( dos procedimientos)**

**Primer procedimiento. Por radio vectores (fig.130)**

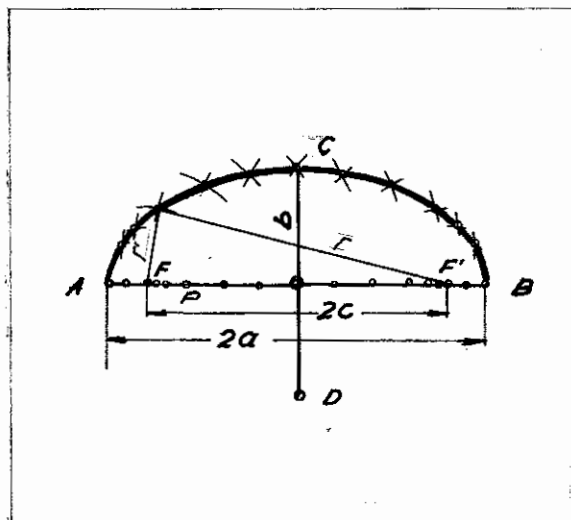


Fig.130

Sea  $2a$  el eje mayor y  $2b$  el eje menor. Sabiendo la razón que existe entre los elementos definidores de la elipse, podemos calcular fácilmente la distancia focal. Se toma un punto cualquiera en el eje mayor, por ejemplo el  $P$ , con radio  $AP$  y haciendo centro en el foco  $F$ , se traza un arco, y con radio  $BP$  y haciendo centro en  $F'$  trazamos otro arco, el punto de corte de ambos  $M$ , será un punto de la elipse, de esta forma se cumple que:

Repitiendo esta operación tantas veces como se quiera, obtendremos el resto de los puntos.

**Segundo procedimiento. Por haces proyectivos (fig.131)**

Se construye el paralelogramo de la figura, se divide  $OB$  en un número de partes iguales, por ejemplo siete, y en el mismo número se divide el lado menor del rectángulo, se unen los vértices  $C$  y  $D$  con los puntos de división hasta que se corten entre si las divisiones.

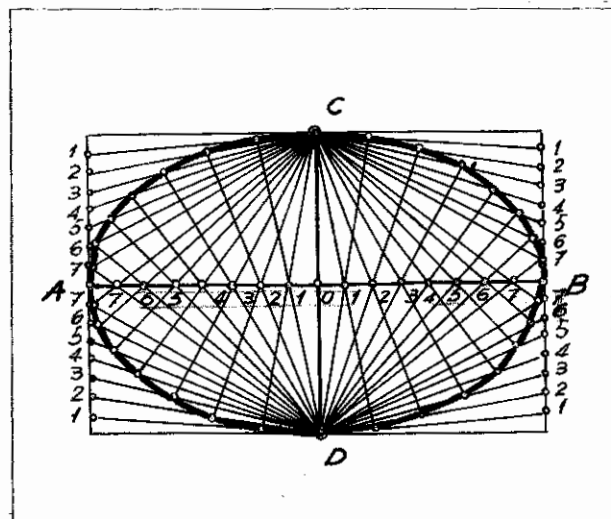


Fig.131

**Trazado de la elipse por puntos a partir de los diámetros conjugados. (Fig. 132).**

El procedimiento de construcción es similar al anterior.

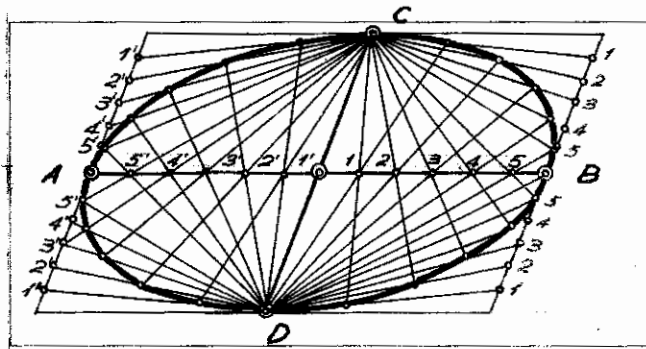


Fig.132

### Construcción de la elipse por arcos de circunferencia. (Fig.134).

Se traza la bisectriz de los radios vectores que será la normal al centro del arco que se busca, esta corta al eje mayor en  $S$ , se levanta la perpendicular en  $S$  que corta en el punto  $N$  a la recta  $P_1O$ , por  $N$  se traza otra perpendicular al eje  $AB$ , que nos determina el centro  $C$ . La distancia  $C P_1$  es el radio de curvatura. Se repite esta operación cuantas veces se quiera y construiremos la elipse.

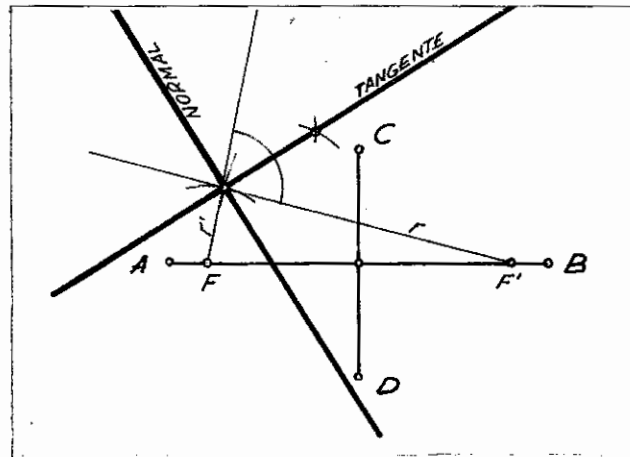


Fig.133

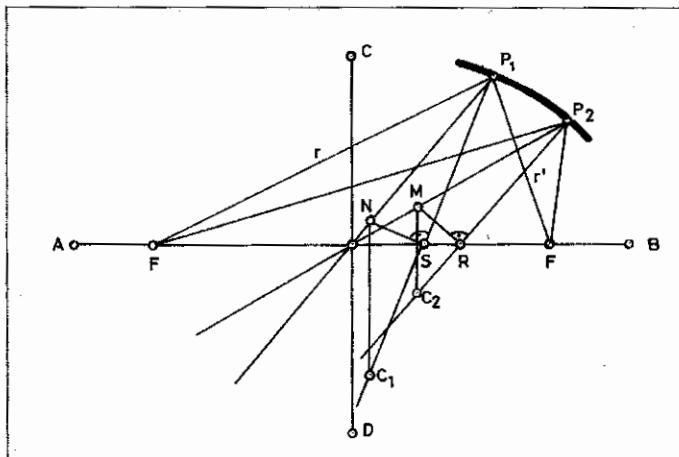


Fig.134

focal por  $2c$ .

Es simétrica respecto de los dos ejes y del centro de la curva. Los conceptos de radio vectores, circunferencia principal y focal son los mismos que en la elipse.

La hipérbola también se puede definir como: el lugar geométrico de los puntos del plano

### Tangente normal en un punto de la elipse. (Fig.133).

La tangente a la elipse en un punto, es la bisectriz exterior del ángulo de los radios vectores. La normal será la perpendicular en el punto a la referida tangente y por tanto bisectriz del ángulo adyacente.

## 8.2. HIPÉRBOLA

### 8.2.1 GENERALIDADES

La hipérbola es una curva abierta con dos ramas, y se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a  $2a$ .

La curva tiene dos ejes que se cortan en su punto medio y son ortogonales. Al igual que la elipse se representa por  $2a$  y  $2b$ , y la distancia

que son centros de circunferencia que pasan por un foco y son tangentes a la focal del otro foco.

Según la longitud de los ejes podemos establecer que:

- 1° Si  $a$  es mayor que  $b$ , se obtiene una curva de ramas cerradas.
- 2° Si  $a$  es igual a  $b$ , se obtiene una curva equilátera.
- 3° Si  $a$  es menor que  $b$ , se obtiene una curva de ramas abiertas.

### 8.2.2. TRAZADOS MAS REPRESENTATIVOS.

**Trazado de la hipérbola por puntos. Procedimiento de radio vectores.** (Fig. 135).

Conociendo la relación existente entre los elementos definidores de la hipérbola

$$a^2 = b^2 + c^2$$

podemos obtener los focos a partir de los ejes. Hay que tener en cuenta que la distancia focal será la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los dos ejes.

Se toma un punto  $H$  en el eje real y radio  $Ah$   $BH$  y centro en  $F$  y  $F'$  se trazan dos arcos que nos determina el punto  $P$  de la curva, repitiendo esta operación un número elevado de veces obtendremos los puntos necesatrios para trazar la curva.

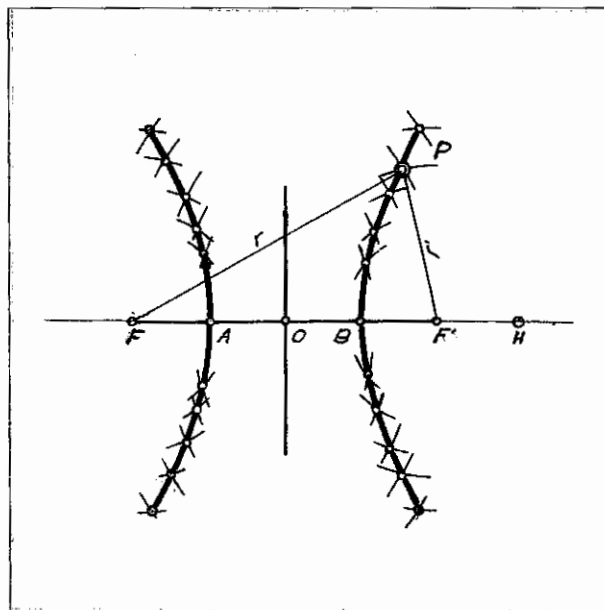


Fig.135

**Procedimiento de tangentes** (Fig.136).

Bastará con considerar la circunferencia principal y trazar una serie de tangentes a la curva. La hipérbola buscada será la evolvente de dichas rectas. Para lograr esto trazamos rectas  $F'R$ ,  $F'S$ ,... que pasen por un foco  $F'$  y los puntos  $R$ ,  $S$ , ....., trazamos sus correspondientes perpendiculares a dichas direcciones, estas serán las tangentes que resuelven el problema.

**Trazado de la hipérbola por puntos, por medio de haces proyectivos.** ( Fig. 137).

Trazaremos solo una cuarta parte de la curva, para ello limitamos el trazado en un punto  $P$  cualquiera.

Se construye el paralelogramo  $PP'$ ,  $MN$ , dividimos  $PN$  y  $PR$  en un número de partes iguales y proyectamos estas desde los vértices  $A$  y  $B$ , las intersecciones de rayos con idénticas numeraciones nos determinan los puntos de la curva.

### **Tangente y normal a la hipérbola en un punto.** (Fig.138).

Trazaremos solo una cuarta parte de la curva, para ello limitamos el trazado en el punto  $P$  cualquiera.

Se construye el paralelogramo  $PP'$ ,  $MN$ , dividimos  $PN$  y  $PR$  en un número de partes iguales, y proyectamos estas desde los vértices  $A$  y  $B$ , las intersecciones de rayos con idénticas numeraciones nos determinan los puntos de la curva.

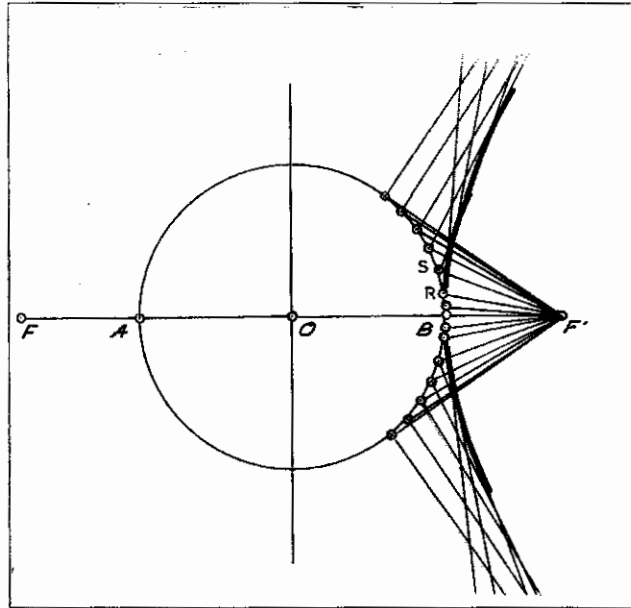


Fig.136

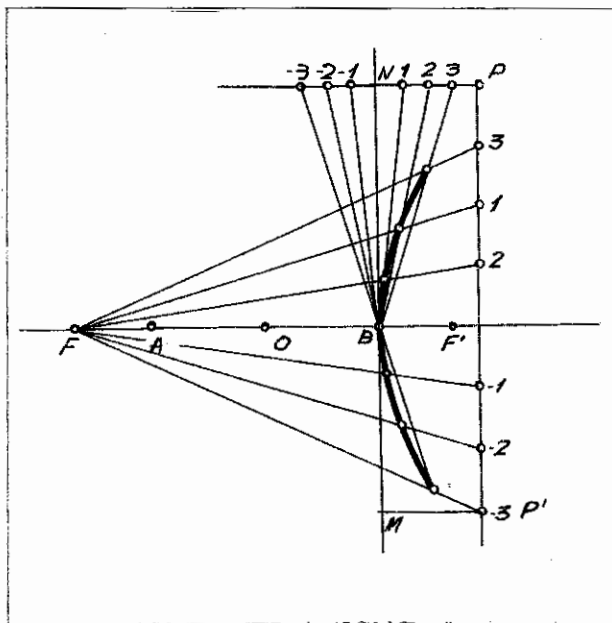
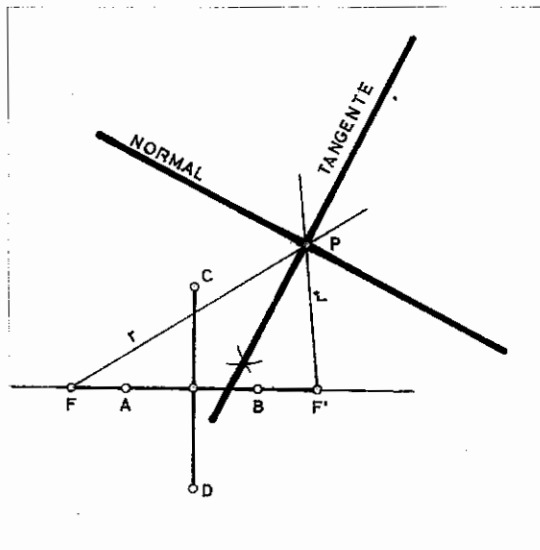


Fig.137

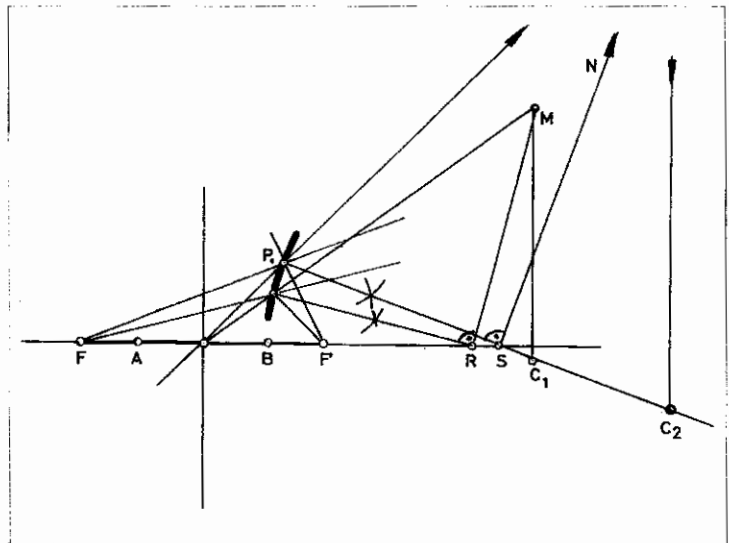
### **Radio de curvatura y construcción de la hipérbola por arcos de circunferencia.** (Fig.139).

Se toman dos puntos próximos para unirlos por medio de arcos de circunferencia. Conociendo el punto  $P_1$ , se traza la normal, bisectriz de los radios vectores, esta corta al eje real en el punto  $R$ , por  $R$  se traza la normal hasta que corte a la recta  $OP$  en  $M$ , por  $M$  se traza otra perpendicular al eje hasta obtener el punto  $C$ . De la misma forma obtendríamos el resto de los puntos.

Para la determinación del centro de curvatura, ( Fig. 140), se construye el triángulo  $OB'B$ , con  $a, b, c$ , por  $B'$  se traza la perpendicular a la asíntota  $OB'$ , hasta que corte al eje en  $Ca$ , centro de curvatura.



**Fig. 138**



**Fig. 139**

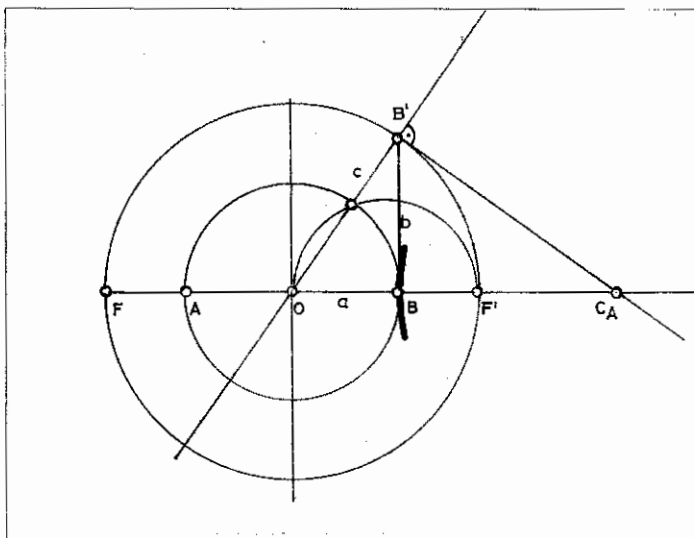
### 8.3. PARÁBOLA

### 8.3.1 GENERALIDADES

La parábola es una curva plana, abierta, de una sola rama; se define como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz.

El vértice es otro punto cualquiera que equidista de la directriz y del foco. Su distancia a cada uno de ellos es  $p/2$ , es decir la mitad del semiparámetro.

Se llama parámetro en la hipérbola, al igual que en la elipse y en la hipérbola, a la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje real en el foco.



**Fig. 140**

La directriz de la curva es la circunferencia focal, en este caso de radio infinito. Según esto el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto a cada una de las tangentes a la curva es la directriz.

La tangente en el vértice es la  
circunferencia principal, que se  
define como en las curvas anteriores.

Un punto cualquiera de la curva  
equidista del foco y de la

perpendicular por el punto a la directriz.

**Trazado de la parábola por puntos a partir de los radios vectores.** (Fig.141).

Tomamos un punto cualquiera  $M$  en el eje real, y con la distancia  $MD$  y haciendo centro en el foco, cortamos a la perpendicular en  $M$ , el punto  $P$  obtenido será de la curva, así como su simétrico  $P'$ ; respecto al eje. Por este procedimiento se logrará un número suficiente de puntos, que nos determinará la curva.

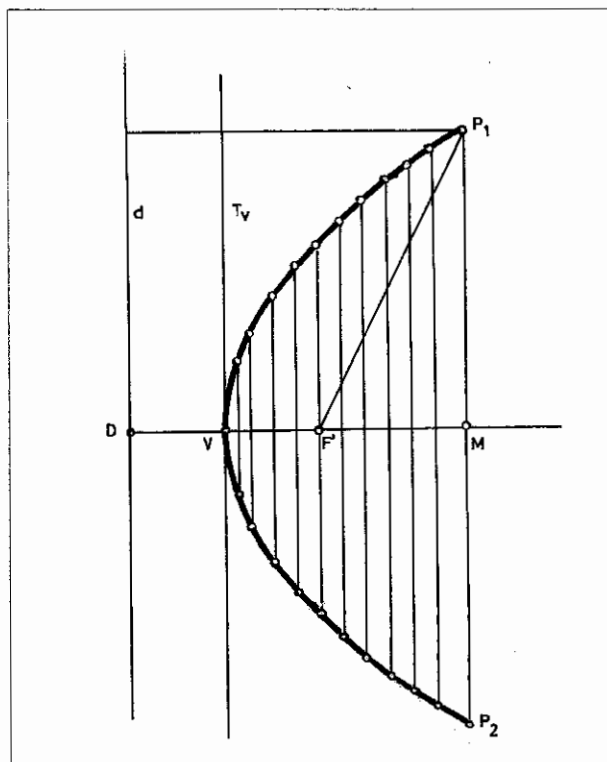


Fig.141

**Construcción de la parábola por puntos por medio de haces proyectivos.** (Fig.141).

Al ser abierta esta curva la limitaremos en dos puntos  $P$  y  $P'$  simétricos. Dividimos los lados  $VP$  y  $VP'$  del rectángulo  $VPMP'$  en el mismo número de partes iguales y buscamos las intersecciones de los haces proyectados desde el vértice real  $V$  y desde el impropio, equivaliendo esta última operación a trazar paralelas por al eje por los puntos correspondientes. El recto de la curva se logra repitiendo la operación anterior.

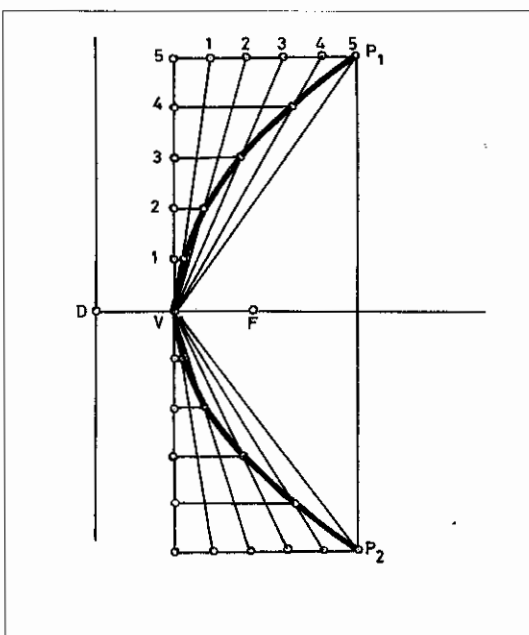


Fig.142

**Trazado de la parábola por puntos a partir de la circunferencia principal.** (Fig. 143).

Como la tangente en el vértice es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas a las tangentes por los focos, las rectas perpendiculares  $A, B, C, \dots$  Trazadas a  $FA, FB, FC, \dots$  irán siendo sucesivamente tangentes a las rectas mencionadas.

**Recta tangente a la parábola en un punto.** (Fig.144).

Bastará determinar los dos radios vectores  $r$  y  $r'$  y trazar la bisectriz  $t$  del ángulo formado por  $r'$ . La normal será la perpendicular a la tangente.

### ***Radio de curvatura y construcción de la parábola por arcos de circunferencia.*** (Fig.145).

En primer lugar se hallan varios puntos de la curva para unirlos por arcos de circunferencia. El punto  $P_1$  es de la curva: se traza la bisectriz de los radios vectores del punto  $r_1$  y  $r_2$ , que corta en  $N$  al eje y por este punto se levanta la normal hasta que corte en  $A_1$  al radio  $r_1$ , por

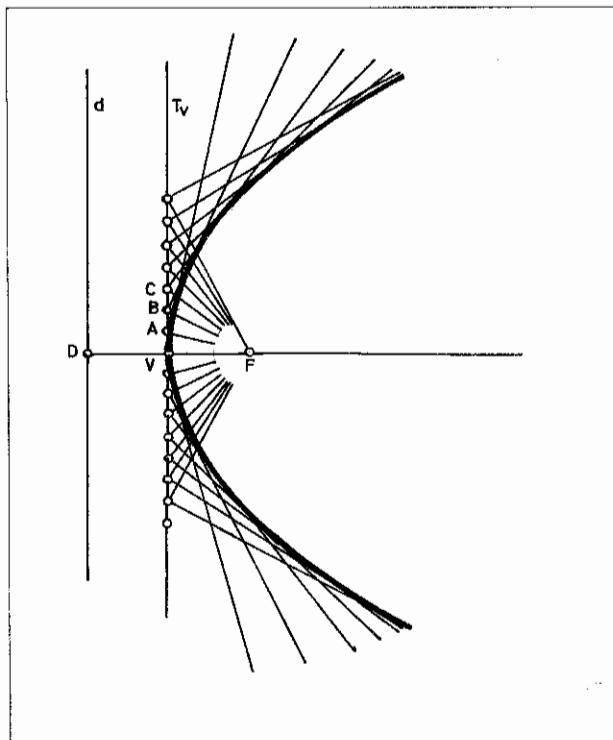


Fig.143

$A_1$  se traza otra perpendicular al eje que encuentra a la normal en  $P_1N$  en el centro  $C$ , de curvatura de la parábola en el punto  $P_1$ , el radio de curvatura será  $C_1P_1$ , se toma otro punto de la curva  $P_2$  y se realizan las mismas operaciones. El punto de tangencia de los arcos estará en la recta  $C_1C_2$ .

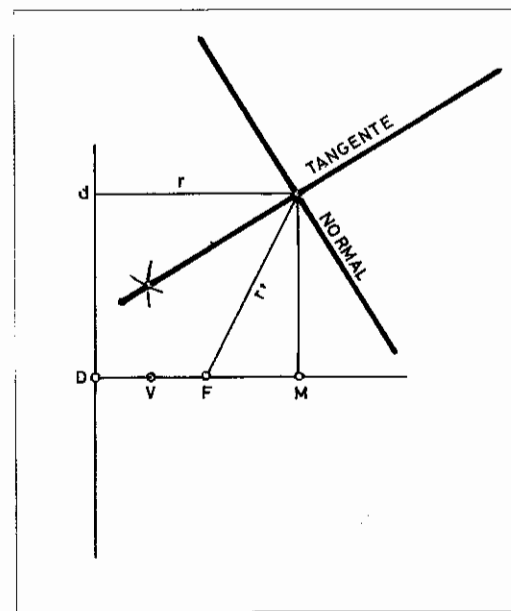


Fig.144

Los puntos de la curva han de estar próximos, ya que si no la tangente de los arcos no existe. Los puntos simétricos  $P_1$ ,  $P_2$  respecto al eje tienen por centros los centros  $O_1$ ,  $O_2$ .

El centro de curvatura de una parábola en el vértice  $V$ , es un punto  $C$  que dista del foco  $F$  igual que de  $V$  es decir  $P/2$ , siendo  $P$  el semiperímetro. (Fig.146).



## **BIBLIOGRAFÍA:**

Geometría Descriptiva. Dr. Roberto Halissner.  
Traducido del alemán al español en 1.928 por:  
Carlos Mendizabal Brunet. edit. Labor

Geometría Descriptiva. Angel Taibó Fernandez . 1.983

Geometría Descriptiva. Fernando Izquierdo Asensi  
Edit. Dossat, S.A. 1.990

Curso de Geometría Descriptiva.  
Sistemas de representación. J. de Lasala Millaruejo  
F. Marcos de Lanuza. Edit. S.A.E.T.A.

Apuntes. Agustín Dieguez Gonzalez  
Catedrático de expresión Gráfica en la Ingeniería. 1.991

Curso de Dibujo Geométrico y de Croquisación.  
F. Javier Rodríguez de Abajo.  
Edt. Marfil, S.A. 1.963

Geometría Descriptiva. Tomo III. F. Javier Rodríguez de Abajo.  
Edt. Marfil, S.A. 1.964

Curso de Geometría Métrica. tomo II. Complementos.  
P. Puig Adan. edit. Nuevas Gráficas, S.A. Andrés Mellado 18, Madrid 15.  
Norma UNE 1.031-75 de Junio 1.975.

Elementos de Geometría Descriptiva de Angel Taibó Fernandez.  
Blass, S.A. Tipográfica, Nuñez de Balboa, 25. Madrid.

Dibujo de Ilustración Técnica T.A. Thomas.  
Ed. Gustavo Gili. Barcelona.

Geometría Métrica Proyectiva y Sistemas de Representación.  
L. Sanchez Mármol y M. Perez Beato.

Teoría de Delineación Edificios y Obras.  
Manuel Buenaño Pastor - Joaquín Petit Niño (1.979)  
Edit. Edebé  
Barcelona 08017