

1º BACHARELATO - FUNCIONES - DERIVADAS.

1.- Estudiar a continuidade e derivabilidade das seguintes funcións:

$$\text{a) } f(x) = \left| \frac{x-3}{x} \right| \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 2 \\ x^2-x+3 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = |x^2-x-6|$$

2.- Calcular as derivadas das seguintes funcións:

$$\text{a) } f(x) = \log \left(\frac{x^3 - 2\sqrt{x+3}}{\operatorname{sen}^2(3x+5)} \right) \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad \text{c) } f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\operatorname{sen} x + \cos x} \quad \text{d) } f(x) = \tan x \sec x$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sqrt{3x^3} - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}} \quad \text{f) } f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{e^{1-x}} \cos \sqrt{e^{1-x}} \quad \text{g) } f(x) = (7x+1)^x \quad \text{h) }$$

$$f(x) = \log \left(\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x} e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \right) \quad \text{i) } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

3.- Calcular a e b para que:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases} \text{ sexa derivable en } x=2, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > 5 \\ a + bx^2 & |x| \leq 5 \end{cases} \text{ sexa derivable en } x=5$$

$$\text{e } h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq c \\ ax+b & x > c \end{cases} \text{ sexa derivable en } x=c$$

4.- Escribir as ecuacións das tanxentes ás funcións nos puntos que se indican:

$$y = \operatorname{sen}^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \text{ en } x=0, \quad x = -\frac{\pi}{4} \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ en } x=0, \quad x=2, \quad x=\ln 2$$

$$y = x\sqrt{x + \sqrt{x+1}} \text{ en } x=0 \quad y = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x} \text{ en } x=0, \quad x=\pi$$

5.- Demostrar que a ecuación $6x^5 + 2x + 7 = 0$ ten unha soa solución.

$$\text{6.- Sexa } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 8x - 15 & x \leq -3 \\ 0 & -3 < x < 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$$

a) Debuxar a gráfica.

b) Estudar a monotonía.

c) Obter os valores x tales que $f(x) = 0$.

d) Determinar a tanxente á curva no punto de abscisa -6 .

7.- Calcular os seguintes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right);$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \tan x}\right) \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x \ln(\tan x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} \\
& \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[(e^{\operatorname{sen} x} - 1) \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{\frac{1}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x^x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen}(2x))^{\cotan(3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [x^x \sqrt{a-1}]; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos(2x)}}; \\
& \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotan x)^{\operatorname{sen} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cotan \frac{x}{2} \sqrt{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)^{1+\cot^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(2x)} - \frac{\tan x}{1 - \frac{4x}{\pi}}\right); \\
& \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} \frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right); \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^4 - x^3} - \sqrt[4]{x^4 + 4x^3}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(xc)^2 + x + 2} - x\right); \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2}\right)
\end{aligned}$$

8.- Determinar se a función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ é derivable en $x = -1$

9.- Determinar se é derivable en $x = 2$ a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \leq 2 \\ L(x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

10.- Calcular o valor do parámetro a para que sexa derivable en $x = 1/2$ a función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ \frac{-a}{x} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

11.- Calcular a segunda derivada das funcións:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 + b & \text{se } x \geq a \\ -(x-a)^2 + b & \text{se } x < a \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}; \quad h(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right); \quad i(x) = \frac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^x}$$

12.- Determinar en que puntos da gráfica de $f(x) = x - \sqrt{x}$ a tanxente é paralela á recta da ecuación $3x - 4y + 1 = 0$

13.- Calcular as derivadas enésimas das funcións:

$$f(x) = e^x; \quad g(x) = \ln x; \quad h(x) = x \ln x; \quad i(x) = xe^{-x}; \quad l(x) = 2^x$$

- 14.- Calcular as abscisas dos puntos da gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ nos que a tanxente é paralela á secante que corta á curva en $x = 0$ e $x = 1$.
- 15.- Achar o punto da función $f(x) = \sin(x^2)$ no que a recta tanxente ten pendente $-2\sqrt{\pi}$. Escribir a súa ecuación.
- 16.- Indicar se teñen extremos relativos as seguintes funcións:
- $$f(x) = \frac{1+|x|}{x^2}; \quad g(x) = e^{|x|}; \quad h(x) = \sin(x) - 2x; \quad i(x) = \ln(\sqrt[3]{x}); \quad l(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$
- 17.- Demostrar que o polinomio $2x^3 - 24x + 7$ ten unha única raíz real no intervalo $(0,2)$
- 18.- Calcular a ecuación da recta tanxente á curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ no seu punto de inflexión. Existe sempre nunha cúbica un punto de inflexión?
- 19.- Dada unha función polinómica de terceiro grao, calcular os coeficientes para que teña un punto de inflexión en $(0,0)$ sendo a tanxente nese punto paralela á recta $4x - y = 5$, e ademais pase polo punto $(1,1)$.
- 20.- Determinar as funcións polinómicas de terceiro grado con derivada segunda $x-1$. Cal delas ten un mínimo relativo no punto $(4, -1/4)$?
- 21.- Determinar o polinomio de terceiro grao que ten 1 e 2 como raíces, pasa polo punto $(-1,24)$ e ten un mínimo relativo en $x = 1$.
- 22.- Descompoñer 18 como suma de dous números positivos de xeito que o produto dun deles polo cadrado do outro sexa máximo.
- 23.- Quérese cercar un campo rectangular que está na beira dun camiño. Se a cerca do lado do camiño custa 8 €/metro e a dos outros 1 €/metro, calcular a área do maior campo que se pode cercar con 2880 €
- 24.- Un xardineiro ten que construír un xardín en forma de sector circular cun perímetro de 20 m. Cal será o raio que posúe o xardín de área máxima?
- 25.- Unha folla de papel debe ter 18 cm^2 de texto impreso, as marxes superior e inferior de 2 cm e as marxes laterais de 1 cm. Calcula as dimensións da folla para que o gasto de papel sexa mínimo.
- 26.- Nunha oficina de correos, só se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular tales que a anchura sexa igual á altura, e ademais a suma do ancho, alto e longo debe ser de 72 cm. Calcular as dimensións do paralelepípedo para que o seu volume sexa máximo.
- 27.- Os barrís que se utilizan para almacenar petróleo teñen forma cilíndrica e unha capacidade de 160 l. Calcular as dimensións do cilindro para que a chapa empregada sexa mínima.
- 28.- Determinar a distancia mínima da orixe á curva $xy = 1$.
- 29.- Determinar os puntos da curva $y^2 = 6x$ tales que a distancia ao punto $P(4,0)$ sexa mínima.
- 30.- Unha fiestra “normanda” consiste nun rectángulo coroado cun semicírculo. Calcular as dimensións

da fiestra normanda de superficie máxima con perímetro 10 metros.

31.- Unha pedra preciosa pesa 12 gramos. Sabendo que o valor é proporcional ó cadrado do seu peso, e que o seu valor é de 1440 €, calcular cando se divide en dous trozos o valor de cada un deles sabendo que a deprezación é máxima.

32.- O número de membros dunha peña deportiva fundada en 1987 é, x anos despois da súa fundación:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

- a) En que ano tivo o máximo número de membros entre 1987 e 1992?
- b) Cal é a tendencia actual en 1992, crecente ou decrecente?
- c) Chegará a quedarse sen socios?

33.- O índice de inflación dun certo país foi variando durante o ano 1977 segundo a expresión

$$i(t) = 15 + \frac{t^2 - 8t}{20}, \text{ onde } t \text{ é o tempo en meses desde principio de ano.}$$

- a) Durante que meses o índice de inflación foi crecendo?
- b) A partir de que mes se supera a inflación inicial do mes de xaneiro?
- c) Se o goberno ten previsto devaluar a moeda do país cando o índice de inflación alcance o valor de 16,5, en que mes tomará a decisión?

34.- Un axente comercial cobraba pola venda de mercadorías unha comisión $c(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$, onde x representaba a cantidade en miles de pesetas da venda efectuada. Determinar a cantidade que tiña que vender para que a comisión que houbese que pagar fose máxima.

36.- Un propietario ten alugados 40 pisos a 1000 € ao mes cada un. Por cada 100 € de aumento no prezo do aluguer, perde un inquilino. Cal é o aluguer que máis beneficio lle produce ao propietario?

37.- A área ocupada por unha infección cutánea desenrólase a partir do instante $t = 0$ segundo a función

$$f(t) = 10 + \frac{t}{t^2 + 1}$$

- a) Calcular a área ocupada pola infección ao comezo.
- b) Calcular o intre no que é máxima a área infectada e calcular dita área.
- c) Estudar que ocorre co transcurso do tempo. Estabilízase ou desaparece a infección?

38.- Representar gráficamente as funcións:

a) $y = x^4 + 2x^2$

b) $y = \frac{|x| - x}{2}$ c)

$y = x \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$ d)

$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ e) $y = \frac{\ln x}{x}$

f) $y = e^x \ln x$

g) $y = \frac{x}{e^x - 1}$

h) $y = e^x(x - 1)$

i) $y = \frac{\text{sen} x}{x}$

l) $y = \text{sen}^2 x$