Representación gráfica de curvas en forma paramétrica

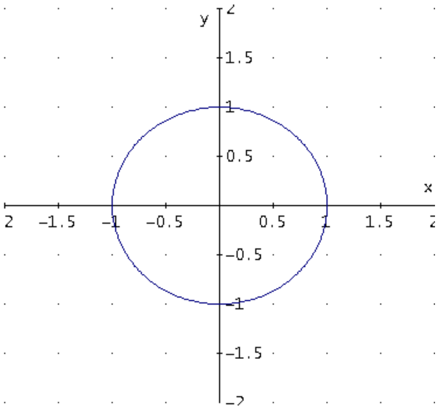
1.- Representar la curva dada por $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, siendo $a > 0$.

Solución

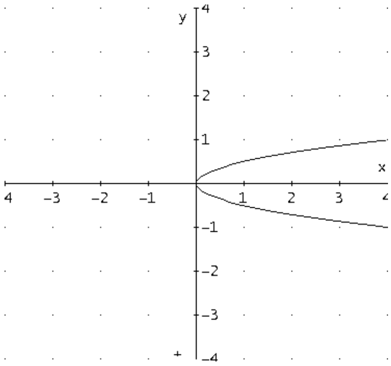
2.- Emparejar cada curva con su gráfica

a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}$

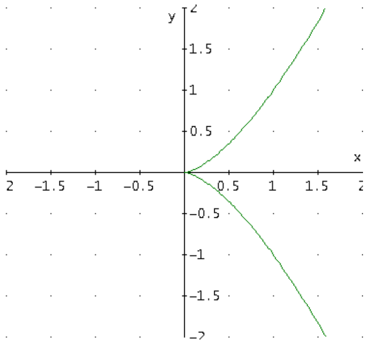
α)



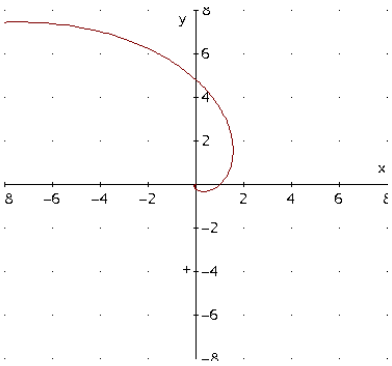
β)



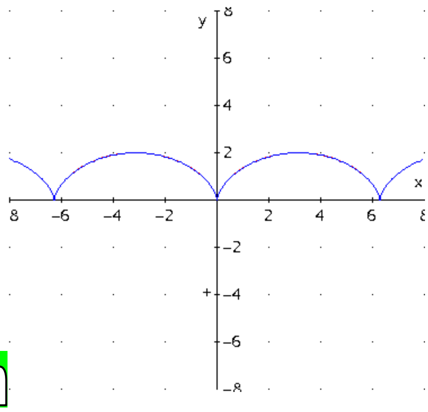
γ)



δ)



ε)



Solución

3.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = \cos t + \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

Solución

4.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t-3} \\ y = \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} \end{cases}$$

Solución

5.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = 2\ \mathrm{sen}(t) - \mathrm{sen}\ (2t) \\ y = 2\cos(t) - \cos 2t \end{cases}$$

Solución

6.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \mathrm{sen}^3 t \end{cases} \text{ donde } a>0.$$

Solución

7.- Se considera la curva de ecuación: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{4t+2}{t(t+2)} \end{cases}$. Estudiar:

a) *Simetrías* de la curva.
b) *Asíntotas*.
c) *Puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical*, *puntos singulares*.
d) *Crecimiento* y *decrecimiento* de la curva por ramas.
e) *Puntos de cortes* con los ejes coordenados.
f) Dibujo aproximado de la curva.

Solución

8.- Hacer un estudio y representar gráficamente la curva:

$$\begin{cases} x\ (t) = \mathrm{sen}\ (2t) \\ y\ (t) = \cos(3t) \end{cases}$$

Solución

9.- Hacer el estudio de la siguiente curva y representarla gráficamente

$$\begin{cases} x = \mathrm{sen}(2t) \\ y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

Solución

10.- De la curva dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\cos(t)} \\ y(t) = e^{\frac{\cos(t)}{\mathrm{sen}(t)}} \end{cases}$$

Obtener:

1) *Campo de variación* de t
2) *Periodicidad*
3) *Simetrías*
4) *Asíntotas*
5) *Puntos críticos*

6) Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento*, *máximos* y *mínimos* relativos

7) Representar aproximadamente la curva

Solución

11.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^3 - 3t + 2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \end{cases}$, se pide estudiar:

a) *Dominio*

b) *Simetrías*

c) *Corte con los ejes*

d) *Asíntotas*

e) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*. *Puntos singulares*.

f) Estudio del *crecimiento* por *ramas*

g) Dibujo de la curva indicando cada *rama*.

Solución

12.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = t^2 + \sqrt{2} \\ y(t) = t^3 - 2t \end{cases}$, se pide:

a) *Campo de variación* de t.

b) Estudio de *simetrías*.

c) *Puntos críticos*.

d) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.

e) Estudio del *crecimiento* por ramas.

f) Calcular y''(x) (*derivada* segunda de y respecto de x).

g) Dibujo aproximado de la curva indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes coordenados.

Solución

13.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{(t-1)^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2 - 1} \end{cases}$, se pide:

a) *Dominio*.

b) *Asíntotas*.

c) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

e) *Corte con los ejes de coordenadas*.

f) Dibujo de la curva indicando cada *rama*.

Solución

14.- Dada la curva que tiene como *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t}{t^3} \\ y(t) = \dfrac{t}{1-t} \end{cases}$, hallar:

a) *Campo de variación* de t.

b) *Asíntotas*

c) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *singulares*.

d) Estudio por *ramas* del *crecimiento* y *decrecimiento*.

Solución

15.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -\dfrac{240\ t\ (3t^4 - 10t^2 + 3)}{(t^2+1)^6} \end{cases}$, se pide estudiar:

a) *Simetría*

b) *Asíntotas*

c) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*. *Puntos singulares*

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

Solución

16.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, estudiar:

a) *Asíntotas*.

b) *Puntos críticos*.

c) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.

d) ¿Cuántas *ramas* tiene la curva?

Hacer un dibujo aproximado de la misma marcando claramente cada una de sus ramas.

Solución

17.- Dada la curva $(x(t), y(t)) = \left(\dfrac{1}{(t-2)(t-1)}, \dfrac{(t-1)^2}{t-2}\right)$

a) Hallar la ecuación de su *asíntota oblicua*

b) Hallar los *puntos de tangencia horizontal* y *vertical*

Solución

18.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = 2t - \dfrac{4}{3}t^3 \end{cases}$.

Se pide estudiar:

a) *Campo de variación* de t
b) *Simetrías*
c) *Periodicidad*
d) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*
e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*
f) Dibujo aproximado de la curva indicando cada *rama*.

Solución

19.- Dada la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+t+1}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{2-t} \end{cases}$, se pide:

a) *Asíntotas*.
b) *Puntos críticos*.
c) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
d) Dibujo aproximado de la curva indicando las coordenadas de los puntos críticos.

Solución

20.- Sea la curva $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t\ \ e^{-t} \end{cases}$

Se pide:

a) *Dominio* de variación de t
b) *Continuidad*
c) *Simetrías*
d) *Intersección con los ejes coordenados*
e) *Puntos críticos*. *Crecimiento* y *decrecimiento*
f) *Máximos*, *mínimos* y *puntos de inflexión*
g) *Asíntotas*

Solución

21.- Se considera la curva de ecuación $\begin{cases} x = t^3 \\ y = \text{sen}(3t) \end{cases}$, $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Estudiar:

a.- *Simetrías de la curva*.
b.- *Puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical*, *puntos singulares*.
c.- *Crecimiento* y *decrecimiento* de la curva por *ramas*.
d.- Puntos de *corte con los ejes de coordenadas*.
e.- Dibujo aproximado de la curva, en el que se indiquen los puntos obtenidos en los apartados anteriores.

Solución

22.- Representar la curva dada por $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2-1} \end{cases}$

Solución

23.- Hacer un estudio completo y representar gráficamente la curva:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t(t-1)} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Solución

24.- Una partícula se mueve en un plano vertical xy siguiendo la trayectoria de la curva: $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$, solamente en la región $y \geq 0$. Se pide:

a) Posición inicial (x_0, y_0) de la partícula en el instante $t = 0$.

b) *Periodicidad* de la curva. Intervalo de tiempo necesario para generar la trayectoria completa.

c) Cálculo de *asíntotas*. ¿Es una trayectoria finita?

d) Calcular los *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical* de la curva.

e) Hacer un estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas.¿Cuál es la posición (x, y) más baja que alcanza la partícula? ¿Cuál la más alta?

Solución

25.- Una partícula se mueve en un plano vertical xy siguiendo la trayectoria de la curva:

$\begin{cases} x(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$, solamente en la región $y \geq 0$. Se pide:

a) Posición inicial (x_0, y_0) de la partícula en el instante $t = 0$.

b) *Periodicidad* de la curva. Intervalo de tiempo necesario para generar la trayectoria completa.

c) Cálculo de *asíntotas*. ¿Es una trayectoria finita?

d) Calcular los *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical de la curva*.

e) Hacer un estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*. ¿Cuál es la posición (x, y) más baja que alcanza la partícula? ¿Cuál la más alta?

Solución

26.- Como parte de un trazado de un circuito de entrenamiento de fórmula 1, se está considerando la gráfica de la curva: $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(2t) \\ y(t) = \cos\dfrac{t}{2} \end{cases}$, se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) *Simetrías* de la curva

c) *Periodicidad*

d) Dar un intervalo de longitud mínima donde debe variar "t" para obtener la gráfica completa de la curva. Si no se quiere (ilógico!) que en el circuito haya cruces, indicar razonadamente un intervalo al que haya que limitarse, dentro del hallado anteriormente.

e) *Asíntotas*

f) En el intervalo $[0, \pi]$: *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.

g) En el intervalo $[0, \pi]$: *ramas* de la curva y estudio del *crecimiento* por ramas.

h) Dibujo aproximado de la curva completa. A la vista del mismo, ¿cuántas ramas tiene en total?

Solución

27.- Dada la curva $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$, se pide:

a) Hallar las *asíntotas*

b) Obtener los *puntos de tangencia vertical* y *horizontal*

c) Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento* de la curva por ramas.

Solución

28.- Dada la curva $\left(x(t), y(t)\right) = \left(\dfrac{t\left(3t^2-2\right)}{1-t^2}, \dfrac{t^4}{1-t^2}\right)$, se pide:

a) *Simetrías* de la curva.

b) Ecuaciones de las *asíntotas oblicuas*.

c) *Puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *puntos singulares*.

Solución

29.- Dada la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)} \end{cases}$, se pide:

a) Hallar el *Campo de variación* del parámetro t.

b) Estudiar la existencia de *asíntotas* y en su caso calcularlas.

c) Hallar los *puntos críticos*.

d) Estudiar los *puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *singulares*.

Solución

30.- Dada la curva: $\begin{cases} x\ (t) = \dfrac{1}{t+1} \\ y\ (t) = t^2 + 1 \end{cases}$. Se pide:

a) *Dominio*
b) *Simetrías*
c) *Asíntotas*
d) *Puntos críticos*, *singulares* y de *tangencia vertical* y *horizontal*
e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas
f) *Corte con los ejes* y con las *asíntotas*

Solución

31.- Indicar el *período* de la curva $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

Solución

32.- Dada la curva: $\begin{cases} x\ (t) = \dfrac{t^2}{t+1} \\ y\ (t) = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$. Se pide:

a) *Dominio*
b) *Simetrías*
c) *Asíntotas*
d) *Puntos críticos*, *singulares* y de *tangencia vertical* y *horizontal*
e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas
f) *Corte con los ejes* y con las *asíntotas*

Solución

33.- Indicar el *período* de la curva $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$

Solución

34.- a) *Simetrías* de la curva $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = t + \operatorname{sen} t \end{cases}$.

b) *Asíntotas* de la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{t^2-4} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2-4} \end{cases}$

c) *Periodicidad* de la curva $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$

d) *Puntos de tangencia vertical* de la curva $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$.

e) *Puntos singulares* de la curva $\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t \\ y(t) = t - \operatorname{sen} t \end{cases}$

Solución

35.- a) Sea la curva dada por las *ecuaciones paramétricas*: $\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}(t)}, 4\operatorname{sen}(t)\cos(t)\right)$,

se pide hallar:

i. *Campo de variación* de t

ii. *Asíntotas*

iii. Dar las coordenadas de los puntos de *tangencia horizontal*

b) Sea la curva dada por las *ecuaciones paramétricas*: $[4\cos(t), 4\operatorname{sen}(t)\cos(t)]$,

se pide:

i. Estudiar si la curva es *simétrica* y dar el *periodo* y un intervalo cuya longitud sea igual al periodo

ii. Hallar los *puntos críticos*

iii. Dar las *coordenadas* de los puntos de *tangencia vertical*

Solución

36.- Dada la curva $(2p\cos t + p\cos(2t),\ 2p\operatorname{sen} t - p\operatorname{sen}(2t))$, siendo p una constante p>0, se pide:

a) *Campo de variación* de t.

b) Estudio de *simetrías*.

c) *Periodicidad*.

d) Estudio de la existencia de *asíntotas*.

e) *Puntos críticos* en $[0,\pi]$.

f) Estudio por *ramas* en $[0,\pi]$.

g) Gráfica aproximada.

Solución

37.-Realizar un estudio completo de la curva dada por las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}^2 t \\ y = 2\operatorname{sen}^2 t \cos t \end{cases}$.

Solución

38.- Dada la curva $\left(\dfrac{t}{t-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Estudio de *simetrías*.

c) Estudio de *asíntotas*.

Solución

39.- Dada la curva $\left(\text{sen}(2t), \cos(3t)\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Cálculo de *puntos críticos* en [0, π].

c) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangente horizontal, vertical o singulares.*

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Solución

40.- Dada la curva (sin(2*t*), tg(2*t*)), se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Estudio de *simetrías*.

c) Estudio de la *periodicidad* de la curva. Si fuera periódica, dar un intervalo [a,b] de periodo mínimo.

d) Razonar porqué la curva solo tiene *asíntotas* verticales y hallarlas.

Solución

41.- Dada la curva $\left(\frac{2t^2-3}{t-1}, \frac{t}{(t-1)^2}\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Cálculo de *puntos críticos*.

c) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangente horizontal, vertical o singulares*.

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

Solución

42.- Dada la curva $\left(\ln(t-1), \frac{1}{1-t}\right)$ se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Razonar porqué la curva no es *periódica*.

c) Estudio de *asíntotas*.

Solución

43.- Dada la curva $\left(\cos(2t), \cos(3t)\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Cálculo de *puntos críticos* en [0, π].

c) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangencia horizontal, vertical o singulares*.

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Solución

44.- Dada la curva $\left(e^{t-1}, \operatorname{sen}t\right)$ se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Explica porqué la curva no es *simétrica*.

c) Razona porqué todos los *puntos críticos* de esta curva son de *tangencia horizontal*.

Solución

45.- Dada la curva $\left(\frac{1+t^2}{t^2}, \frac{t}{1-t^2}\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Estudio de *asíntotas*.

c) Cálculo de *puntos críticos*.

d) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangencia horizontal, vertical o singulares*.

e) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $[0,\infty)$

Solución

46.- Dada la curva dada por las *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1+t} \\ y(t) = \dfrac{1-t^2}{t} \end{cases}$, se pide:

a) Hallar el *campo de variación* del parámetro *t*.

b) Estudio de la existencia de *simetrías*.

c) Hallar las *asíntotas* de la curva.

d) Hallar los *puntos críticos*.

e) Calcular los *puntos de tangencia horizontal, vertical y singulares*.

f) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

Solución

47.- Dada la curva expresada por sus *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t(1-t)} \\ y(t) = \dfrac{1}{t(1+t)} \end{cases}$.

a) Estudio de la existencia de *simetrías*.

b) Calcular las ecuaciones de sus *asíntotas*.

c) Los puntos de la curva de *tangencia horizontal* y *vertical*.

d) Estudio del *crecimiento* en las *ramas*: $(-\infty,\ -1)$ y $(1,\ \infty)$.

Solución

48.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = e^{\operatorname{sen} t} \\ y(t) = \cos t \end{cases}$ Se pide:

a) *Campo de variación* de t.
b) *Periodicidad* de la curva.
c) *Simetrías* de la curva:
Al cambiar t por -t
Al cambiar t por -t + π.
d) *Asíntotas*.
e) *Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal* y *vertical, puntos singulares*.
f) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas* en $[0,\ \pi]$.

Solución

49.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = e^{\operatorname{sen} t} \\ y(t) = e^{\cos t} \end{cases}$ Se pide:

a) *Campo de variación* de t.
b) *Periodicidad* de la curva.
c) *Simetrías* de la curva:
Al cambiar t por -t
Al cambiar t por -t + π/2.
d) *Asíntotas*.
e) Para $-\pi \le t \le \pi$, *Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal* y *vertical, puntos singulares*.
f) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas* en $[0,\ \pi]$.

Solución

50.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos)

d) Estudiar su *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas.

Solución

51.- Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{1-t^2}{t} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos).

d) Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas para $t \geq 0$.

Solución

52.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t+4} \\ y(t) = \dfrac{t-3}{t+1} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos).

d) Estudiar su *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*.

Solución

53.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \cos\ t \\ y(t) = \operatorname{sen}(3t) \end{cases}$

a) Calcular su *período*, si lo tiene.

b) Comprobar si tiene *simetrías*.

c) Hallar sus *puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, y puntos singulares* para $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solución

54.- Dada la curva: $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(3t) \\ y(t) = \operatorname{tg}(t) \end{cases}$

a) Calcular su *período*, si lo tiene.

b) Comprobar si tiene *simetrías*.

c) Escribir la definición de *punto crítico, punto de tangencia horizontal, vertical y singular* y hallar en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ los *puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, y puntos singulares* de la curva dada.

Solución

55.- Dada la curva: $\left(\frac{2t^2}{1-t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Estudiar el *crecimiento y decrecimiento* por *ramas* para $t \geq 0$.

Solución

56.- Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$ Se pide:

a) *Simetrías*.
b) *Asíntotas*.
c) *Puntos críticos*.
d) *Puntos de tangencia vertical y horizontal*.
e) *Crecimiento y decrecimiento* por *ramas*.

Solución

57.- Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva: $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(2t) \\ y(t) = \text{tg}(3t) \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.
b) Calcular su *período*, si lo tiene.
c) Comprobar si tiene *simetrías*.
d) Estudiar la existencia de *asíntotas*.

Solución

58.- Las curvas paramétricas se utilizan abundantemente en el campo de computación gráfica. En concreto las curvas de Bézier (ingeniero de la casa Renault) se usan para programas de gráficos estándar como Corel Draw y fuentes de escritura como TrueType. Para n=3, las curvas de Bézier se definen de la siguiente manera:

Dados cuatro"puntos de control" P_0 (a_0,b_0), P_1 (a_1,b_1), P_2 (a_2,b_2), P_3 (a_3,b_3), se define la curva de Bézier (x(t), y(t)) para $0 \leq t \leq 1$, mediante las expresiones

$$\begin{cases} x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3 \\ y(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3 \end{cases}$$ Se pide

a) Hallar unas *ecuaciones paramétricas* de la curva de Bézier cuyos puntos de control son P_0 (1,4), P_1 (3,12), P_2 (6,15), P_3 (7,4).

b) Probar que su pendiente en t=0 es igual a la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$

Solución

59.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t)=2\text{sen }(2t) \end{cases}$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) *Periodicidad*.

c) *Puntos críticos* y estudio de *puntos de tangencia vertical y horizontal* en [0, π].

Solución

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Estudiar y representar la curva $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t(t-3)} \\ y = \dfrac{t^2}{t-3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2-3} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \operatorname{sen}(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$

2. Estudiar y representar la curva (folium de Descartes)

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$ siendo a una constante $a \in \Re$

Solución

1.- Representar la curva dada por $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, siendo a>0.

Solución:

Primer método

Dominio de t: **R**.

Simetrías: $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, luego la curva es **simétrica respecto del eje OY**.

Periodicidad: $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi a \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$,luego la y es una función periódica de t, de período 2π.

Teniendo en cuenta los dos párrafos anteriores, basta estudiar la curva para valores de $t \in [0, \pi]$.

Asíntotas: Evidentemente no posee ninguna.

Puntos críticos: $\begin{cases} x'(t) = a(1-\cos\ t)=0 \Rightarrow t=0 \\ y'(t)=a \text{ sen } t=0 \Rightarrow t=0,\ t=\pi \end{cases}$; luego, en $[0, \pi]$ sólo tenemos dos puntos críticos **$t = 0,\ t=\pi$**.

Ramas de la curva: Sólo tenemos **una rama**, la correspondiente a $t \in (0, \pi)$.

Para t = 0, se obtiene el punto (0, 0); para t = π, se obtiene el punto (aπ, 2a).

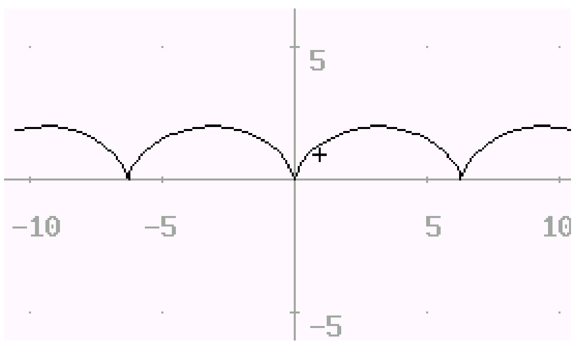
$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\text{sen } t}{1\text{-cos } t}$$

$$\begin{cases} x''(t) = a \text{ sen } t \\ y''(t)=a \cos t \end{cases} \Rightarrow y''(x)=\frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos\ t)^2}$$

Crecimiento y concavidad de la única rama:

Dominio de variación de t	Valores correspondientes de x	Valores correspondientes de y	signo de $y'(x)$	signo de $y''(x)$
$0 < t < \pi$	$0 < x < \pi a$ $x'(t) > 0$ x crece respecto de t	$0 < y < 2a$ $y'(t) > 0$ y crece respecto de t	$y'(x) > 0$ **y crece respecto de x**	$y''(x) < 0$ curva convexa

Con el estudio anterior, podemos hacer un dibujo aproximado de la curva:



Esta curva se denomina ***cicloide***; representa la trayectoria de un punto de una circunferencia que rodara sin deslizarse sobre una recta.

Segundo método

Dominio de definición: R

Campo de variación $\left| \begin{array}{l} \text{de } x{:}R \\ \text{de } y{:}-1 \le \cos t \le 1 \Rightarrow 2a \ge y \ge 0 \end{array} \right.$

Simetría (ver primer método)

Periodicidad (ver primer método).
Basta estudiar la curva para $t \in [0, \pi]$.

Asíntotas: No hay.

Estudio de derivadas (están calculadas arriba):

Puntos de tangencia vertical: $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \\ y'(t) \ne 0 \Rightarrow t \ne 0,\ t \ne \pi \end{cases} \Rightarrow$ No hay.

Puntos de tangencia horizontal: $\begin{cases} x'(t) \ne 0 \Rightarrow t \ne 0 \\ y'(t)=0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pi \end{cases} \Rightarrow t = \pi \Rightarrow P_1 = (\pi a, 2a)$.

Puntos singulares: $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \\ y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pi \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow P_2 = (0,0)$

$\begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = a \end{cases}$, $\begin{cases} x'''(t) = a \cos t \Rightarrow x'''(0) = a \\ y'''(t) = -a \operatorname{sen} t \Rightarrow y'''(0) = 0 \end{cases}$

Así, $\left\{ \vec{F''}(0), \vec{F'''} \right\} = \{(0, a), (a,0)\}$ son dos vectores no proporcionales y por tanto, **el origen es un punto de retroceso de primera especie.**

Tangente en el punto de retroceso: Recta que pasa por el punto $P_2 = (0,0)$ y es paralela al vector $\vec{F''}(P_2) = (0, a)$. **Se trata por tanto del eje OY.**

Crecimiento y decrecimiento: $\begin{cases} x'(t) \ge 0 \Rightarrow x \text{ es creciente en } t \\ y'(t) \ge 0 \Rightarrow y \text{ es creciente en } t \end{cases}$

Cortes con los ejes:

***Con* OX**: $x(t) = 0 \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow P_2 = (0,0)$

***Con* OY**: $y(t) = 0 \Rightarrow t=\operatorname{sen} t \underset{t\in[0,\pi]}{\Rightarrow} t=0 \Rightarrow P_2 = (0,0)$

Tabla:

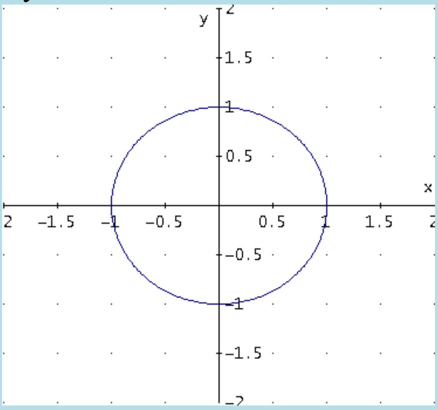
t	0		π
x'	0	+	2a
y'	0	+	0
x	0	crece	πa
y	0	crece	2a

Gráfica (ver primer método)

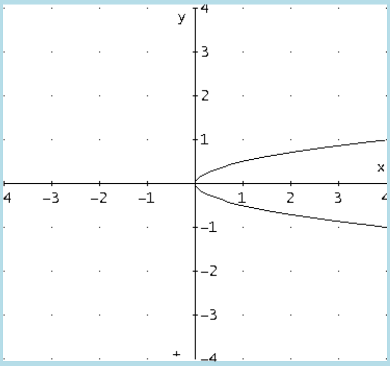
2.- Emparejar cada curva con su gráfica

a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases}$

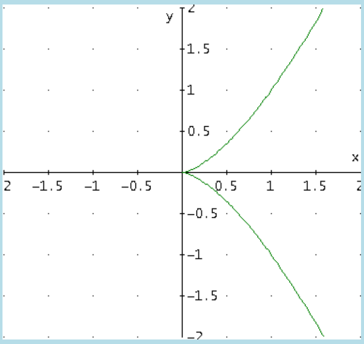
α)



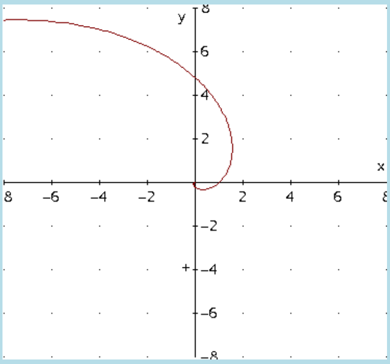
β)



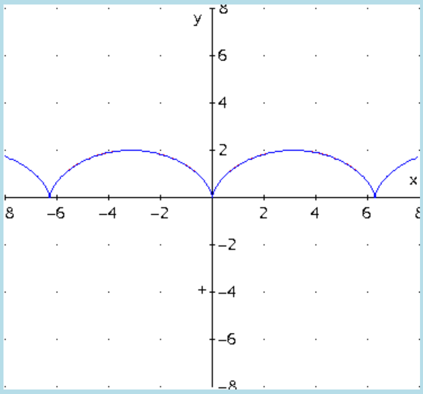
γ)



δ)

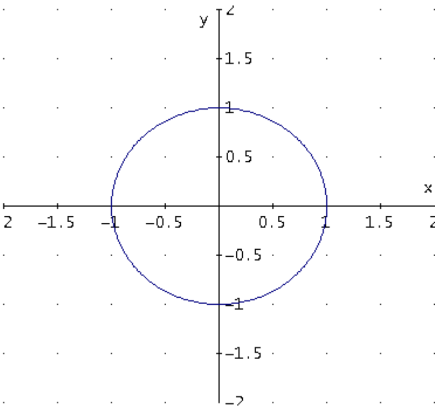


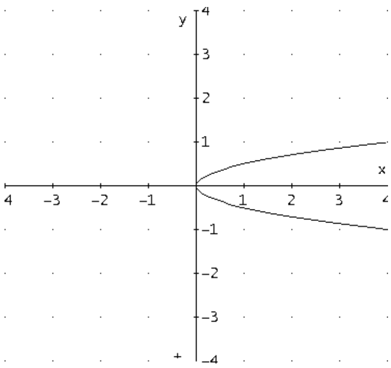
ε)



Solución:

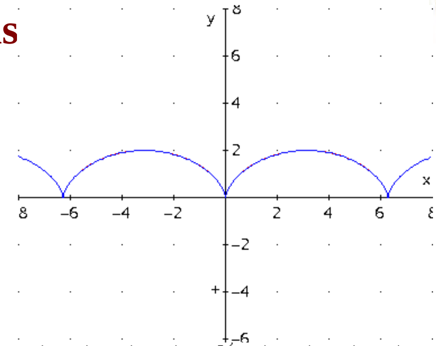
e) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ α) b) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{\pm\sqrt{x}}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{x}{4} \Rightarrow$ β)





c) $\begin{cases} x = t - sent \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ cicloide

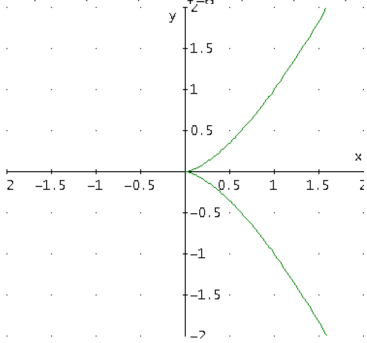
ε)



x(-t)=-x(t)
y(-t)=y(t)
simétrica respecto el eje de ordenadas

a) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^3$

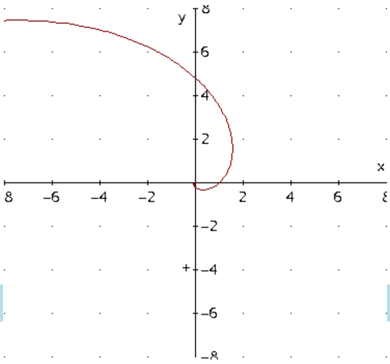
γ)



simétrica respecto el eje de abscisas.

d) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t sent \end{cases}$

δ)



3.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = \cos t + \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

Solución:

Dominio: **R**

Simetrías

$\begin{cases} x\ (-t) = \cos t - \operatorname{sen} t \neq \pm x(t) \\ y\ (-t) = y\ (t) \end{cases}$ no se deduce simetrías.

Periodicidad: $\begin{cases} \text{Período de la x: } 2\pi \\ \text{Período de la y: } 2\pi \end{cases} \Rightarrow$ La curva es periódica de período $T = 2\pi$ $\Rightarrow$ Basta estudiar la curva para $t \in [0, 2\pi]$.

Asíntotas: No hay, pues $|x| \leq 2$ y $|y| \leq 1$.

Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

x'(t)=cost-sent=0; sent=cost$\Rightarrow$ $\operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; t = \frac{5\pi}{4}$ puntos de tangencia vertical.

y'(t)=2costsent=0; $\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ puntos de tangencia horizontal.

Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	x(t)=cost+sent	y(t)=sen^{2}t	x'(t)=cost-sent	y'(t)=2costsent	y'(x)=y'(t)/x'(t)
0	1	0	1	0	0
$0<t<\frac{\pi}{4}$	Crece	Crece	+	+	↑
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	½	0	1	no existe
$\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$	decrece	Crece	+	-	↓
$\frac{\pi}{2}$	1	1	-1	0	0
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	decrece	decrece	-	-	↑
π	-1	0	-1	0	0
$\pi < t < \frac{5\pi}{4}$	decrece	Crece	-	+	↓
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$	½	0	1	no existe
$\frac{5\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{2}$	Crece	Crece	+	+	↑
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1	1	0	0
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	Crece	decrece	+	1	↓
2π	1	0	1	0	0

Puntos de tangencia horizontal: (1,0); (1,1); (-1,0); (-1,1);

Puntos de tangencia vertical: $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right);\left(-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$

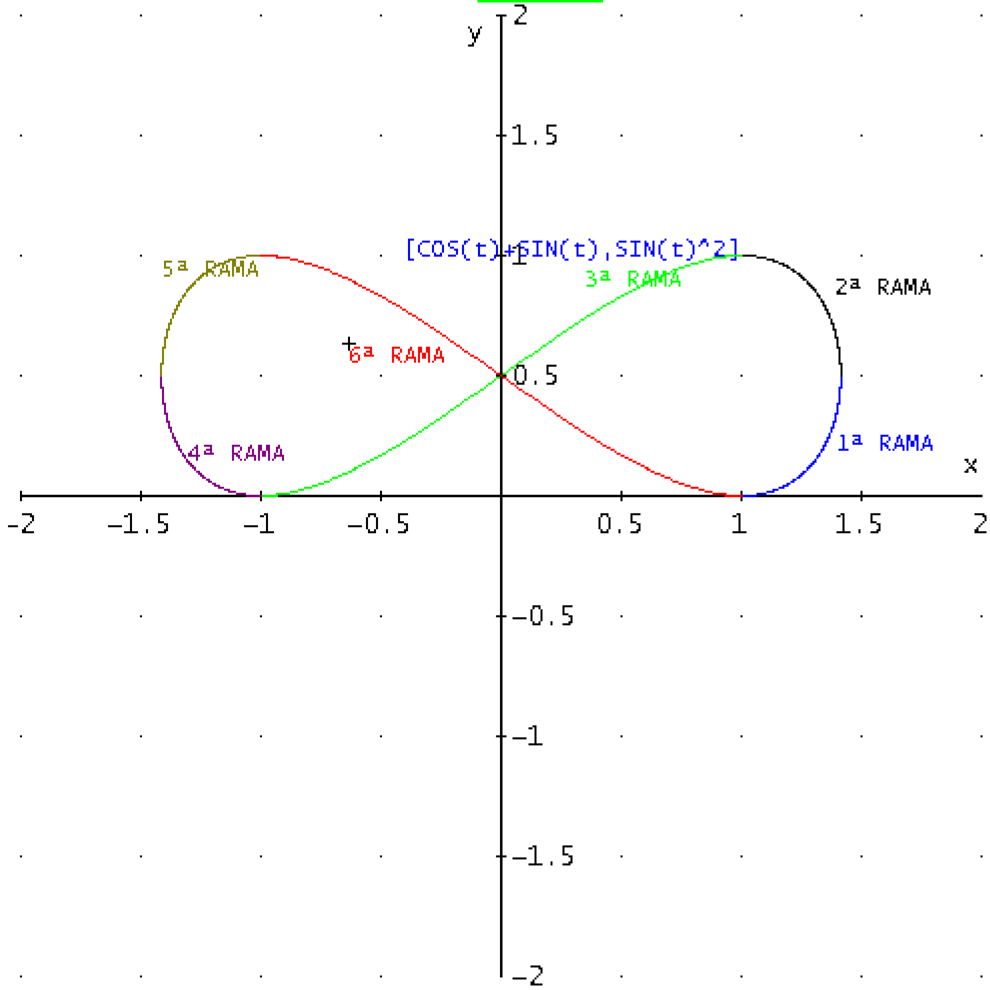
Cortes con los ejes

Con OX:

$$y=\text{sen}^2 t=0 \Rightarrow \text{sen}t=0 \Rightarrow t=\begin{cases}0\\ \pi\\ 2\pi\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}t=0 \Rightarrow P_1(1,0)\\ t=\pi \Rightarrow P_4(-1,0)\\ t=2\pi \Rightarrow P_7(1,0)\end{cases}}$$

Con OY:

$x=\cos t+\text{sen}t=0 \Rightarrow \text{sen}t=-\cos t \Rightarrow t=\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \boxed{P(0,1/2)}$ punto doble.



Concavidad y convexidad:

$y''(x)=\frac{dy'(x)/dt}{dx/dt}=2\frac{\cos^3 t+\text{sen}^3 t}{(\cos t-\text{sen}t)^3}=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}$ cuya derivada se anula o no existe.

t	$(0,\pi/4)$	$(\pi/4,3\pi/4)$	$(3\pi/4,5\pi/4)$	$(5\pi/4,7\pi/4)$	$(7\pi/4,2\pi)$
y’’(x)	+	-	+	-	+
	cóncava	convexa	cóncava	convexa	cóncava

Puntos de inflexión: $\left(\sqrt{2},1\right);(0,\frac{1}{2});\left(-\sqrt{2},1\right);\left(0,\frac{1}{2}\right)$

4.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t-3} \\ y = \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} \end{cases}$$

***Solución*:**
Dominio: **R-{-2,3}**
Simetrías

$$\begin{cases} x\ (-t) = \dfrac{-t}{-t-3} = \dfrac{t}{t+3} \neq \pm x(t) \\ y\ (-t) = \dfrac{-t}{(t+2)(-t-3)} \end{cases}$$ no se deduce simetrías.

Periodicidad
Las funciones no son periódicas.
Asíntotas
Buscaremos las asíntotas considerando los límites de las funciones cuando $t \to -\infty; t \to \infty; t \to -2; t \to 3$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{t-3} = 1 \\ \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = 0 \end{cases} \Rightarrow P(1,0)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{t-3} = 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = 0 \end{cases} \Rightarrow P(1,0)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to-2^-} x(t) = \lim\limits_{t\to-2^-} \dfrac{t}{t-3} = \dfrac{2}{5};\ \lim\limits_{t\to-2^+} x(t) = \lim\limits_{t\to-2^+} \dfrac{t}{t-3} = \dfrac{2}{5} \\ \lim\limits_{t\to-2^-} y(t) = \lim\limits_{t\to-2^-} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = -\infty;\ \lim\limits_{t\to-2^+} y(t) = \lim\limits_{t\to-2^+} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = \infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{2}{5}}$$ Asíntota vertical.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to3^-} x(t) = \lim\limits_{t\to3^-} \dfrac{t}{t-3} = -\infty;\ \lim\limits_{t\to3^+} x(t) = \lim\limits_{t\to3^+} \dfrac{t}{t-3} = \infty \\ \lim\limits_{t\to3^-} y(t) = \lim\limits_{t\to3^-} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = -\infty;\ \lim\limits_{t\to3^+} y(t) = \lim\limits_{t\to3^+} \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = \infty \\ \lim\limits_{t\to3} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to3} \dfrac{\dfrac{t}{(t+2)(t-3)}}{\dfrac{t}{(t-3)}} = \lim\limits_{t\to3} \dfrac{1}{(t+2)} = \dfrac{1}{5} = m \\ \lim\limits_{t\to3} (y(t) - mx) = \lim\limits_{t\to3} \left(\dfrac{t}{(t+2)(t-3)} - \dfrac{1}{5}\dfrac{t}{(t-3)} \right) = \lim\limits_{t\to3} \left(-\dfrac{t}{5(t+2)} \right) = -\dfrac{3}{25} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{25}}$$

y=1/5x-3/25 es una Asíntota oblicua.
No hay asíntotas horizontales.

Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{3}{(t-3)^2} < 0 \\ y'(t) = -\dfrac{t^2+6}{(t+2)^2(t-3)^2} < 0 \end{cases}$$

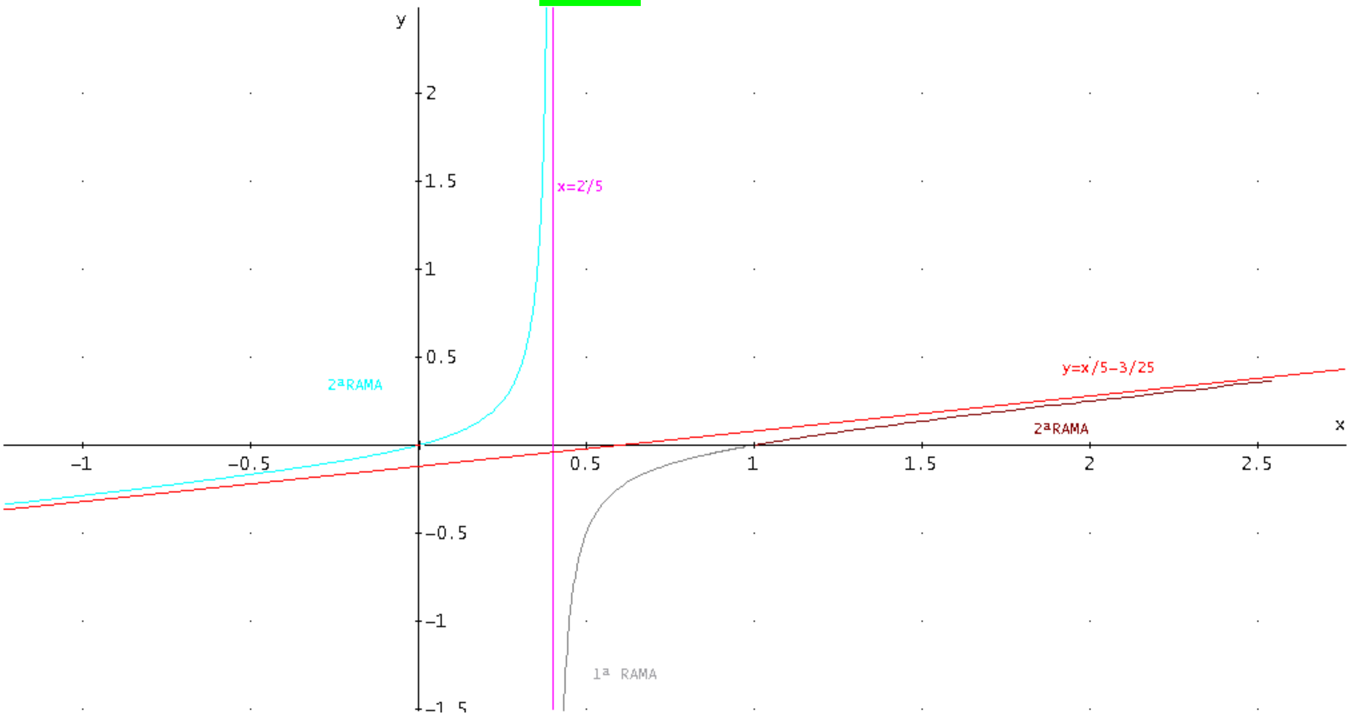
Puntos críticos cuando $t \to -2; t \to 3$

Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	t<-2	-2<t<3	3<t
x(t)	1>x>2/5	2/5>x>-∞	-∞<x<∞
y(t)	0>y>-∞	∞>y>-∞	-∞<y<∞
x'(t)	-	-	-
y'(t)	-	-	-
y'(x)=y'(t)/x'(t)	↑	↑	↑

Cortes con los ejes

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t-3} = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y(0) = 0 \\ y = \dfrac{t}{(t+2)(t-3)} = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{O(0,0)}$$



se trata de una hipérbola. Si despejamos t en función de x y sustituimos en y resulta la expresión x^2-5xy-x+2y=0 de una cónica.

5.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}(t) - \text{sen}(2t) \\ y = 2\cos(t) - \cos 2t \end{cases}$

Solución:

Campo de variación de t: R

Periodicidad: Periodica de periodo 2π

Simetrías al cambiar t por −t:

SIMÉTRICA RESPECTO DEL EJE OY, x(−t)=−x(t); y(−t)=y(t)

Por ser simétrica y periódica de periodo 2π, basta estudiar entre 0 y π

No hay asíntotas por ser funciones acotadas.

#1: $\frac{d}{dt}[2\cdot SIN(t) - SIN(2\cdot t),\ 2\cdot COS(t) - COS(2\cdot t)]$

#2: $[2\cdot COS(t) - 2\cdot COS(2\cdot t),\ 2\cdot SIN(2\cdot t) - 2\cdot SIN(t)]$

#3: SOLVE(2·COS(t) − 2·COS(2·t), t, Real)

#4: $t = -\frac{2\cdot\pi}{3} \vee t = \frac{2\cdot\pi}{3} \vee t = -2\cdot\pi \vee t = 2\cdot\pi \vee t = 0$

#5: SOLVE(2·SIN(2·t) − 2·SIN(t), t, Real)

#6: $t = -\frac{\pi}{3} \vee t = \frac{\pi}{3} \vee t = -2\cdot\pi \vee t = 2\cdot\pi \vee t = \pi \vee t = 0$

#7: $[2\cdot SIN(0) - SIN(2\cdot 0),\ 2\cdot COS(0) - COS(2\cdot 0)]$

#8: $[0,\ 1]$

#9: $\left[2\cdot SIN\left(\frac{\pi}{3}\right) - SIN\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right),\ 2\cdot COS\left(\frac{\pi}{3}\right) - COS\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right]$

#10: $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right]$

#11: $\left[2\cdot SIN\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) - SIN\left(2\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right),\ 2\cdot COS\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) - COS\left(2\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}\right)\right]$

#12: $\left[\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right]$

#13: $[2\cdot SIN(\pi) - SIN(2\cdot\pi),\ 2\cdot COS(\pi) - COS(2\cdot\pi)]$

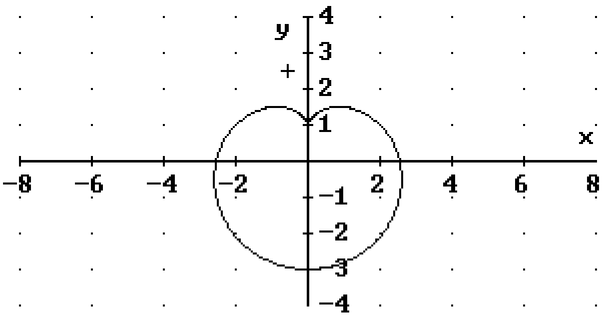
#14: $[0,\ -3]$

Puntos críticos: 0, π/3, 2π/3, π

Puntos de tangencia horizontal:
(√3/2,3/2) para t=π/3;
(0,−3) para t=π.

Puntos de tangencia vertical:
(3√3/2.−1/2) para t=2π/3.

Puntos singulares (0,1) para t= 0



6.- Realizar el estudio analítico y representar gráficamente la curva $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \text{sen}^3 t \end{cases}$ **donde a>0.**

***Solución*:**

Dominio: **R**

Simetrías

$$\begin{cases} x\,(-t) = x(t) \\ y\,(-t) = -y\,(t) \end{cases}.$$

x (- t) = a $\cos^3$ (- t) = a $\cos^3$ (t) No cambia signo

y (- t) = a sen^3 (- t) = - a sen^3 (t) Cambia signo

Luego: es **simétrica respecto el eje OX**

Periodicidad

$\begin{cases} \text{Período de la x: } 2\pi \\ \text{Período de la y: } 2\pi \end{cases} \Rightarrow$ La curva es periódica de período T $= 2\pi$ $\Rightarrow$ Basta estudiar la curva para $t \in [0, 2\pi]$.

¿Qué intervalo se debe tomar para el estudio de la curva?

Consideraciones que se debe tener en cuenta:

1. La función es simétrica respecto el eje OX.
2. La amplitud del intervalo es 2π.

El intervalo será:[0, π],ya que para t y (–t), las x coinciden.

Asíntotas

No hay, pues $|x| \le a$ y $|y| \le a$.

Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

$$x'(t) = -a \cdot 3\cos^2 t \cdot \text{sen}\, t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \Rightarrow t = \text{arc cos } 0 = \begin{cases} 90^\circ = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ \text{sen}\, t = 0 \Rightarrow t = \text{arc sen } 0 = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ = \pi \end{cases} \end{cases}$$

$$y'(t) = a \cdot 3\,\text{sen}^2 t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, t = 0 \Rightarrow t = \text{arc sen } 0 = \begin{cases} 0^\circ \\ \pi \end{cases} \\ \cos t = 0 \Rightarrow t = \text{arc cos } 0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Rama	x(t)	y(t)	x'(t)	y'(t)	$y'_x = y'(t)/x'(t)$
0º<t<90º	a>x>0	0< y < a	-	+	- ↓
90º<t<180º	0>x >-a	a > y >0	-	-	+ ↑

Estudio de los puntos singulares

- $x'(t) = -3 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t$
- $x''(t) = 3 \cdot a \cdot 2 \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} t + \cos t \cdot (-3 \cdot a \cdot \cos^2 t) =$
  $= 6 \cdot a \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t - 3 \cdot a \cdot \cos^3 t$
- $x'''(t) = -6 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen}^2 t + 6 \cdot a \cdot \cos t \cdot 2 \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t + 9 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t =$
  $= -6 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^3 t + 12 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t + 9 \cdot a \cdot \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t$
- $y'(t) = 3 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$
- $y''(t) = 3 \cdot a \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos t \cdot \cos t + 3 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot (-\operatorname{sen} t) =$
  $= 6 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos^2 t - 3 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^3 t$
- $y'''(t) = 6 \cdot a \cdot \operatorname{sen} t \cdot 2 \cdot \cos t \cdot (-\operatorname{sen} t) + 6 \cdot a \cdot \cos t \cdot \cos^2 t - 3 \cdot a \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t =$
  $= -12 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t + 6 \cdot a \cdot \cos^3 t - 9 \cdot a \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$

en particular para **t=0**: $\vec{F}(x''(0), y''(0)) = (-3a, 0)$; $\vec{F}(x'''(0), y'''(0)) = (0, 6a)$ no son proporcionales, punto de retroceso de 1ª especie y de **tangente horizontal**.

para $t=\pi/2$: $\vec{F}(x''(\pi/2), y''(\pi/2)) = (0, -3a)$; $\vec{F}(x'''(\pi/2), y'''(\pi/2)) = (-6a, 0)$ no son proporcionales, punto de retroceso de 1ª especie y de **tangente vertical**.

para $t=\pi$: $\vec{F}(x''(\pi), y''(\pi)) = (-a, 0)$; $\vec{F}(x'''(\pi), y'''(\pi)) = (0, -6a)$ no son proporcionales, punto de retroceso de 1ª especie y de **tangente horizontal**.

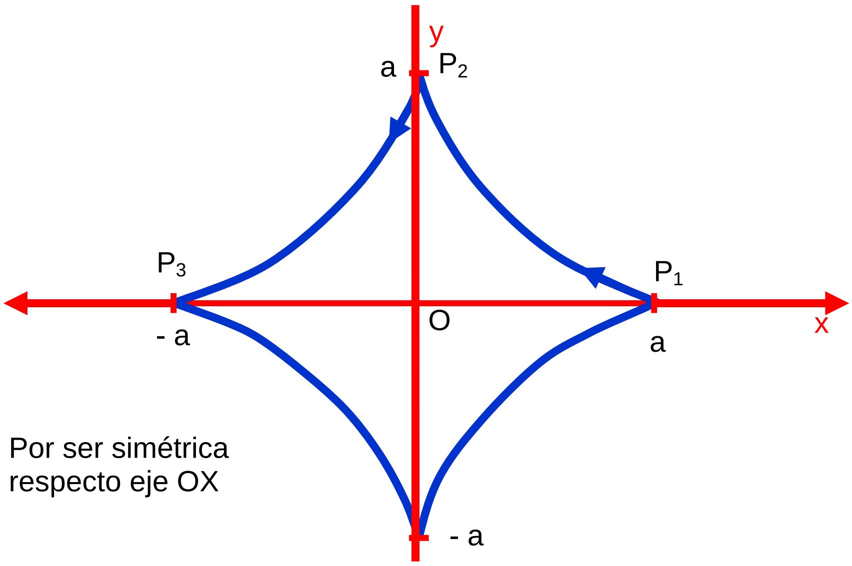
Concavidad y convexidad:

$y'_x = y'(t)/x'(t) = -\operatorname{tg} t$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)/dt}{dx/dt} = -\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{-3a\operatorname{sen} t\cos^2 t} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{3a\operatorname{sen} t\cos^2 t} > 0; \forall t \in [0, \pi]$$ **cóncava en el primer y segundo cuadrante.**

ASTROIDE

Gráfica



7.- Se considera la curva de ecuación: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{4t+2}{t(t+2)} \end{cases}$. Estudiar:

a) *Simetrías* de la curva.
b) *Asíntotas*.
c) *Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal* y *vertical, puntos singulares*.
d) *Crecimiento* y *decrecimiento* de la curva por *ramas*.
e) *Puntos de cortes con los ejes* coordenados.
f) Dibujo aproximado de la curva.

Solución:

a)

#1: $\left[\dfrac{t^2-1}{t}, \dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)}\right]$

#2: $\left[\dfrac{1-t^2}{t}, \dfrac{2\cdot(2\cdot t-1)}{t\cdot(2-t)}\right]$

No tiene simetrías.

b)

#3: $\lim\limits_{t\to-\infty} \left[\dfrac{t^2-1}{t}, \dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)}\right]$

#4: $[-\infty, 0]$ y=0 asíntota horizontal.

#5: $\lim\limits_{t\to-2} \left[\dfrac{t^2-1}{t}, \dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)}\right]$

#6: $\left[-\dfrac{3}{2}, \pm\infty\right]$

x=-3/2 asíntota vertical.

#7: $\lim\limits_{t\to0} \left[\dfrac{t^2-1}{t}, \dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)}\right]$

#8: $[\pm\infty, \pm\infty]$

#9: $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)}}{\dfrac{t^2-1}{t}}$

#10: -1

#11: $\lim\limits_{t\to0} \left(\dfrac{4\cdot t+2}{t\cdot(t+2)} + \dfrac{t^2-1}{t}\right)$

#12: $$\frac{3}{2}$$

y=-x+3/2 asíntota oblicua.

c)

#13: $$\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2 - 1}{t}, \frac{4\cdot t + 2}{t\cdot(t + 2)}\right]$$

#14: $$\left[\frac{t^2 + 1}{t^2}, - \frac{4\cdot(t^2 + t + 1)}{t^2\cdot(t + 2)^2}\right]$$

#15: $$\frac{t^2 + 1}{t^2} > 0$$

#16: true

#17: $$\text{SOLVE}\left(- \frac{4\cdot(t^2 + t + 1)}{t^2\cdot(t + 2)^2} < 0, t, \text{Real}\right)$$

#18: true

Puntos críticos para t=-2 y t=0

No hay puntos de tangencia horizontal, ni vertical. No hay puntos singulares.

d) La curva es siempre decreciente, puesto que y'(x)<0

#19: $$\text{SOLVE}\left(\frac{t^2 - 1}{t}, t, \text{Real}\right)$$

#20: $t = -1 \vee t = 1$

#21: [0, 2]

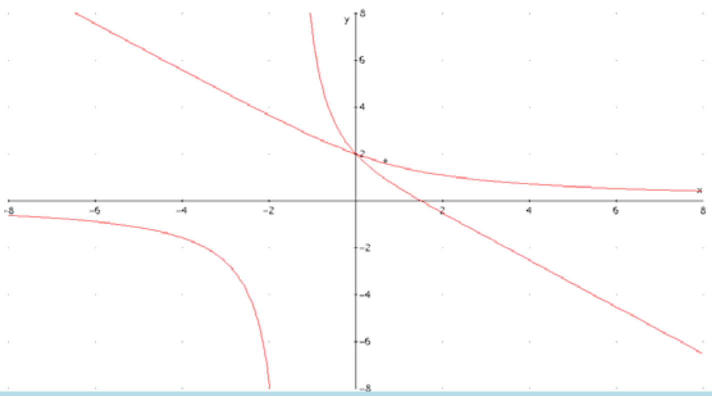
e) Punto de corte con el eje de ordenadas: (0,2) que además es doble.

#22: $$\text{SOLVE}\left(\frac{4\cdot t + 2}{t\cdot(t + 2)}, t, \text{Real}\right)$$

#23: $$t = \pm\infty \vee t = - \frac{1}{2}$$

Punto de corte con el eje de abscisas (3/2,0)

f)



8.- Hacer un estudio y representar gráficamente la curva: $\begin{cases} x(t) = \text{sen}\ (2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$

***Solución*:**

a.- Dominio: $\boxed{\mathbb{R}}$

b.- Simetrías

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, curva $\boxed{\textbf{simétrica respecto al eje OY}}$; basta estudiar $t \in [0,\infty)$ y completar la gráfica por simetría.

c.- Periodicidad

$\begin{cases} \text{Período de la } x: \dfrac{2\pi}{2} = \pi \\ \text{Período de la } y: \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$ La curva es periódica de período $T = \text{mcm}\left(\pi, \dfrac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2\pi} \Rightarrow$ Basta estudiar la curva para $t \in [-\pi, \pi]$. Por tanto, teniendo en cuenta la simetría, haremos variar t en $[0,\pi]$ y completaremos la gráfica por simetría.

d.- Asíntotas

No hay, pues $|x| \le 1$ y $|y| \le 1$.

e.- Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

$$\begin{cases} x'(t) = 2\cos(2t) = 0 \Rightarrow 2t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}, \text{pues } 2t \in [0,2\pi] \\ y'(t) = -3\,\text{sen}(3t) \Rightarrow 3t = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \\ 3\pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{2\pi}{3} \\ \pi \end{cases}, \text{pues } 3t \in [0,3\pi] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow P_1(0,1) \\ t_2 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow P_2\left(1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ t_3 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow P_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) \\ t_4 = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow P_4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ t_5 = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow P_5\left(-1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ t_6 = \pi \Rightarrow P_6(0,-1) \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Puntos de tangencia horizontal: } P_1, P_3, P_4 \text{ y } P_6 \\ \text{Puntos de tangencia vertical: } P_2 \text{ y } P_5 \end{cases}$$

Puntos singulares: No hay

Puntos críticos: $t_1 = 0 < t_2 = \frac{\pi}{4} < t_3 = \frac{\pi}{3} < t_4 = \frac{2\pi}{3} < t_5 = \frac{3\pi}{4} < t_6 = \pi$

f.- Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	(x, y)	x'	y'	y'(x)	y(x)
$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$(0,1) \to \left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	+	-	-	$1 \downarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$	-	-	+	$-1 \uparrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right) \to \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$	-	+	-	$1 \downarrow -1$
$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right) \to \left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	-	-	+	$\frac{\sqrt{2}}{2} \uparrow 1$
$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$	$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to (0,-1)$	+	-	-	$\frac{\sqrt{2}}{2} \downarrow -1$

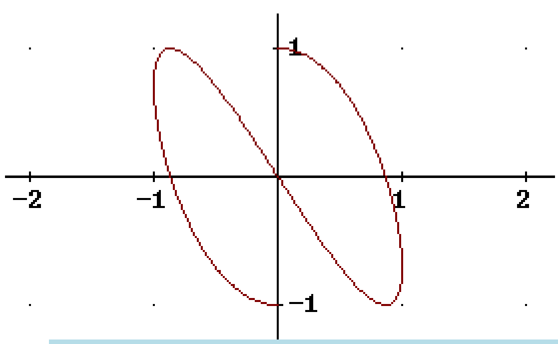
$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_4(0,0)$

g.- Cortes con los ejes

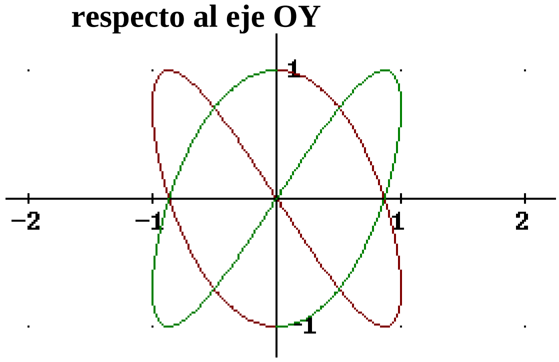
Con OY: $x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2t) = 0 \Rightarrow 2t = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow P_1(0,1) \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_7(0,0) \\ t = \pi \Rightarrow P_6(0,-1) \end{cases}$

Con OX: $y = 0 \Rightarrow \cos(3t) = 0 \Rightarrow 3t = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P_8\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right) \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_7(0,0) \\ t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow P_9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right) \end{cases}$

h.- Gráfica para $t \in [0, \pi]$



i.- Gráfica completando por simetría respecto al eje OY



9.- Hacer el estudio de la siguiente curva y representarla gráficamente

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}(2t) \\ y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

***Solución*:**

Dominio: Teniendo en cuenta que la tangente no está definida en $\frac{\pi}{2}$ resulta:

$$\frac{t}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t \neq (2k+1)\pi, k \in Z$$

Simetrías

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ **simétrica respecto el origen**.

Periodicidad

$\begin{cases} \text{Período de la x: } \pi \\ \text{Período de la y: } 2\pi \end{cases}$ $\Rightarrow$ La curva es periódica de período T $= 2\pi$ $\Rightarrow$ Basta estudiar la curva para $t \in [0, \pi]$.

Asíntotas

En los puntos que no son del dominio de t:

$\lim\limits_{t\to\pi} x(t) = \lim\limits_{t\to\pi} \operatorname{sen} 2t = 0$; $\lim\limits_{t\to\pi^-} y(t) = \lim\limits_{t\to\pi^-} \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) = \infty$ Por tanto **x=0 es una asíntota vertical**

Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

x'(t)=2cos(2t)=0 $\Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; t = \frac{3\pi}{4}$ **puntos de tangencia vertical**.

y'(t)=(1+tg^2(t/2))/2>0; no hay puntos de tangencia horizontal.

No hay puntos singulares.

Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	x(t)=sen(2t)	y(t)=tg(t/2)	x'(t)=2cos(2t)	y'(t)=(1+tg$^{2(}$t/2))/2	y'(x)=y'(t)/x'(t)
0	0	0	2	1/2	1/4
$0<t<\frac{\pi}{4}$	Crece	Crece	+	+	↑
$\frac{\pi}{4}$	1	$\sqrt{2}-1$	0	$2-\sqrt{2}$	no existe
$\frac{\pi}{4}<t<\frac{3\pi}{4}$	decrece	Crece	-	+	↓
$\frac{3\pi}{4}$	-1	$\sqrt{2}+1$	0	$\sqrt{2}+2$	no existe
$\frac{3\pi}{4}<t<\pi$	crece	crece	+	+	↑
π	0	∞			

Puntos de tangencia vertical: $\boxed{\left(1,\sqrt{2}-1\right)}$; $\boxed{\left(-1,\sqrt{2}+1\right)}$

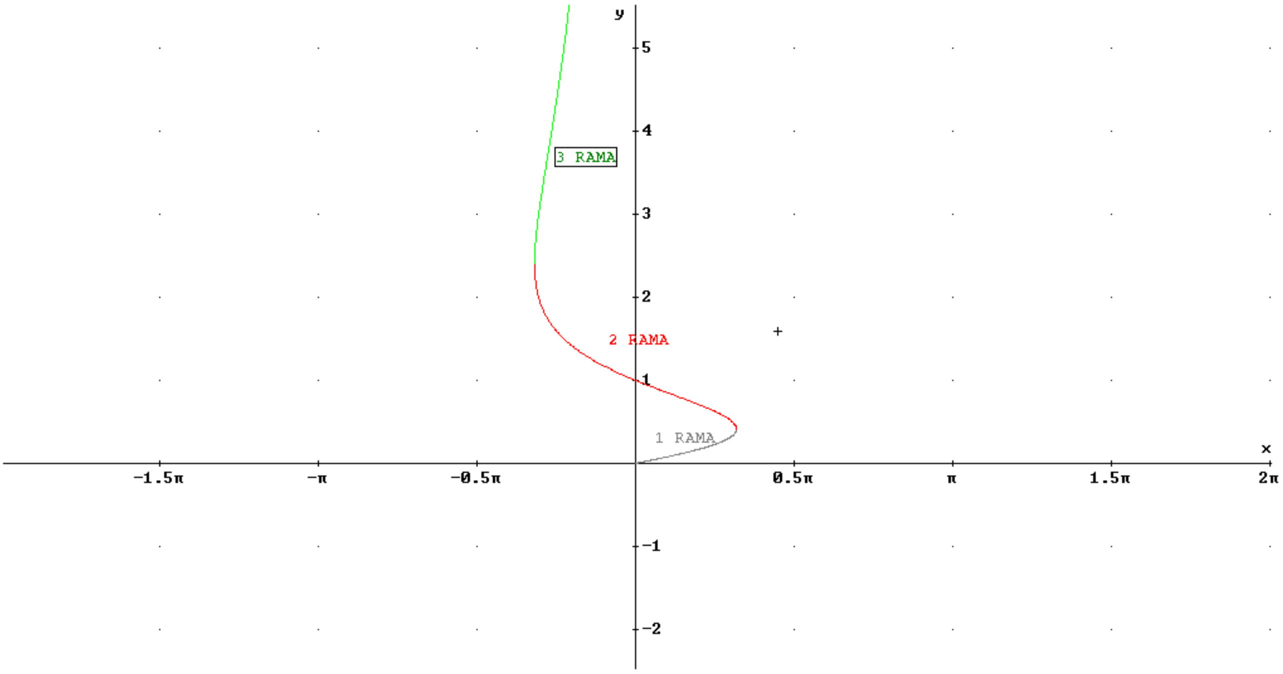
Cortes con los ejes

Con OX:

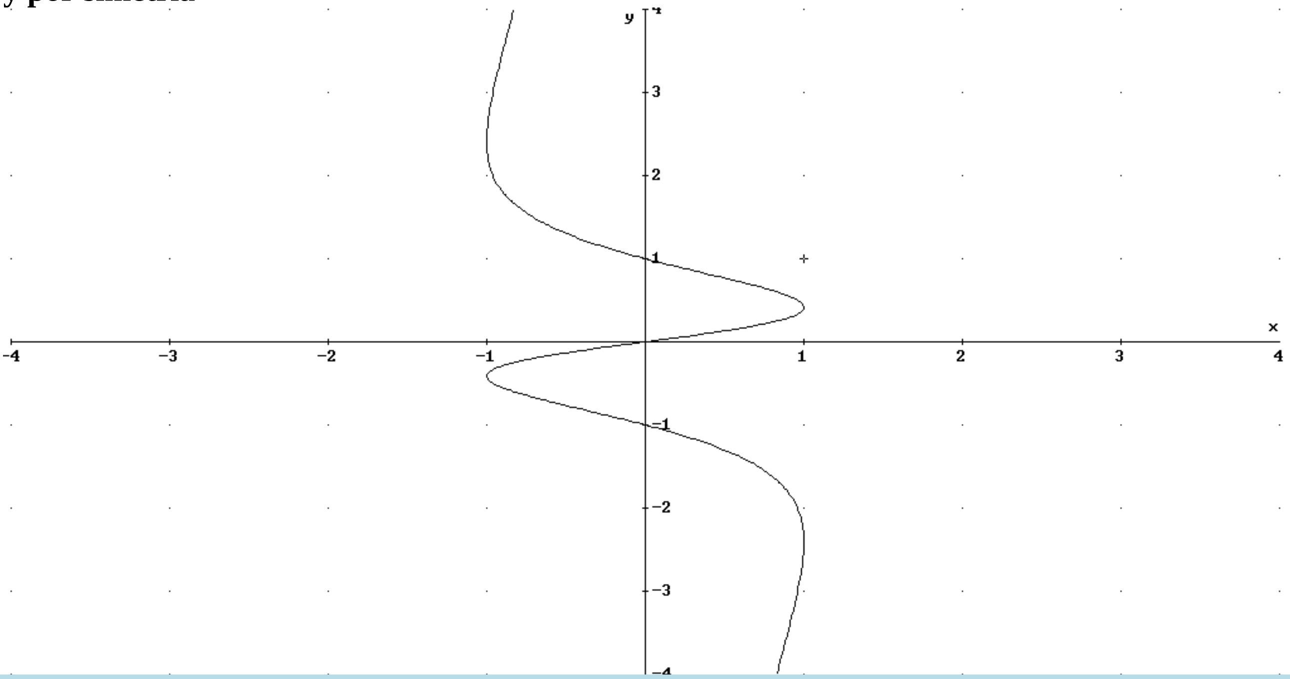
$$y(t)=tg(t/2)=0 \Rightarrow \frac{t}{2}=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases} \Rightarrow t=\begin{cases}0\\ 2\pi\end{cases} \Rightarrow O(0,0).$$

Con OY:

$$x(t)=sen(2t)=0 \Rightarrow 2t=\begin{cases}0\\ \pi\\ 2\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=0 \Rightarrow O(0,0)\\ t=\pi/2 \Rightarrow P(0,1)\\ t=\pi \Rightarrow \text{asíntota vertical}\end{cases}$$



y por simetría



10.- De la curva dada por sus *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\cos(t)} \\ y(t) = e^{\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}} \end{cases}$$

Obtener:

1.- *Campo de variación* de t
2.- *Periodicidad*
3.- *Simetrías*
4.- *Asíntotas*
5.- *Puntos críticos*
6.-Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento*, *máximos* y *mínimos relativos*
7.-Representar aproximadamente la curva

Solución:

1) $\boxed{t \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}}$

2) cos(t) es periódica de periodo **2π** y tg(t) es periódica de periodo π. El periodo de la curva es el mínimo común múltiplo: 2π. Por tanto, basta estudiar el intervalo [-π, π].

3) x(-t)=x(t) pero $y(-t) = e^{\frac{1}{tg(-t)}} = e^{\frac{1}{-tg(t)}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{tg(t)}}} = \dfrac{1}{y(t)}$ que no coincide con y(t) ni con –y(t). Por tanto, la función **no es simétrica.**

4) Asíntotas

Asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas no puede haber pues x(t) es una función acotada.
Cálculo de los límites en los puntos t=-π, 0, π.

t=- π : $\lim\limits_{t \to -\pi^+} y(t) = +\infty$

$x(-\pi) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$ **Asíntota vertical**

t=0 : $\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^-} y(t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = +\infty \end{cases}$ $x(0) = e \approx 2{,}718$ **Asíntota vertical**

t= π: $\lim\limits_{t \to +\pi^-} y(t) = 0$

5) Puntos críticos

$x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -e^{\cos(t)} \operatorname{sen}(t)$ $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(t) = 0 \Rightarrow t = -\pi, 0, \pi \\ \exists x'(t), \forall t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

$y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = -\dfrac{e^{\frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)}}}{\operatorname{sen}^2(t)}$ $\begin{cases} y'(t) \neq 0, \forall t \in [-\pi, \pi] \\ \exists y'(t), excepto, t \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$

puntos críticos: $t \in \{-\pi, 0, \pi\}$. Se denominará: rama 1: [-π,0] y rama 2: [0,π]

6) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos

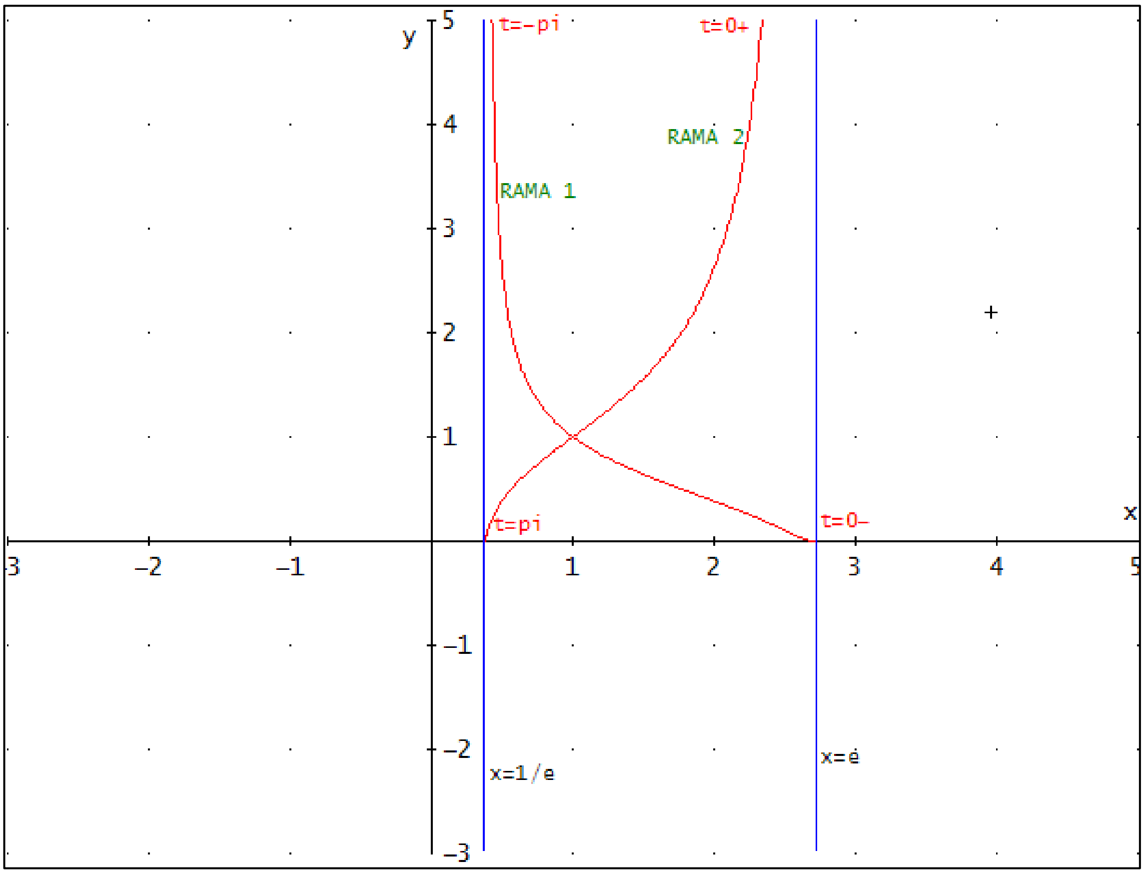
t	**-π⁺**	**(-π,0)**	**0⁻**	**0⁺**	**(0, π)**	**π⁻**
(x,y)	(1/e,∞)		(e,0)	(e,+∞)		(1/e,0)
x'(t)	0	+	0	0	-	0
y'(t)	-∞	-	0	-∞	-	0
f'(x)=y'(t)/x'(t)		- ↘	→		+ ↗	→

Tomando un punto dentro de cada rama

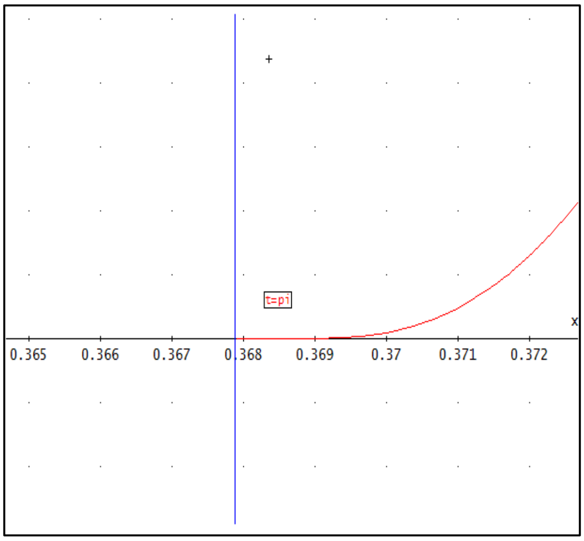
$x'(-\pi/2)=1 \qquad y'(-\pi/2)=-1$

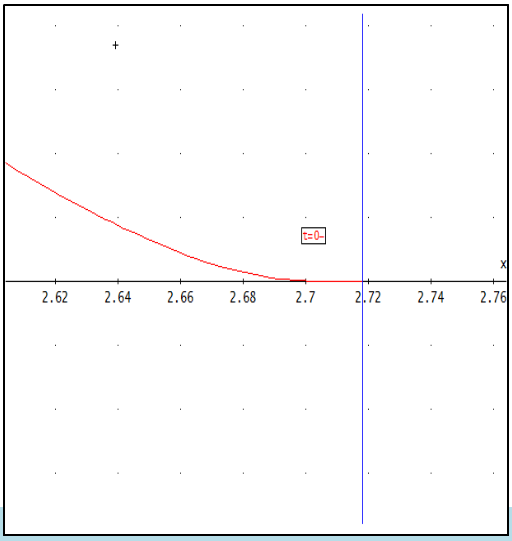
$x'(\pi/2)=1 \qquad y'(\pi/2)=-1$

7) Representar aproximadamente la curva



Detalles del corte con el eje x (tangentes horizontales):





11.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^3 - 3t + 2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \end{cases}$, se pide estudiar:

a) *Dominio*
b) *Simetrías*
c) *Corte con los ejes*
d) *Asíntotas*
e) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*. *Puntos singulares*.
f) Estudio del *crecimiento* por *ramas*
g) Dibujo de la curva indicando cada rama.

Solución:

#1: $\left[\dfrac{t}{t^3 - 3\cdot t + 2}, \dfrac{t^2}{t^2 + 1}\right]$

Dominio:

#2: $\text{SOLVE}(t^3 - 3\cdot t + 2, t)$

#3: $t = -2 \vee t = 1$

#4: $\text{SOLVE}(t^2 + 1, t, \text{Real})$

#5: false

Dominio = **R menos t= -2, t=1**

Simetrías

#6: $\left[\dfrac{-t}{(-t)^3 - 3\cdot(-t) + 2}, \dfrac{(-t)^2}{(-t)^2 + 1}\right]$

#7: $\left[\dfrac{t}{t^3 - 3\cdot t - 2}, \dfrac{t^2}{t^2 + 1}\right]$

Observamos que x(t) cambia de expresión. Luego **NO HAY SIMETRÍAS**.

Cortes con los ejes:

#8: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{t}{t^3 - 3\cdot t + 2}, t, \text{Real}\right)$

#9: $t = \pm\infty \vee t = 0$

Si t=0, entonces x = 0. Calculamos y

#10: $\dfrac{0^2}{0^2 + 1}$

#11: 0

Punto de corte es **(0,0)**.

Calculamos cuando y =0, pero la única solución es t =0, coincide con el resultado anterior.
Si t = ±∞, entonces x = 0 y calculamos y = 1. Punto de corte Q(0, 1). Luego hay dos puntos de cortes con los ejes.

Asíntotas:

Horizontal: si x → ∞, entonces y → cte. Miramos el Dominio.

#12: $$\lim_{t \to -2-} \frac{t}{t^3 - 3 \cdot t + 2}$$

#13: $$\infty$$

#14: $$\lim_{t \to -2+} \frac{t}{t^3 - 3 \cdot t + 2}$$

#15: $$-\infty$$

Se calcula y cuando t = -2

#16: $$\frac{(-2)^2}{(-2)^2 + 1}$$

#17: $$\frac{4}{5}$$

Asíntota Horizontal: y = 4/5

Se tiene otro valor t=1, para este valor también x →∞

#18: $$\lim_{t \to 1-} \frac{t}{t^3 - 3 \cdot t + 2}$$

#19: $$\infty$$

#20: $$\lim_{t \to 1+} \frac{t}{t^3 - 3 \cdot t + 2}$$

#21: $$\infty$$

Se calcula y cuando t =1

#22: $$\frac{1^2}{1^2 + 1}$$

#23: $$\frac{1}{2}$$

Asíntota horizontal: y = 1/2

A. Verticales no hay.

A. Oblicuas no hay.

Puntos críticos: ya sabemos dos t= -2, t = 1. Calculamos t para que la derivada primera de x e y sean cero.

#24: $$\frac{d}{dt} \frac{t}{t^3 - 3 \cdot t + 2}$$

#25: $$\frac{2\cdot(t^2 + t + 1)}{(1 - t)\cdot(t^2 + t - 2)^2}$$

#26: $$\text{SOLVE}\left(\frac{2\cdot(t^2 + t + 1)}{(1 - t)\cdot(t^2 + t - 2)^2}, t, \text{Real}\right)$$

#27: $$t = \pm\infty$$

Derivada primera de y:

#28: $$\frac{d}{dt}\frac{t^2}{t^2 + 1}$$

#29: $$\frac{2\cdot t}{(t^2 + 1)^2}$$

#30: $$\text{SOLVE}\left(\frac{2\cdot t}{(t^2 + 1)^2}, t, \text{Real}\right)$$

#31: $$t = \pm\infty \vee t = 0$$

Tenemos otro punto crítico cuando t=0. Si t = 0, entonces x = 0 e y =0
Puntos de tangencia horizontal: x'(t) = 0 e y'(t) ≠0. La derivada primera nunca se hace cero, luego No Hay
Puntos de tangencia vertical: x'(t) ≠ 0 e y'(t) =0. Esto sucede si t=0

#32: $$\frac{2\cdot(t^2 + t + 1)}{(1 - t)\cdot(t^2 + t - 2)^2}$$

#33: $$\frac{2\cdot(0^2 + 0 + 1)}{(1 - 0)\cdot(0^2 + 0 - 2)^2}$$

#34: $$\frac{1}{2}$$

Punto de tangente horizontal: (0,0)

Punto singular si x'(t) = 0 e y'(t) =0. Si t →∞, entonces x'(t) =0 e y'(t) =0

#35: $$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t}{t^3 - 3\cdot t + 2}, \frac{t^2}{t^2 + 1}\right] = [0, 1]$$

Punto singular: (0,1)

#36: $$\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{t}{t^3 - 3\cdot t + 2}, \frac{t^2}{t^2 + 1}\right] = [0, 1]$$

Ramas

$-\infty< t < -2^-$	$0< x< \infty$	$1> y> 4/5$	Decreciente
$-2^+<t<0$	$-\infty< x < 0$	$4/5 > y >0$	Decreciente
$0<t <1^-$	$0< x <\infty$	$0< y< 1/2$	Creciente
$1^+<t<\infty$	$\infty> x >0$	$1/2 < y < 1$	Decreciente

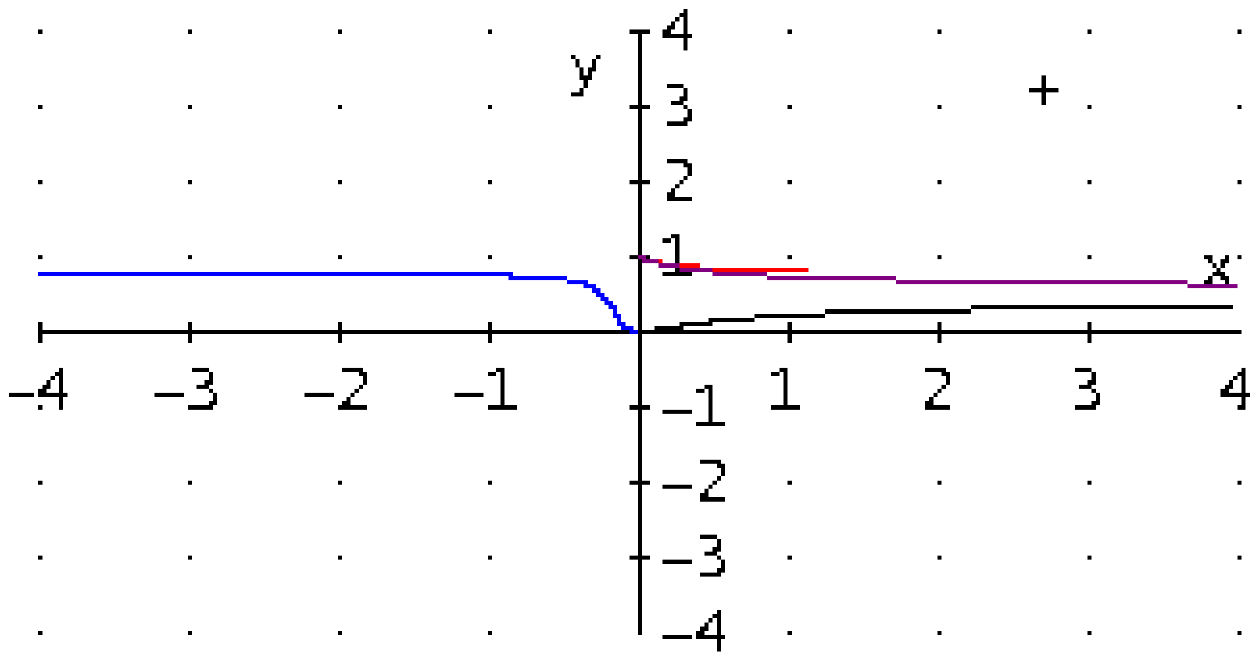
Representación Gráfica:

Introducir la curva y poner en valor mínimo un valor alto, y en valor máximo −2.

A continuación introducir de nuevo la curva y poner como valor mínimo −2 y como valor máximo 0

Así con todas las ramas.

#37: $$\left[\frac{t}{t^3 - 3\cdot t + 2}, \frac{t^2}{t^2 + 1}\right]$$



12.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = t^2 + \sqrt{2} \\ y(t) = t^3 - 2t \end{cases}$, se pide:

a) *Campo de variación* de t.
b) Estudio de *simetrías*.
c) *Puntos críticos*.
d) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
e) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.
f) Calcular y''(x) (*derivada* segunda de y respecto de x).
g) Dibujo aproximado de la curva indicando las coordenadas de los *puntos de corte* con los *ejes coordenados*.

***Solución*:**

a) R, ya que x(t) e y(t) están definidas $\boxed{\forall t \in R}$.

b) $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ Curva **simétrica respecto a OX**. Basta estudiarla para valores positivos de t y completar luego por simetría.

c) Puntos críticos (donde se anulan ó no existen alguna de las derivadas)

x'(t)=2t =0 $\Rightarrow$ **t=0**

y'(t)=3t^2-2=0 $\Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ (sólo consideramos el positivo).

d) Puntos de tangencia horizontal:

$\begin{cases} x'(t) \neq 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{P = \left(\frac{2}{3} + \sqrt{2}, -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)}$

Puntos de tangencia vertical:

$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \boxed{Q = \left(\sqrt{2}, 0\right)}$

e) Estudio del crecimiento por ramas:

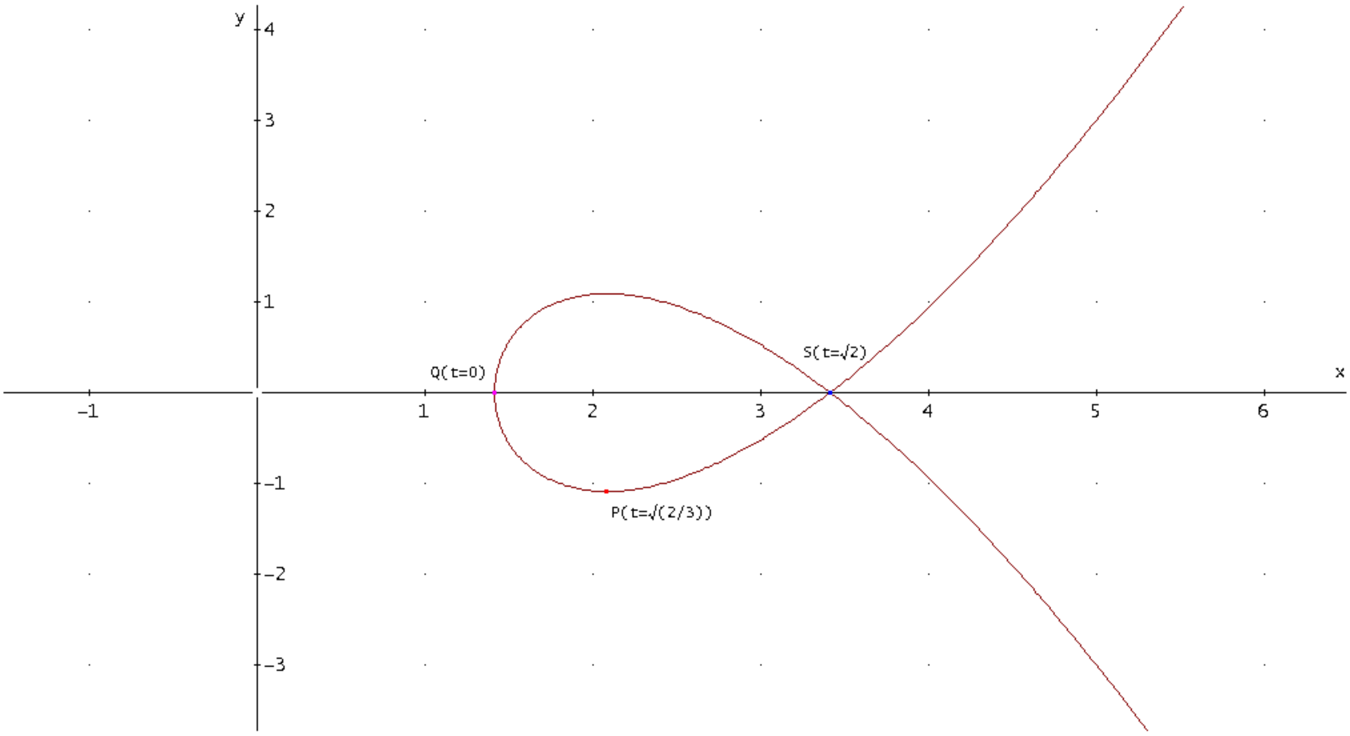
t	x(t)	y(t)	x'(t)	y'(t)	y'(x)=y'(t)/x'(t)
0	$\sqrt{2}$	0	0	-2	tg. vertical
$0<t<\sqrt{\frac{2}{3}}$	Crece $\sqrt{2} \to \sqrt{2}+\frac{2}{3}$	Decrece $0 \to -\frac{4\sqrt{6}}{9}$	+	-	↓
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{2}+\frac{2}{3}$	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$2\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0
$\sqrt{\frac{2}{3}}<t<\infty$	Crece $\sqrt{2}+\frac{2}{3} \to \infty$	Crece $-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	+	+	↑

f) $y''(x) = \frac{d}{dx}\left(y'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)\right)^2}\frac{1}{x'(t)} = \boxed{\frac{3t^2+2}{4t^3}}$

g) Corte con OX: y = 0 $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} t=0 \Rightarrow Q=\left(\sqrt{2},0\right) \\ t=\sqrt{2} \Rightarrow S=\left(2+\sqrt{2},0\right) \end{cases}}$

No hay corte con OY por ser x>0.

Dibujo aproximado:



13.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{(t-1)^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$, se pide:

a) *Dominio*.
b) *Asíntotas*.
c) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
d) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.
e) *Corte con los ejes* de *coordenadas*.
f) Dibujo de la curva indicando cada *rama*.

***Solución*:**

#1: $\left[\dfrac{t}{(t-1)^2}, \dfrac{t^2}{t^2-1}\right]$

Dominio: R−(−1,1)

Simetrías al cambiar t por −t, no tiene.

Asíntotas:

Verticales:

#2: $\lim_{t\to 1}\left[\dfrac{t}{(t-1)^2}, \dfrac{t^2}{t^2-1}\right]$

#3: $[\infty, \pm\infty]$

#4: $\lim_{t\to -1}\left[\dfrac{t}{(t-1)^2}, \dfrac{t^2}{t^2-1}\right]$

#5: $\left[-\dfrac{1}{4}, \pm\infty\right]$

Asíntota vertical x=−1/4 (para t=−1)

Horizontales:No hay

Oblicuas

#6: $\dfrac{\dfrac{t^2}{t^2-1}}{\dfrac{t}{(t-1)^2}}$

#7: $\dfrac{t\cdot(t-1)}{t+1}$

#8: $\lim_{t\to 1} \dfrac{t\cdot(t-1)}{t+1}$

#9: 0

No hay asíntota oblicua.

Puntos críticos. Ramas de la curva:

#10: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t}{(t-1)^2}, \dfrac{t^2}{t^2-1}\right]$

#11: $\left[\dfrac{t+1}{(1-t)^3}, -\dfrac{2\cdot t}{(t^2-1)^2}\right]$

#12: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{t+1}{(1-t)^3}, t, \text{Real}\right)$

#13: $t = \pm\infty \vee t = -1$

#14: $\text{SOLVE}\left(-\dfrac{2\cdot t}{(t^2-1)^2}, t, \text{Real}\right)$

#15: $t = \pm\infty \vee t = 0$

Puntos críticos:-1, 0, 1

Puntos de tangencia horizontal:(0,0), para t=0.

Puntos de tangencia vertical:No hay.

Ramas:

Cortes con los ejes coordenados:

Con OX:

#16: $\dfrac{t^2}{t^2-1}$

#17: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{t^2}{t^2-1}, t, \text{Real}\right)$

#18: $t = 0$

Se obtiene el punto (0,0)

Con OY:

#19: $\dfrac{t}{(t-1)^2}$

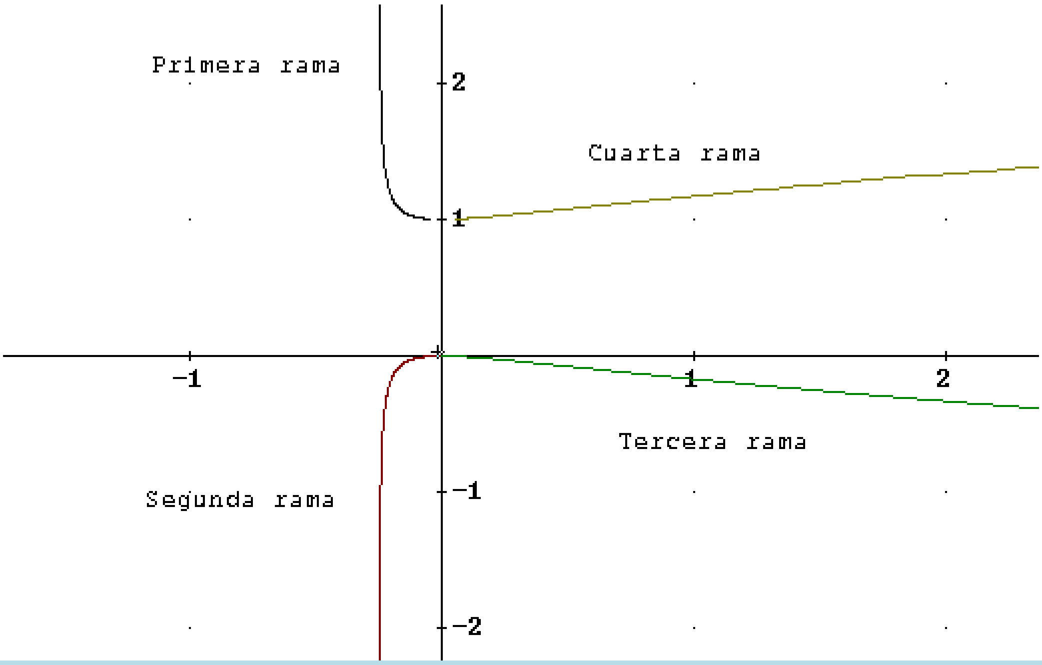
#20: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{t}{(t-1)^2}, t, \text{Real}\right)$

#21: $t = \pm\infty \vee t = 0$

Se obtiene el mismo punto(0,0)y el punto(0,1)que no llega a alcanzarse

Dibujo por ramas:

Ramas	Variación de (x, y)	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
-inf < t < -1	$(0,1) \to \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$ (asínt. vert)	-	+	-	$\infty \downarrow 1$
-1 < t < 0	(asínt. vert) $\left(-\frac{1}{4}, -\infty\right) \to (0,0)$	+	+	+	$-\infty \uparrow 0$
0 < t <1	$(0,0) \to (\infty, -\infty)$	+	-	-	$0 \downarrow -\infty$
1 < t < inf	$(\infty, \infty) \to (0,1)$	-	-	+	$1 \uparrow \infty$



14.- Dada la curva que tiene como *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t}{t^3} \\ y(t) = \dfrac{t}{1-t} \end{cases}$, hallar:

a) *Campo de variación* de t.

b) *Asíntotas*

c) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *singulares*.

d) Estudio por *ramas* del *crecimiento* y *decrecimiento*.

Solución:

a) R-[0,1]

#1: $\left[\dfrac{1-t}{t^3}, \dfrac{t}{1-t}\right]$

b)

#2: $\lim_{t\to 0} \left[\dfrac{1-t}{t^3}, \dfrac{t}{1-t}\right]$

#3: $[\pm\infty, 0]$

y=0 asíntota horizontal

#4: $\lim_{t\to 1} \left[\dfrac{1-t}{t^3}, \dfrac{t}{1-t}\right]$

#5: $[0, \pm\infty]$

x=0 asíntota vertical

#6: $\lim_{t\to \infty} \dfrac{\dfrac{t}{1-t}}{\dfrac{1-t}{t^3}}$

#7: 0

no hay asíntota oblicua

#8: $\lim_{t\to \infty} \left[\dfrac{1-t}{t^3}, \dfrac{t}{1-t}\right]$

#9: $[0, -1]$

c)

#10: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1-t}{t^3}, \dfrac{t}{1-t}\right]$

#11: $\left[\dfrac{2\cdot t-3}{t^4}, \dfrac{1}{(t-1)^2}\right]$

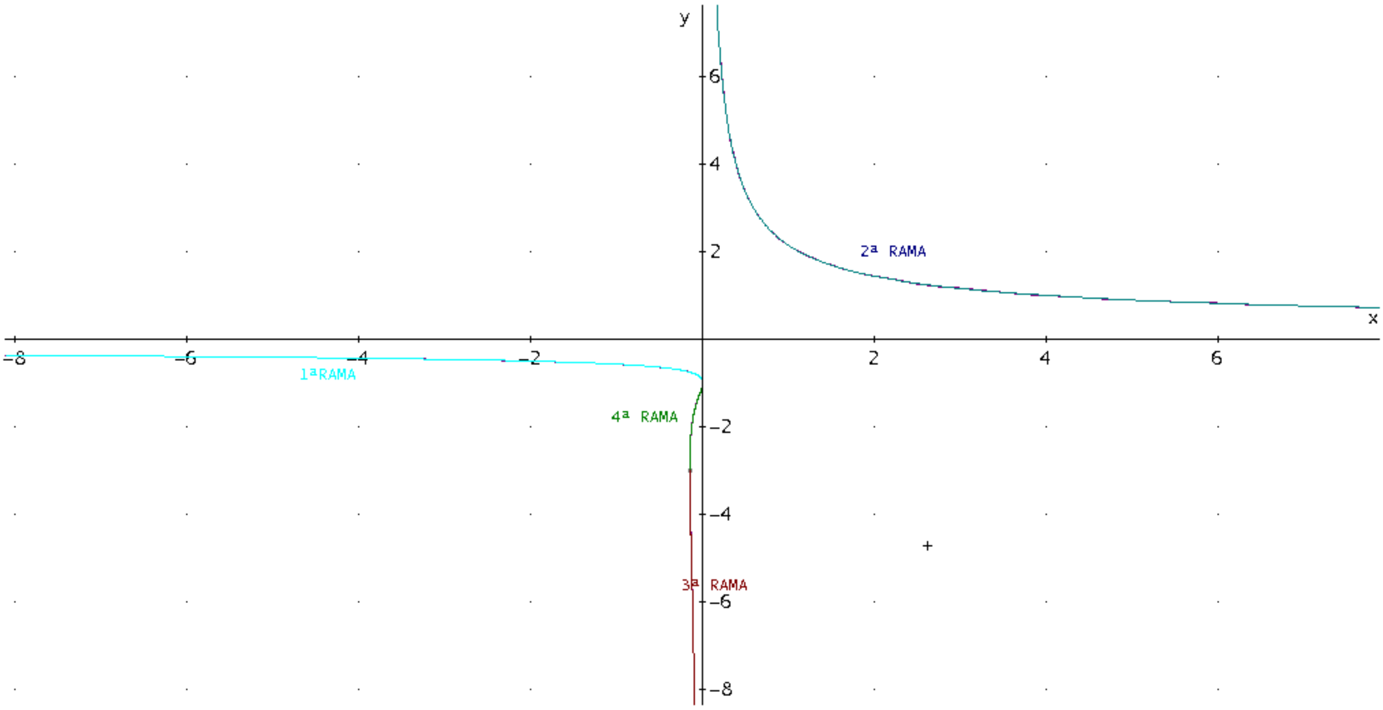
#12: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{2\cdot t-3}{t^4}, t, \text{Real}\right)$

#13: $t = \pm\infty \vee t = \dfrac{3}{2}$

#14: $\left[\dfrac{1-\dfrac{3}{2}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}, \dfrac{\dfrac{3}{2}}{1-\dfrac{3}{2}}\right] = \left[-\dfrac{4}{27}, -3\right]$

Punto de tangencia vertical (-4/27,-3)

d)



Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	t<0	0<t<1	1<t<3/2	3/2<t
x(t)	0>x>-∞	∞>x>0	0>x>-4/27	-4/27<x<0
y(t)	-1<y<0	0<y<∞	-∞<y<-3	-3<y<-1
x'(t)	-	-	-	+
y'(t)	+	+	+	+
y'(x)=y'(t)/x'(t)	decrece	decrece	decrece	crece

15.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -\dfrac{240\,t\,(3t^4 - 10t^2 + 3)}{(t^2+1)^6} \end{cases}$ **, se pide estudiar:**

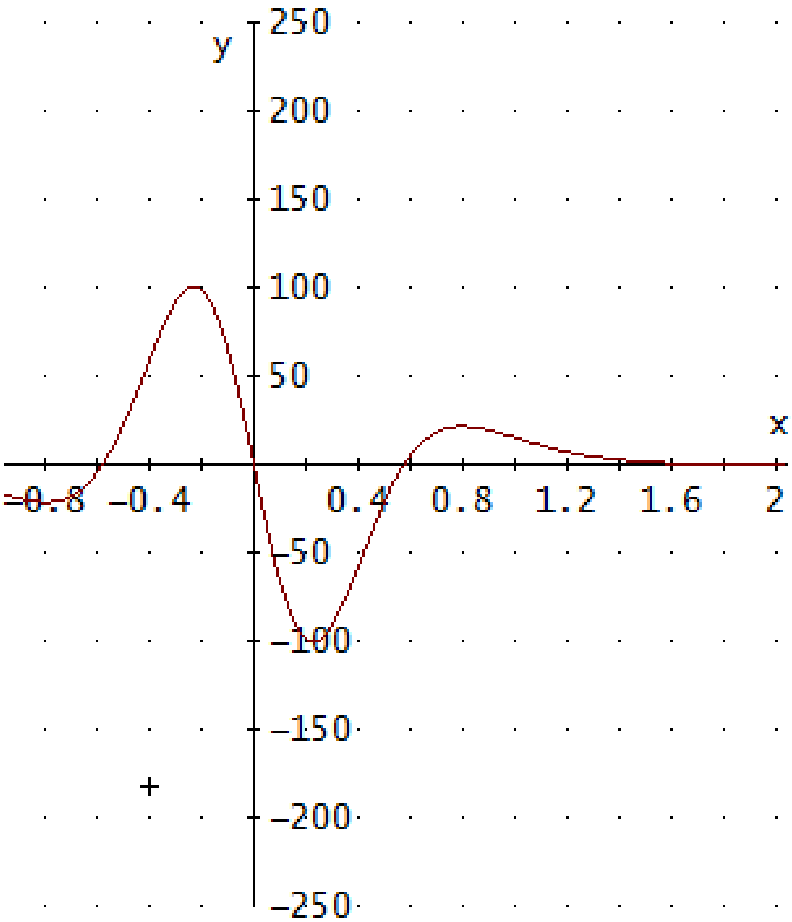
a) *Simetría*

b) *Asíntotas*

c) *Puntos críticos. Puntos de tangencia horizontal* y *vertical. Puntos singulares*

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

***Solución*:**



a) simetrías

x(-t)=-t=-x(t)

$$y(-t) = \frac{240t(3t^4 - 10t^2 + 3)}{(t^2+1)^6} = \text{-y(t)}$$

la función es simétrica respecto del origen

Bastará estudiar solamente el $[0,\infty)$

b) asíntotas la función es continua en todo $\Re$; queda por estudiar el límite cuando $x \to \infty$

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{240t(3t^4 - 10t^2 + 3)}{(t^2+1)^6} = 0$ Luego **x=0** es una asíntota cuando $y \to \infty$ y, por la simetría, también cuando $t \to -\infty$

c) Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento

Calculando la derivada $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \dfrac{3\cdot(7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1)}{(t^2+1)^7} \end{cases}$

Resolviendo $7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1=0$ se obtiene

Seleccionando solamente las raíces positivas

t = 0.2282434743, t = 0.7974733888, t = 2.076521396

corresponden a los **puntos críticos**, que además son **puntos de tangencia horizontal** y no tiene singulares.

d) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento:

Se calcula t(0)=0

Decrece

t(0.2282434743)= -100.4589829 (mínimo)

crece

t(0.7974733888)= 21.42758996 (máximo)

decrece

t(2.076521396)= -0.3473720448 (mínimo)

crece

Y, dada la simetría respecto del origen,

x	-∞		-2.076		-0.797		-0.228		0		0.228		0.797		2.076		∞
y	0		0.347		-21.427		100.829		0		-100.829		21.427		-0.347		0
y'(x)	0	+	0	-	0	+	0	-		-	0	+	0	-	0	+	0
		↗		↘		↗		↘		↘		↗		↘		↗	

16.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, estudiar:

a) *Asíntotas*.
b) *Puntos críticos*.
c) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
d) ¿Cuántas *ramas* tiene la curva?
Hacer un dibujo aproximado de la misma marcando claramente cada una de sus ramas.

Solución:

#1: $\left[\dfrac{3\cdot t}{1+t^3}, \dfrac{3\cdot t^2}{1+t^3}\right]$

Dominio de t en la curva:

#2: $\text{SOLVE}(1 + t^3, t, \text{Real}) \Rightarrow \quad t = -1$

#3: $\lim\limits_{t\to -1} \left[\dfrac{3\cdot t}{1+t^3}, \dfrac{3\cdot t^2}{1+t^3}\right] = [\pm\infty, \pm\infty]$

#4: $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{\dfrac{3\cdot t^2}{1+t^3}}{\dfrac{3\cdot t}{1+t^3}} = -1$

#5: $\lim\limits_{t\to -1} \left(\dfrac{3\cdot t^2}{1+t^3} - (-1)\cdot\dfrac{3\cdot t}{1+t^3}\right) = -1$

a) Asíntota oblicua:

#6: $y = -x - 1$

#7: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{3\cdot t}{1+t^3}, \dfrac{3\cdot t^2}{1+t^3}\right]$

#8: $\left[\dfrac{3\cdot(1 - 2\cdot t^3)}{(t^3 + 1)^2}, \dfrac{3\cdot t\cdot(2 - t^3)}{(t^3 + 1)^2}\right]$

#8: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{3\cdot(1-2\cdot t^3)}{(t^3+1)^2}, t, \text{Real}\right)$

#9: $t = \pm\infty \lor t = \dfrac{2^{2/3}}{2}$

#10: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{3\cdot t\cdot(2-t^3)}{(t^3+1)^2}, t, \text{Real}\right)$

#111: $t = \pm\infty \lor t = 2^{1/3} \lor t = 0$

b) Puntos críticos cuando t→−1, t=1/2^(1/3), t=0 y t=2^(1/3)

#12: $[2^{2/3}, 2^{1/3}]$

#13: $[2^{1/3}, 2^{2/3}]$

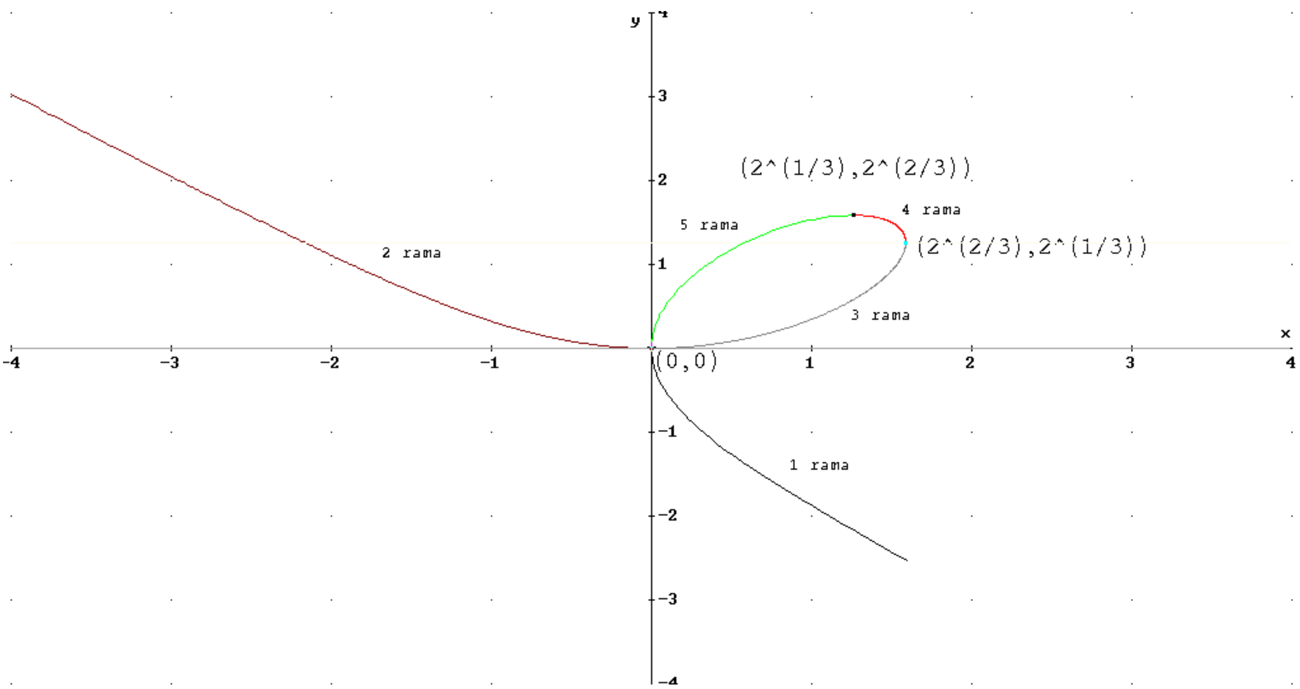
#14: $[0, 0]$

c) Puntos de tangencia horizontal para t=0 y t=2^(1/3)

Puntos de tangencia vertical para t=0 y t=1/2^(1/3)

d) Ramas: Cinco

Ramas	Variación de (x, y)
$-\infty < t < -1$	$(0,0) \to (\infty, -\infty)$
$-1 < t < 0$	$(-\infty, \infty) \to (0,0)$
$0 < t < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(0,0) \to (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) \to (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$
$\sqrt[3]{2} < t < \infty$	$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) \to (0,0)$



17.- Dada la curva $\left(x(t), y(t)\right) = \left(\dfrac{1}{(t-2)(t-1)}, \dfrac{(t-1)^2}{t-2}\right)$

a) Hallar la ecuación de su ***asíntota*** **oblicua.**

b) Hallar los ***puntos de tangencia horizontal y vertical.***

***Solución*:**

a) Pueden existir asíntotas oblicuas para valores de t_0 tales que $x(t_0) = \infty$ e $y(t_0) = \infty$.

En nuestro caso $y(t_0) = \infty \Rightarrow t_0 = 12$, y $x(t_0) = \infty \Rightarrow t_0 = 1$ ó 2.

$$\lim_{t\to 2} \frac{\dfrac{(t-1)^2}{(t-2)}}{\dfrac{1}{(t-2)(t-1)}} = 1; \quad \lim_{t\to 2} \left(\frac{(t-1)^2}{t-2} - \frac{1}{(t-2)(t-1)} \right) = 3.$$

Por tanto, **y=x+3** es una asíntota oblicua.

b) Los puntos de tg vertical son aquellos en que x’(t)=0 e $y'(t) \neq 0$

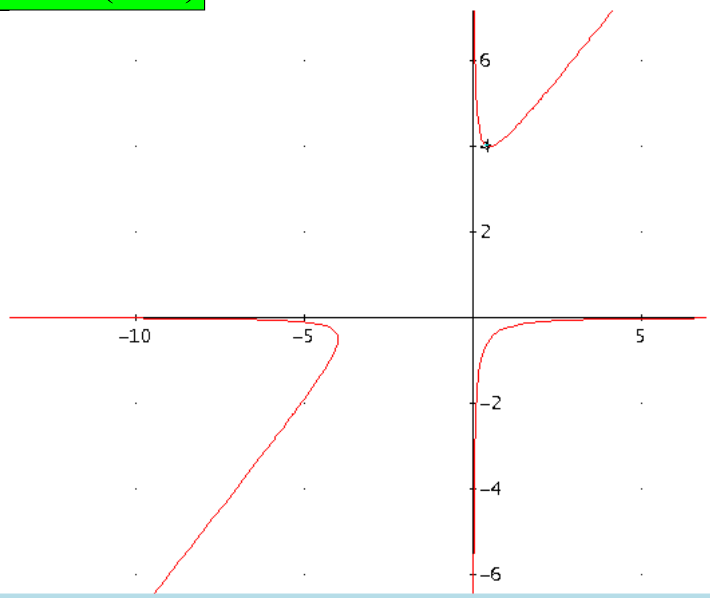
$$\left(x'(t), y'(t)\right) = \left(\frac{3-2t}{\left((t-1)^2 (t-2)^2\right)}, \frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2} \right) = (0, -3) \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Luego el punto $\left(x\left(\frac{3}{2}\right), y\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \left(-4, \ -\frac{1}{2} \right)$ es un punto de tangencia vertical.

Los puntos de tg horizontal son aquellos en que $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0$

$$\left(x'(t), y'(t)\right) = \left(\frac{3-2t}{\left((t-1)^2 (t-2)^2\right)}, \frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2} \right) = \left(-\frac{3}{4}, \ 0\right) \Leftrightarrow t = 3$$

Luego el punto $\left(x(3), y(3)\right) = \left(\frac{1}{2}, \ 4 \right)$ es un punto de tangencia horizontal.



18.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = 2t - \dfrac{4}{3}t^3 \end{cases}$.

Se pide estudiar:

a) *Campo de variación* t.

b) *Simetrías*.

c) *Periodicidad*.

d) *Puntos críticos*. *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.

e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas.

f) Dibujo aproximado de la curva indicando cada rama.

Solución:

*Dominio de definición de t. Ambas funciones, que son polinomios, están definidas para cualquier valor real de t $\Rightarrow$ **Dom(t) = $\Re$**

*Simetrías $\begin{cases} x(-t) = 1 - \dfrac{(-t)^2}{2} = x(t) \\ y(-t) = 2(-t) - \dfrac{4}{3}(-t)^3 = -y(t) \end{cases} \Rightarrow$ **Simétrica respecto del eje X.**

(Sólo habrá que estudiar $t \in [0,\infty]$)

*Periodicidad. NO TIENE

*Puntos críticos $\begin{cases} x'(t) = -t \\ y'(t) = 2 - 4t^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ y'(t) = 2 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(sólo se tiene en cuenta el valor t > 0)} \end{cases}$$

Para t=0 resulta **(1,0)**

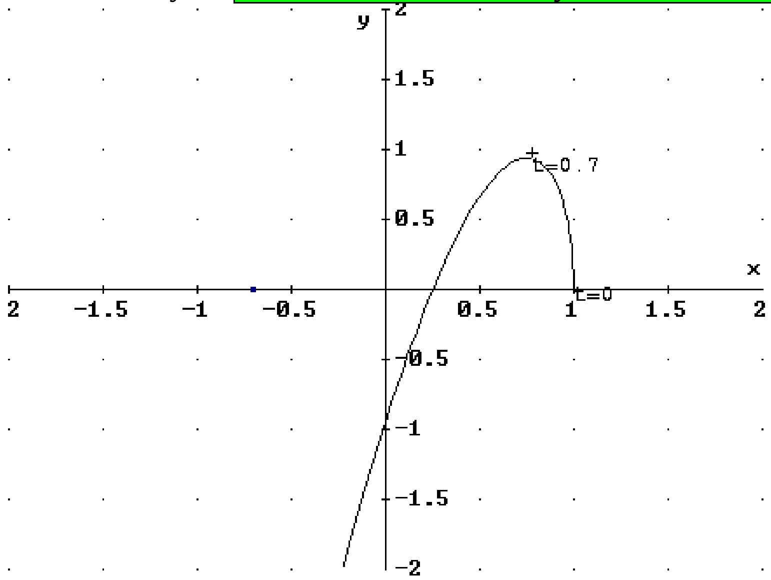
Para $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$

*Estudio por ramas

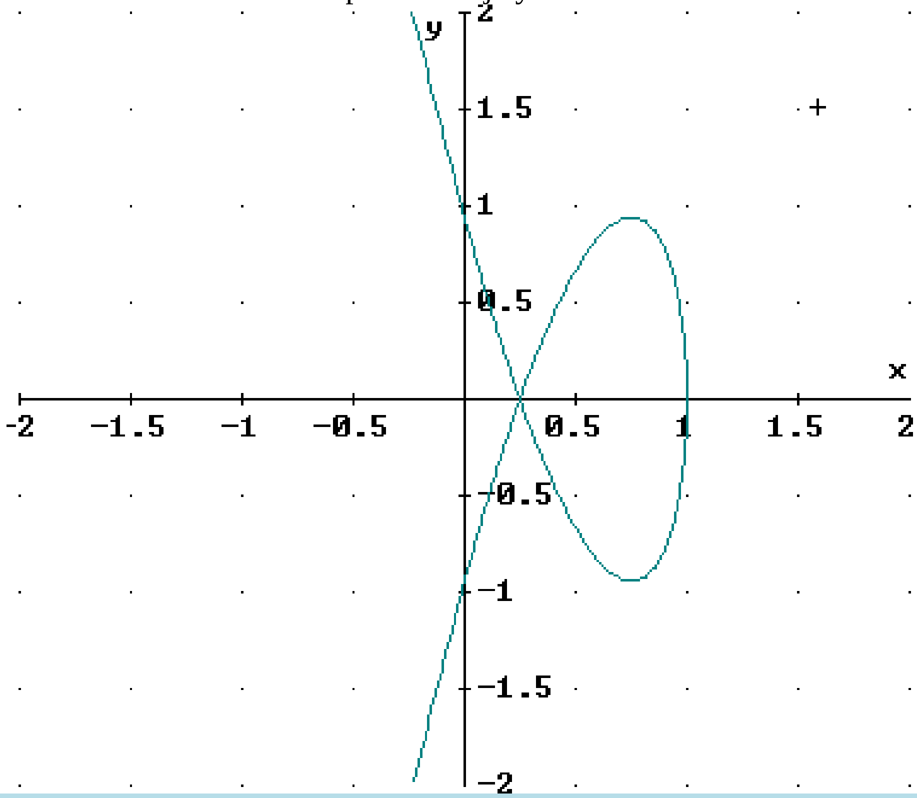
t	0	(0,√2/2)	√2/2≈0.707	(√2/2,∞)	lim t→∞
x(t)	**1**		**3/4**		-∞
y(t)	**0**		**2√2/3**≈0.94		-∞
x'(t)	0		-√2/2		
y'(t)	2		0		
dy/dx	∞		0		∞
crecimiento		↓		↑	

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ y'(t) = 2 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(sólo se tiene en cuenta el valor t > 0)} \end{cases}$$

Por tanto, hay un **mínimo relativo en t=0 y un máximo relativo en t = √2/2**



Rehaciendo la simetría respecto del eje y = 0



19.- Dada la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+t+1}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{2-t} \end{cases}$, se pide:

a) *Asíntotas*.
b) *Puntos críticos*.
c) *Puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
d) Dibujo aproximado de la curva indicando las coordenadas de los *puntos críticos*.

Solución:

#1: $\left[\dfrac{t^2+t+1}{t+1}, \dfrac{t^2-1}{2-t}\right]$

a)

#2: $\lim_{t\to -1} \left[\dfrac{t^2+t+1}{t+1}, \dfrac{t^2-1}{2-t}\right]$

#3: $[\pm\infty, 0]$

Asíntota horizontal en y=0

#4: $\lim_{t\to 2} \left[\dfrac{t^2+t+1}{t+1}, \dfrac{t^2-1}{2-t}\right]$

#5: $\left[\dfrac{7}{3}, \pm\infty\right]$

Asíntota vertical en x=7/3

#6: $\lim_{t\to\infty} \dfrac{(t+1)\cdot(t^2-1)}{(2-t)\cdot(t^2+t+1)} = -1$

#7: $\lim_{t\to\infty} \dfrac{2\cdot t^2+1}{(t+1)\cdot(2-t)} = -2$

Asíntota oblicua en y=-x-2

#8: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t^2+t+1}{t+1}, \dfrac{t^2-1}{2-t}\right]$

#9: $\left[\dfrac{t\cdot(t+2)}{(t+1)^2}, -\dfrac{t^2-4\cdot t+1}{(t-2)^2}\right]$

#10: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{t\cdot(t+2)}{(t+1)^2}, t, \mathrm{Real}\right)$

b) Puntos críticos

#11: $t = -2 \vee t = 0$

#12: $\text{SOLVE}\left(-\dfrac{t^2 - 4\cdot t + 1}{(t-2)^2}, t, \text{Real}\right)$

#13: $t = 2 - \sqrt{3} \vee t = \sqrt{3} + 2$

Además de los puntos t=-1 y t=2 donde no existe la curva.

c) Tangencia vertical para t=0 y t=-2

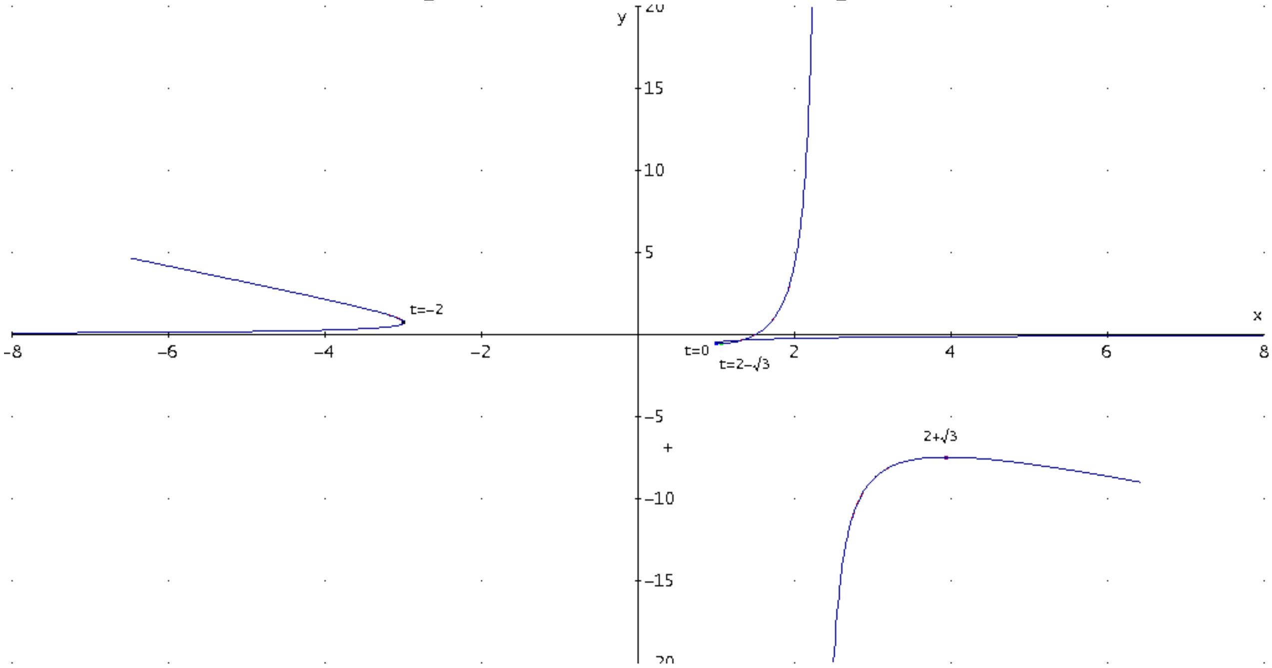
#14: $\left[1, -\dfrac{1}{2}\right]$

#15: $\left[-3, \dfrac{3}{4}\right]$

Tangencia horizontal para $t=2-\sqrt{3}$ y $t=2+\sqrt{3}$

#16: $\left[\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\cdot\sqrt{3}}{6}, 2\cdot\sqrt{3} - 4\right]$

#17: $\left[\dfrac{5\cdot\sqrt{3}}{6} + \dfrac{5}{2}, -2\cdot\sqrt{3} - 4\right]$



20.- Sea la curva $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = t \ \ e^{-t} \end{cases}$

Se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) *Continuidad*

c) *Simetrías*

d) *Intersección con los ejes coordenados*

e) *Puntos críticos. Crecimiento* y *decrecimiento*

f) *Máximos, mínimos* y *puntos de inflexión*

g) *Asíntotas*

***Solución*:**

a) $\boxed{Dom(t) = \{\forall t \in \Re / t \geq 0\}}$

b) **Las dos funciones son continuas en todo Dom(t)**

c) No hay simetrías

d) $\boxed{\mathbf{t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0}}$ intersección con los ejes x = 0 e y = 0

e) Puntos críticos, crecimiento y decrecimiento

$$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \begin{cases} x'(t) = 0, \text{no se da} \\ \text{no existe } x'(t) \text{ en t} = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{y'(t) = (1-t)e^{-t}} \begin{cases} \mathrm{y'(t) = 0, en\ t = 1} \\ \mathrm{no\ existe\ y'(t).... \ no\ se\ da} \end{cases} \boxed{\Rightarrow \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}\right)}$$

$$f'(x) = y'(t)/x'(t) = 2(1-t)e^{-t}\sqrt{t}$$

t	0	0<t<1	1	1<t<∞	t→∞
x’(t)		+	0	+	
y’(t)		+	1/2	-	
f’(x)=y’(t)/x’(t)	$\lim_{t\to 0^+} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0 \leftrightarrow$	+ ↑	0 ↔	- ↓	$\lim_{t\to \infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0 \leftrightarrow$

La segunda derivada toma la forma

$$f''(x) = (df'(x)/dt)(dt/dx) = 2e^{-t}(2t^2 - 5t + 1)$$

f) Máximos, mínimos y puntos de inflexión

mínimos en $t\to 0^+$ y $t\to\infty$, y=0

máximo relativo en x = 1, y = 1/***e*** ≈ 0.3678794411

$$\text{máximos y mínimos} \boxed{\begin{cases} m(x,y) = (0,0) \\ M(x,y) = \left(1, \frac{1}{e}\right) \approx (1{,}0.368) \end{cases}}$$

puntos de inflexión

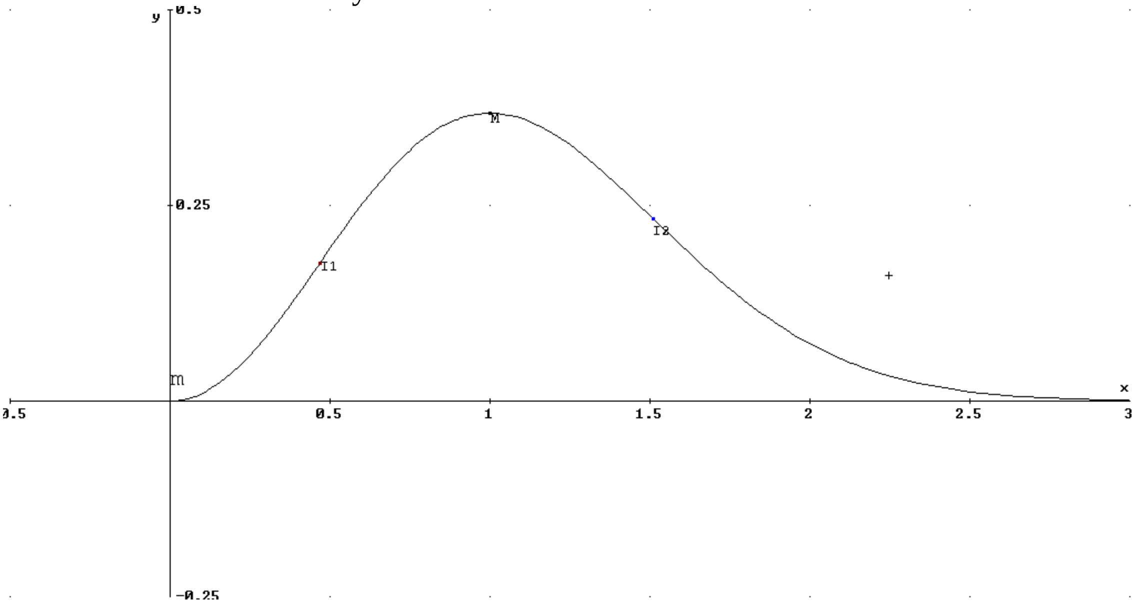
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 2.281 \Rightarrow I_1(x,y) \approx (0.468{,}0.176) \\ t = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 0.219 \Rightarrow I_2(x,y) \approx (1.510{,}2.233) \end{cases}$$

g) Asíntotas.

Como se vio, y(0)=0; x(0) = 0 no hay asíntota en t = 0

Como $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$

Asíntota horizontal y = 0 cuando $t\to\infty$



NOTA:
Otra forma de resolver el problema es obtener el valor de t en x (t) quedando $x = t^2$ y sustituyendo en la ecuación de y(t) se obtiene $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ con $x \geq 0$

21.- Se considera la curva de ecuación $\begin{cases} x = t^3 \\ y = \operatorname{sen}(3t) \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **Estudiar:**

a.- ***Simetrías de la curva.***
b.- ***Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal*** **y** ***vertical, puntos singulares.***
c.- ***Crecimiento*** **y** ***decrecimiento*** **de la curva por** ***ramas.***
d.- ***Puntos de corte con los ejes*** **de coordenadas.**
e.- Dibujo aproximado de la curva, en el que se indiquen los puntos obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) $\begin{cases} x\ (-t) = -t^3 = -x\ (t) \\ y\ (-t) = -\operatorname{sen}(3t) = -y\ (t) \end{cases}$ curva **simétrica respecto al origen O(0,0)**.

Basta estudiar $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\begin{cases} x'(t) = 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ y'(t) = 3\cos(3t) = 0 \Rightarrow 3t = \begin{cases} \pi/2 \Rightarrow t = \pi/6 \\ 3\pi/2 \Rightarrow t = \pi/2 \end{cases} \end{cases}$

Para t=0 se obtiene P_1=$\boxed{(0,0)}$

Para $t = \pi/6$ se obtiene P_2=$\boxed{\left(\left(\pi/6\right)^3, 1\right)}$.

Para $t = \pi/2$ se obtiene P_3=$\boxed{\left(\left(\pi/2\right)^3, -1\right)}$.

Puntos de tangencia horizontal:
y’(t)=0, x’(t) $\neq 0 \Rightarrow$ P_2, P_3
Puntos de tangencia vertical:
x’(t)=0, y’(t) $\neq 0 \Rightarrow$ P_1
Puntos críticos: P_1, P_2, P_3
Puntos singulares: x’(t)=0 e y’(t)=0, no hay

c)

t	(x, y)	x’	y’	y’(x)	y(x)
$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$(0,0) \rightarrow \left(\left(\pi/6\right)^3, 1\right)$	+	+	+	CRECE
$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\left(\pi/6\right)^3, 1\right) \rightarrow \left(\left(\pi/2\right)^3, -1\right)$	+	-	-	DECRECE

d) Corte con eje OX:

$$y = \operatorname{sen}(3t) = 0 \Rightarrow 3t = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \pi/3 \end{cases}$$

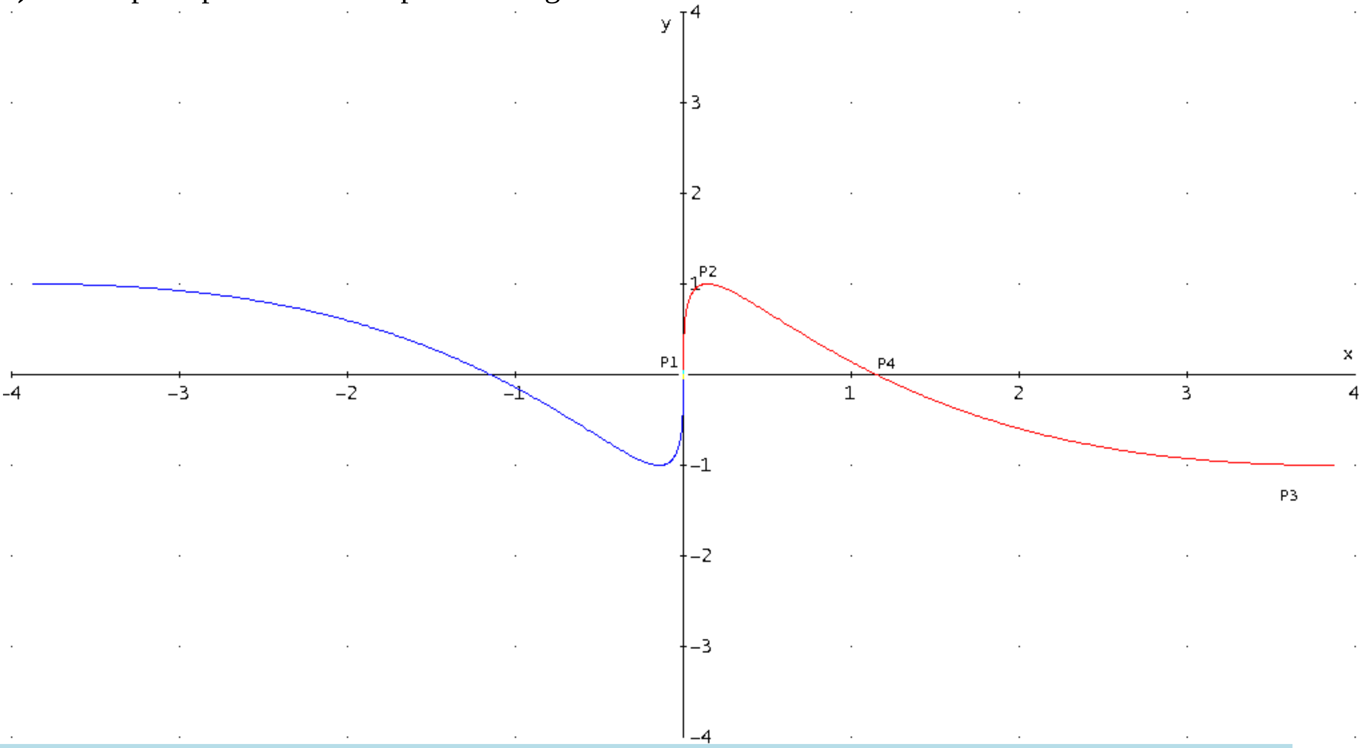
Para t=0 se obtiene $P_1=(0,0)$

Para $t=\frac{\pi}{3}$ se obtiene $P_4=\left(\left(\pi/6\right)^3,0\right)$

Corte con el eje OY

$x=0=t^3 \Rightarrow t=0 \Rightarrow P_1=(0,0)$

e) Se completa por simetría respecto al origen:



22.- Representar la curva dada por $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2-1} \end{cases}$

Solución:

Primer método

Dominio de t: $\boxed{R-\{1,-1\}}$. En este conjunto, no sólo están definidas $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, sino que son derivables y con derivadas continuas hasta el orden que se precise.

Simetrías: $\begin{cases} \varphi(-t)=\varphi(t) \\ \psi(-t)=-\psi(t) \end{cases}$, luego la curva es s**imétrica respecto del eje OX**; basta estudiarla entonces para valores de $t \geq 0$.

Periodicidad: La curva no es evidentemente periódica.

Asíntotas: Por ser $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t)=1$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t)=+\infty$,la recta **x=1 es asíntota vertical**.

Además, $\lim\limits_{t\to1} \varphi(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to1} \psi(t)=\infty$,siendo $\lim\limits_{t\to1} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^3}{t^2}=1$ y

$\lim\limits_{t\to1} (\psi(t)-\varphi(t))=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^3-t^2}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to1} \dfrac{t^2(t-1)}{(t+1)(t-1)}=\dfrac{1}{2}$, entonces:

la recta **y = x + 1/2 es asíntota oblicua**.

Comportamiento de la curva frente a las asíntotas:

a) $\boxed{x = 1}$

$$t\to\infty \Rightarrow \begin{cases} x\to1,\ x>1 \\ y\to+\infty \end{cases}$$

b) $\boxed{y = x + 1/2}$

$$t\to1, t>1 \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{cases}$$

$$y_{curva}-y_{a\,sint\,ota}=\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{t^2}{t^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{(t-1)^2(t+\frac{1}{2})}{t^2-1}=\frac{+\cdot+}{+}>0$$

$\Rightarrow y_c > y_a$.

$$t\to1,\ t<1 \Rightarrow \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-\infty \end{cases}$$

$$y_{curva}-y_{a\,sint\,ota}=\frac{(t-1)^2(t+\frac{1}{2})}{t^2-1}=\frac{+\cdot+}{-}<0 \Rightarrow y_c<y_a$$

Corte de la curva con las asíntotas:

a) $\boxed{x = 1}$, $\dfrac{t^2}{t^2-1}=1 \Rightarrow t^2=t^2-1 \Rightarrow -1=0$, absurdo.

b) $\boxed{y = x + 1/2}$, $\frac{t^3}{t^2-1} = \frac{t^2}{t^2-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

El único resultado válido es $\boxed{\mathbf{t = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)}}$.

Puntos dobles: Debemos resolver el sistema $\begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{cases}$; en este caso particular,

$\begin{cases} \frac{t_1^{\,2}}{t_1^{\,2}-1} = \frac{t_2^{\,2}}{t_2^{\,2}-1} \\ \frac{t_1^{\,3}}{t_1^{\,2}-1} = \frac{t_2^{\,3}}{t_2^{\,2}-1} \end{cases}$, sistema que no acepta soluciones en el dominio de t, salvo $t_1 = t_2$.

Por tanto, la curva carece de puntos dobles.

Puntos críticos: $\begin{cases} \varphi'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2} = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \psi'(t) = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pm\sqrt{3} \end{cases}$; luego, para $t \geq 0$ .tenemos dos puntos críticos $\boxed{t = 0,\ t=\sqrt{3}}$ que anulan alguna de las derivadas, y t = 1 para el que no existe ninguna de ambas derivadas.

Ramas de la curva: Hay tres ramas, correspondientes a los intervalos $(0,1), (1,\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Para t= 0, se obtiene el punto (0, 0); para t = $\sqrt{3}$, se obtiene el punto $P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Para $t \to 1$, se tiene que $\lim\limits_{t\to 1^-} \varphi(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^+} \varphi(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 1^-} \psi(t) = -\infty$ y $\lim\limits_{t\to 1^+} \psi(t) = +\infty$.

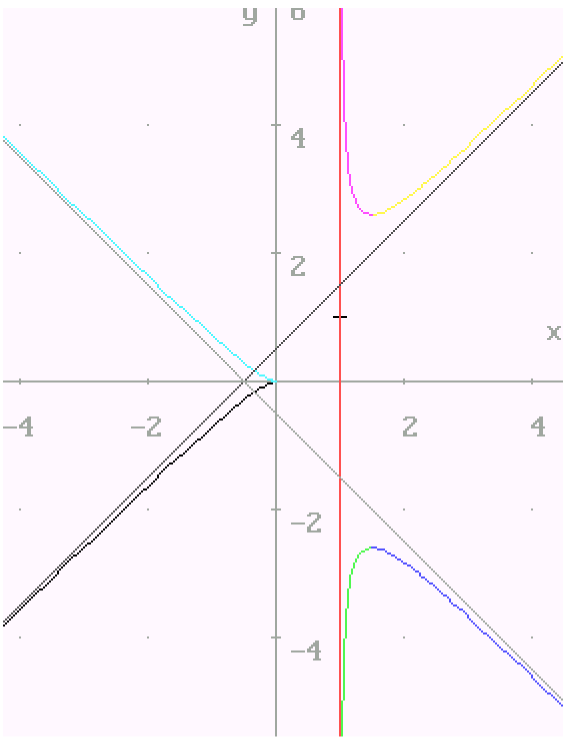
$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{1}{2} t(3 - t^2)$$

$$\begin{cases} \varphi''(t) = \frac{2(3t^2+1)}{(t^2-1)^3} \\ \psi''(t) = \frac{2t(t^2+3)}{(t^2-1)^3} \end{cases} \Rightarrow y''(x) = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{3(t^2-1)^3}{4t}$$

Crecimiento y concavidad de cada una de las tres ramas:

Dominio de variación de t	Valores correspondientes de x	Valores correspondientes de y	signo de $y'(x)$	signo de $y''(x)$
$0 < t < 1$	$0 > x > -\infty$ $\varphi'(t) < 0$ x decrece respecto de t	$0 > y > -\infty$ $\psi'(t) < 0$ y decrece respecto de t	$y'(x) > 0$ y crece respecto de x	$y''(x) < 0$ curva convexa
$1 < t < \sqrt{3}$	$+\infty > x > \frac{3}{2}$ $\varphi'(t) < 0$ x decrece respecto de t	$+\infty > y > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y $\psi'(t) < 0$ decrece respecto de t	$y'(x) > 0$ y crece respecto de x	$y''(x) > 0$ curva cóncava
$\sqrt{3} < t < +\infty$	$\frac{3}{2} > x > 1$ $\varphi'(t) < 0$ x decrece respecto de t	$\frac{3\sqrt{3}}{2} < y < +\infty$ y $\psi'(t) > 0$ crece respecto de t	$y'(x) < 0$ y decrece respecto de x	$y''(x) > 0$ curva cóncava

Gráfica:



Segundo método:

Dominio, periodicidad, simetrías y asíntotas: Ver primer método.
Recordamos que bastaba considerar valores $t \geq 0$.
Estudio de derivadas (están calculadas más arriba):

Puntos de tangencia vertical: $\begin{cases} \varphi'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \psi'(t) = 0 \\ \psi'(t) \neq 0 \end{cases}$ No hay.

Puntos de tangencia horizontal: $\begin{cases} \varphi'(t) \neq 0 \Rightarrow t \neq 0 \\ \psi'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & \Rightarrow \varphi'(t) = 0 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$

Para $t = \sqrt{3}$, se obtiene el punto $P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, como ya vimos.

Puntos singulares: $\begin{cases} \varphi'(t) = 0 \Rightarrow t=0 \\ \psi'(t) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (0,0)$

$$\begin{cases} \varphi''(0) = -2 \\ \psi''(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi'''(t) = -\dfrac{24t(t^2+1)}{(t^2-1)^4} \Rightarrow \varphi'''(0) = 0 \\ \psi'''(t) = -\dfrac{6(t^4+6t^2+1)}{(t^2-1)^4} \Rightarrow \psi'''(0) = -6 \end{cases}$$

Así, $\left\{\vec{F''}(0), \vec{F'''}(0)\right\} = \{-(2,0), (0,6)\}$ son dos vectores no proporcionales y por tanto, **el origen es un punto de retroceso de primera especie.**

Tangente en el punto de retroceso: Recta que pasa por $(0,0)$ y es paralela al vector $\vec{F''}(0) = (-2,0)$. **Se trata por tanto del eje OX.**

Crecimiento y decrecimiento: $\begin{cases} \varphi'(t) \leq 0 \Rightarrow x \text{ es decreciente en } t \\ \psi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3} \end{cases}$

Luego y es creciente en t para $t \geq \sqrt{3}$.

Cortes con los ejes:

Con OX: $\psi(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (0,0)$

Con OY: $\varphi(t) = 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow (0,0)$

Tabla:

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	0	-		-	-	-	
y'	0	-		-	0	+	
x	0	$\downarrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\downarrow$	$\frac{3}{2}$	$\downarrow$	1
y	0	$\downarrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\downarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$	$+\infty$

Gráfica:

Para dibujar la curva recordemos la simetría respecto del eje OX.

(Ver primer método)

23.- Hacer un estudio completo y representar gráficamente la curva:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t(t-1)} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Solución:

a.- Dominio o campo de variación de t: $R-\{0,1\}$

b.- Simetrías: No existen simetrías al cambiar t por –t.

c.- Periodicidad: La curva no es periódica por no serlo ni x(t) ni y(t).

d.- Asíntotas

Horizontales: $y = 0$, pues $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = +\infty \end{cases}$ y $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = 0^-$.

Verticales: $x = 0$, pues $\begin{cases} \lim\limits_{t\to \infty} y(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to -\infty} x(t) = -\infty \end{cases}$ y $\lim\limits_{t\to \infty} x(t) = \lim\limits_{t\to -\infty} x(t) = 0^+$.

Oblicuas: $y = x + 3$, pues $\lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} y(t) = +\infty$; $m = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$;

$n = \lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} [y(t) - 1\cdot x(t)] = 3$. Análogamente para $t \to 1^-$.

e.- Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

$$x'(t) = \frac{1-2t}{t^2(t-1)^2} \begin{cases} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ \text{No existe} \Rightarrow t = 0,\ 1 \end{cases}$$

$$y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2} \begin{cases} = 0 \Rightarrow t = 0,\ 2 \\ \text{No existe} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Puntos críticos: 0, ½, 1, 2

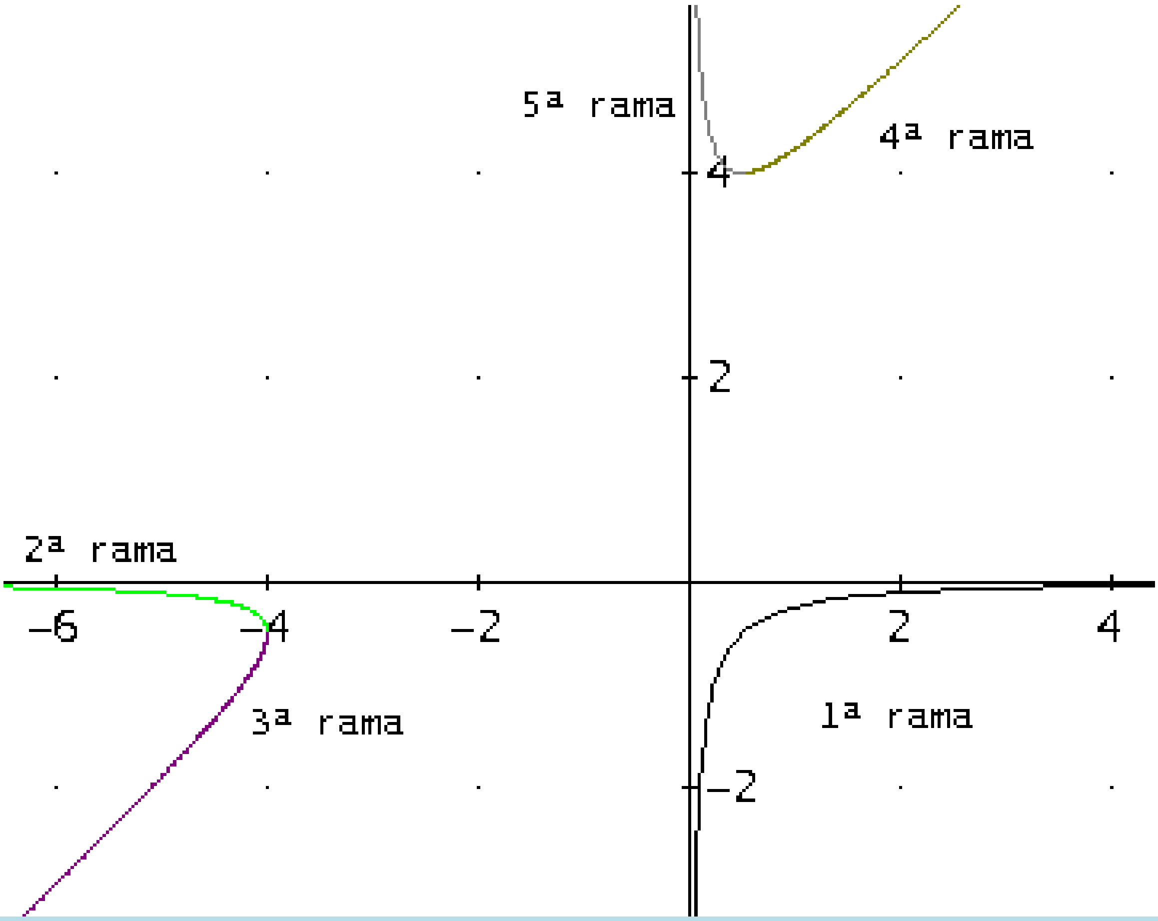
Puntos singulares: No existen

Puntos de tangencia horizontal: **(1/2, 4)** para t = 2.

Puntos de tangencia vertical: **(-4, -1/2)** para t = ½.

f.- Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	(x, y)	x’(t)	y’(t)	y’(x)	y(x)
$(-\infty,0)$	$(0, -\infty) \rightarrow (\infty, 0)$ As vert. As horiz.	+	+	$\frac{+}{+}=+$	$-\infty \uparrow 0$
(0, 1/2)	$(-\infty,0) \rightarrow (-4, -1/2)$ As horiz.	+	-	$\frac{-}{+}=-$	$0 \downarrow -1/2$
(1/2, 1)	$(-4, -1/2) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ As oblicua	-	-	$\frac{-}{-}=+$	$-\infty \uparrow -1/2$
(1, 2)	$(\infty, \infty) \rightarrow (1/2, 4)$ As oblicua	-	-	$\frac{-}{-}=+$	$4 \uparrow \infty$
$(2, \infty)$	$(1/2, 4) \rightarrow (0, \infty)$ As vert.	-	+	$\frac{+}{-}=-$	$\infty \downarrow 4$



24.- Una partícula se mueve en un plano vertical xy siguiendo la trayectoria de la curva:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$ **, solamente en la región $y \geq 0$. Se pide:**

a) Posición inicial (x_0, y_0) de la partícula en el instante $t = 0$.

b) *Periodicidad* de la curva. Intervalo de tiempo necesario para generar la trayectoria completa.

c) Cálculo de *asíntotas*. ¿Es una trayectoria finita?

d) Calcular los *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical* de la curva.

e) Hacer un estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*. ¿Cuál es la posición (x, y) más baja que alcanza la partícula? ¿Cuál la más alta?

***Solución*:**

#1: $\left[\mathrm{COS}(2\cdot t),\ \mathrm{TAN}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]$ para $y \geq 0$.

a) Posición inicial en t=0

#2: $\left[\mathrm{COS}(2\cdot 0),\ \mathrm{TAN}\left(\dfrac{0}{2}\right)\right] = \boxed{[1,\ 0]}$

b) Periodicidad de la curva:

Período de x(t): π, Período de y(t): 2π;
Período de la curva = mcm (2π,π) = $\boxed{2\pi}$
Luego, basta tomar t en [0,2π] para generar la trayectoria completa. Como sólo interesa y ≥ 0, tomaremos t en [0,π]. Mejor dicho, en [0,π), pues π no pertenece al campo de variación de t.

c) Asíntotas:

Verticales: tg(t/2) tiende a ∞ para t tendiendo a π:

#3: $\lim_{t \to \pi-} \mathrm{TAN}\left(\dfrac{t}{2}\right) = \infty$

#4: $\lim_{t \to \pi-} \mathrm{COS}(2\cdot t) = 1$

Luego $\boxed{x = 1}$ es asíntota vertical para t→π−.
Horizontales: No hay pues −1 ≤ x ≤ 1.
Oblicuas: No hay pues −1 ≤ x ≤ 1.
La trayectoria es, por tanto, infinita.

d) Puntos críticos:

#5: $\dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{COS}(2\cdot t),\ \mathrm{TAN}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]$

#6: $\left[-\ 2\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \dfrac{1}{\mathrm{COS}(t) + 1}\right]$

#7: SOLVE(− 2·SIN(2·t) = 0, t, Real)

#8: $t = -\dfrac{\pi}{2} \vee t = \dfrac{\pi}{2} \vee t = 0$

#9: $\dfrac{1}{\cos(t) + 1} \neq 0$

y no existe para cost = –1, es decir, t = π.
Luego, puntos críticos: t = 0, π/2 y π.
Puntos de tangencia horizontal: y'(t)=0, luego, no hay.
Puntos de tangencia vertical: x'(t)=0, y'(t)≠0, es decir, t=0.π/2

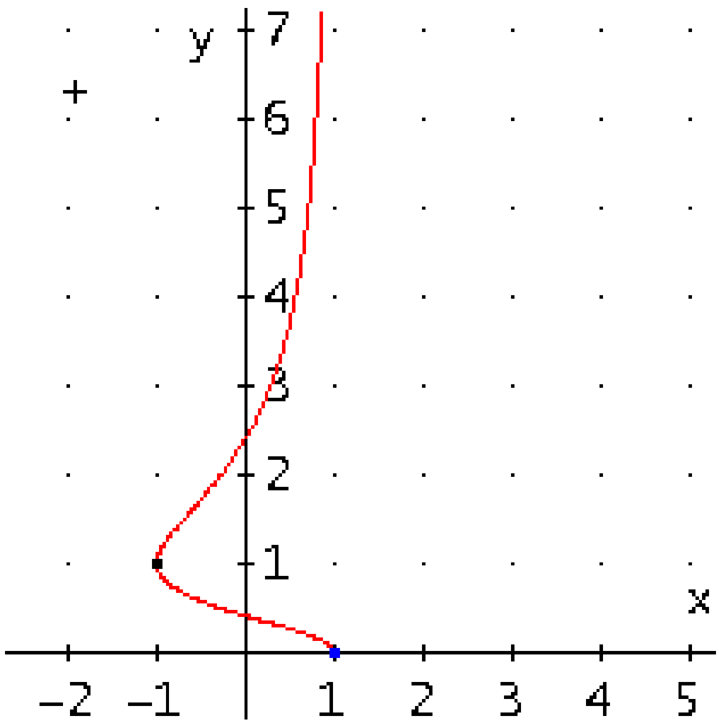
#10: $\left[\cos(2\cdot 0),\ \tan\left(\dfrac{0}{2}\right)\right] = \boxed{[1,\ 0]}$

#11: $\left[\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ \tan\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right] = \boxed{[-1,\ 1]}$

e) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas:

t	(x, y)	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(1,0)\to(-1,1)$	–	+	$\frac{+}{-} = -$	$1\downarrow 0$
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$(-1,1)\to(1,\infty)$ Asíntota x=1	+	+	$\frac{+}{+} = +$	$1\uparrow\infty$

La **posición más baja** que alcanza la partícula es el punto **(1,0)**, origen de la trayectoria.
No hay posición más alta pues, en la trayectoria, y(t) va creciendo hacia ∞, cuando t tiende a π.



25.- Una partícula se mueve en un plano vertical xy siguiendo la trayectoria de la curva:

$$\begin{cases} x(t) = tg\left(\frac{t}{2}\right) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$, solamente en la región $y \geq 0$. Se pide:

a) Posición inicial (x_0, y_0) de la partícula en el instante t = 0.

b) *Periodicidad* de la curva. Intervalo de tiempo necesario para generar la trayectoria completa.

c) Cálculo de *asíntotas*. ¿Es una trayectoria finita?

d) Calcular los *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical* de la curva.

e) Hacer un estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*. ¿Cuál es la posición (x, y) más baja que alcanza la partícula? ¿Cuál la más alta?

Solución:

#1: $\left[\mathrm{TAN}\left(\frac{t}{2}\right), \ \mathrm{COS}(2\cdot t)\right]$ para x≥0.

a) Posición inicial en t=0

#2: $\left[\mathrm{TAN}\left(\frac{0}{2}\right), \ \mathrm{COS}(2\cdot 0)\right] = \boxed{[0, \ 1]}$

b) Periodicidad de la curva:

Período de x(t): 2π; Período de y(t): π

Período de la curva = mcm (2π,π) = $\boxed{2\pi}$

Luego, basta tomar t en [0,2π] para generar la trayectoria completa. Como sólo interesa x ≥ 0, tomaremos t en [0,π]. Mejor dicho, en [0,π), pues π no pertenece al campo de variación de t.

c) Asíntotas:

Verticales: No hay pues −1 ≤ y ≤ 1.

Horizontales: tg(t/2) tiende a ∞ para t tendiendo a π:

#3: $\lim_{t \to \pi-} \mathrm{TAN}\left(\frac{t}{2}\right) = \infty$

#4: $\lim_{t \to \pi-} \mathrm{COS}(2\cdot t) = 1$

Luego $\boxed{y = 1}$ es asíntota horizontal para t→π−.

Oblicuas: No hay pues −1 ≤ y ≤ 1.

La trayectoria es, por tanto, infinita.

d) Puntos críticos:

#5: $\frac{d}{dt}\left[\mathrm{TAN}\left(\frac{t}{2}\right), \ \mathrm{COS}(2\cdot t)\right]$

#6: $\left[\frac{1}{\mathrm{COS}(t) + 1}, \ - 2\cdot \mathrm{SIN}(2\cdot t)\right]$

#7: $\dfrac{1}{\text{COS}(t) + 1} \neq 0$

y no existe para cost = −1, es decir, t = π.

#8: SOLVE(− 2·SIN(2·t) = 0, t, Real)

#9: $t = -\dfrac{\pi}{2} \vee t = \dfrac{\pi}{2} \vee t = 0$

Luego, puntos críticos: **t = 0, π/2 y π**.

Puntos de tangencia horizontal: y'(t)=0, x'(t)≠0, es decir, t=0.π/2

#10: $\left[\text{TAN}\left(\dfrac{0}{2}\right), \text{COS}(2\cdot 0)\right] = $ **[0, 1]**

#11: $\left[\text{TAN}\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\right), \text{COS}\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = $ **[1, −1]**

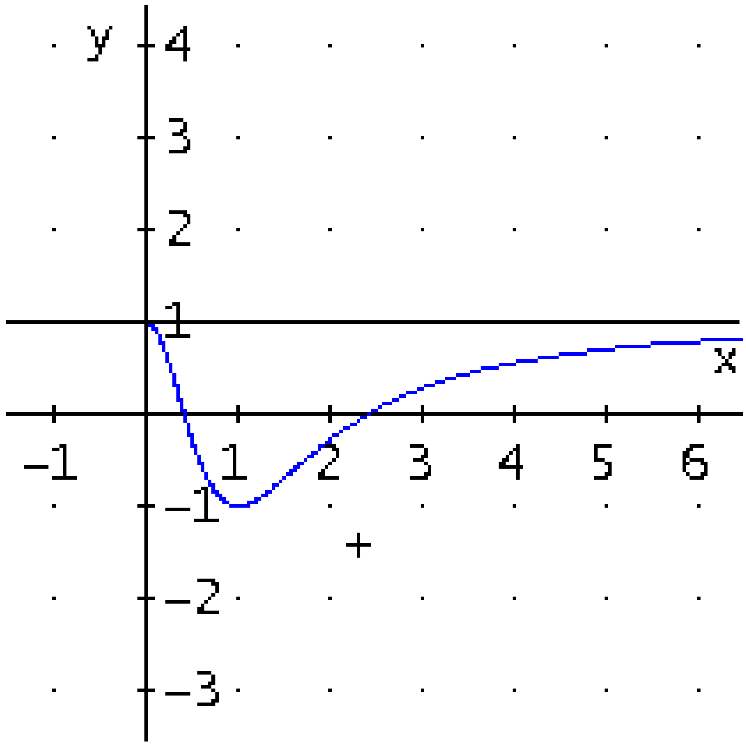
Puntos de tangencia vertical: x'(t)=0, y'(t)≠0, luego, no hay.

e) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas:

t	**(x, y)**	**x'(t)**	**y'(t)**	**y'(x)**	**y(x)**
$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	(0,1)→(1,−1)	+	−	$\dfrac{-}{+} = -$	1↓−1
$\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$	(1,−1) →(∞,1) Asíntota y=1	+	+	$\dfrac{+}{+} = +$	$1\uparrow 1^{-}$

La **posición más baja** que alcanza la partícula es el punto **(1,−1)** de tangencia horizontal.

La **más alta** es el **(0, 1)**, también de tangencia horizontal para t = 0. No para t = π, pues, al acercarse a la asíntota horizontal, y(t) va creciendo hacia y = 1,cuando t tiende a π, sin llegar a alcanzar ese valor.



26.- Como parte de un trazado de un circuito de entrenamiento de fórmula 1, se está considerando la gráfica de la curva: $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(2t) \\ y(t) = \cos\dfrac{t}{2} \end{cases}$, se pide:

a) *Campo de variación* de t
b) *Simetrías* de la curva
c) *Periodicidad*
d) Dar un intervalo de longitud mínima donde debe variar "t" para obtener la gráfica completa de la curva. Si no se quiere (ilógico!) que en el circuito haya cruces, indicar razonadamente un intervalo al que haya que limitarse, dentro del hallado anteriormente.
e) *Asíntotas*
f) En el intervalo [0, π]: *puntos críticos*, *puntos de tangencia horizontal* y *vertical*.
g) En el intervalo [0, π]: *ramas de la curva* y estudio del *crecimiento* por ramas.
h) Dibujo aproximado de la curva completa. A la vista del mismo, ¿cuántas *ramas* tiene en total?

***Solución*:**

#1: $\left[\mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{COS}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]$

a) Campo de variación de t: todo $\mathbb{R}$, pues las funciones sent y cost están definidas para cualquier número real.

b) Simetrías de la curva:

#2: $\left[\mathrm{SIN}(2\cdot(-t)),\ \mathrm{COS}\left(\dfrac{-t}{2}\right)\right]$

#3: $\left[-\ \mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{COS}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]$

Como x(–t)=–x(t) e y(–t)=y(t), la **curva es simétrica respecto al eje de ordenadas OY.**

c) Periodicidad:
Período de x(t)=(2π)/2=π; Período de y(t)=(2π)2=4π
Período de la curva = mcm (π,4π) = **4π**.

d) "t" ha de variar en un intervalo de longitud 4π, por ejemplo:[0,4π], ó bien [–2π,2π], ...
Para que no haya cruces, no ha de haber puntos dobles: Basta tomar la mitad [0,2π], por ejemplo.

e) Asíntotas: No hay, pues $-1 \le x(t),\ y(t) \le 1$.

f) En [0,π], puntos críticos (donde no existe o se anula alguna derivada):

#4: $\dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{SIN}(2\cdot t),\ \mathrm{COS}\left(\dfrac{t}{2}\right)\right]$

#5: $\left[2\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t),\ -\dfrac{\mathrm{SIN}\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2}\right]$

#6: SOLVE(2·COS(2·t), t, Real)

#7: $t = \dfrac{3\cdot\pi}{4} \vee t = -\dfrac{\pi}{4} \vee t = \dfrac{\pi}{4}$

#8: $\mathrm{SOLVE}\left(-\dfrac{\mathrm{SIN}\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#9: $t = -2\cdot\pi \vee t = 2\cdot\pi \vee t = 0$

Luego, **puntos críticos: 0 , $\pi/4$ y $3\pi/4$.** que corresponden, respectivamente, a los puntos sobre la curva:

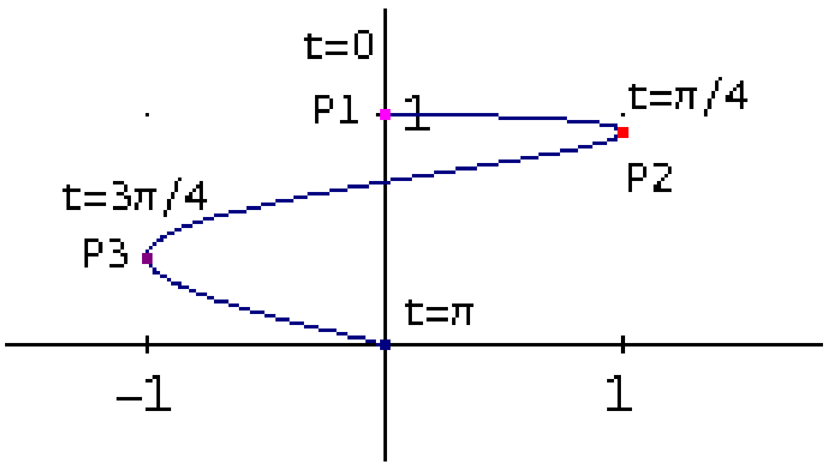
#10: $p_1 = \boxed{[0,\ 1]}$

#11: $p_2 = \boxed{\left[1,\ \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{1}{2}\right)}\right]}$

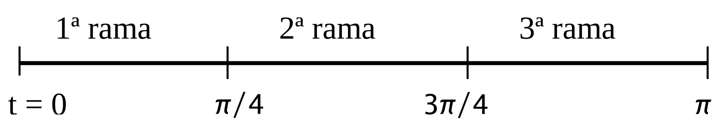
#12: $p_3 = \boxed{\left[-1,\ \sqrt{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}$

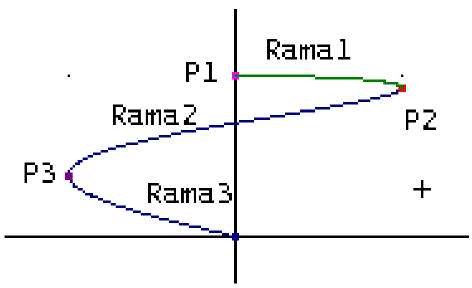
Puntos de tangencia horizontal: P_1

Puntos de tangencia vertical: P_2 y P_3.



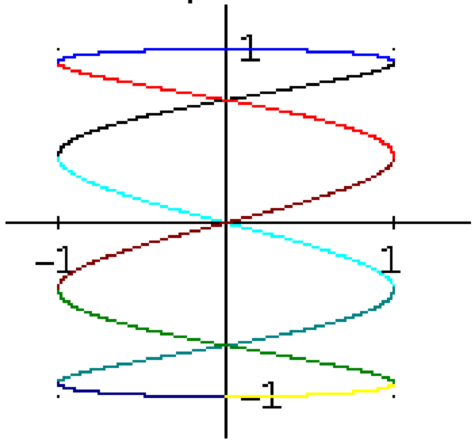
g) En [0,π], ramas de la curva y estudio del crecimiento por ramas:





t	(x, y)	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$	$P_1=(0,1)\to P_2=\left(1,\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}\right)$	+	−	$\frac{-}{+}=-$	$1\downarrow\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}$
$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$	$P_2=\left(1,\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}\right)\to P_3=\left(-1,\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$	−	−	$\frac{-}{-}=+$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}\uparrow$ $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}$
$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$	$P_3=\left(-1,\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\to(0,0)$	+	−	$\frac{-}{+}=-$	$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\downarrow 0$

h) Dibujo aproximado de la curva completa:



Tiene 10 ramas en total.

27.- Dada la curva $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$, se pide:

a) Hallar las *asíntotas*

b) Obtener los *puntos de tangencia vertical* y horizontal

c) Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento* de la curva por *ramas*.

Solución:

#1: $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

a) Asíntotas:

#2: $\lim_{t\to-\infty} \left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#3: $[-\infty, 0]$

Asíntota horizontal:

#4: $y = 0$

#5: $\lim_{t\to-1} \left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#6: $\left[-\dfrac{1}{2}, \pm\infty\right]$

Asíntota vertical:

#7: $x = -\dfrac{1}{2}$

#8: $\lim_{t\to1} \left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#9: $[\pm\infty, \pm\infty]$

#10: $\lim_{t\to1} \dfrac{\dfrac{t}{t^2-1}}{\dfrac{t^2}{t-1}}$

#11: $\dfrac{1}{2}$

#12: $\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{t}{t^2-1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2}{t-1}\right)$

#13: $-\dfrac{3}{4}$

Asíntota oblicua:

#14: $y=\dfrac{1}{2}\cdot x-\dfrac{3}{4}$

#15: $\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{t^2}{t-1},\ \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#16: $[\infty,\ 0]$

#17: $y = 0$

#18: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t^2}{t-1},\ \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#19: $\left[\dfrac{t\cdot(t-2)}{(t-1)^2},\ -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}\right]$

#20: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{t\cdot(t-2)}{(t-1)^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#21: $t = 2 \vee t = 0$

#22: $\mathrm{SOLVE}\left(-\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#23: false

b)

Puntos de tangencia vertical:

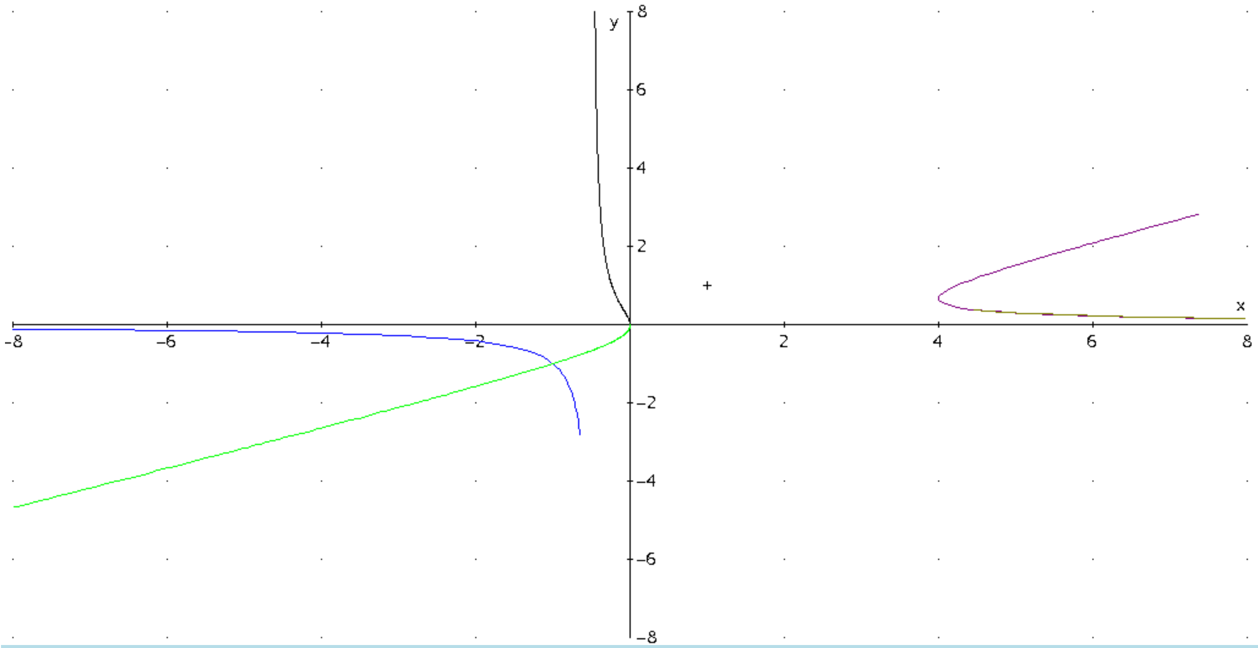
#24: $[0,\ 0]$

#25: $\left[4,\ \dfrac{2}{3}\right]$

No hay puntos de tangencia horizontal, ya que y'(t) no se anula.

Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	$x'(t)=\dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$	$y'(t)=-\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$	y'(x)=y'(t)/x'(t)	[x(t),y(t)]
$t<-1$	+	-	-	decrece
-1<t<0	+	-	-	decrece
0	0	-1	no existe	tg vertical (0,0)
0<t<1	-	-	+	crece
1<t<2	-	-	+	crece
2	0	-5/9	no existe	tg vertical (4,2/3)
2<t	+	-	-	decrece



28.- Dada la curva $\left(x(t), y(t)\right) = \left(\dfrac{t\left(3t^2-2\right)}{1-t^2}, \dfrac{t^4}{1-t^2}\right)$, se pide:

a) *Simetrías* de la curva.

b) Ecuaciones de las *asíntotas oblicuas*.

c) *Puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *puntos singulares*.

Solución:

(A) Simetrías

Buscamos simetrías al sustituir t por –t:

#1: $\left[\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}, \dfrac{t^4}{1-t^2}\right]$

#2: $\left[\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{t^2-1}, \dfrac{t^4}{1-t^2}\right]$

$$\left(x(-t), y(-t)\right) = \left(-\frac{t(3t^2-2)}{1-t^2}, \frac{t^4}{1-t^2}\right) = \left(-x(t), y(t)\right)$$

Simétrica respecto al eje de ordenadas

(B) Pueden existir asíntotas oblicuas para valores de t_0 tales que $x(t_0) \to \infty$ e $y(t_0) \to \infty$.

En nuestro caso $y(t_0) \to \infty \Rightarrow t_0 = -1$ ó 1, y $x(t_0) \to \infty \Rightarrow t_0 = -1$ ó 1.

#3: $\lim_{t\to 1} \left[\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}, \dfrac{t^4}{1-t^2}\right]$

#4: $[\pm\infty, \pm\infty]$

#5: $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{\dfrac{t^4}{1-t^2}}{\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}}$

#6: $-\infty$

$$\#7: \quad \lim_{t\to -1} \frac{\dfrac{t^4}{1-t^2}}{\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}}$$

$$\#8: \quad -1$$

$$\#9: \quad \lim_{t\to -1}\left(\frac{t^4}{1-t^2}+\frac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}\right)$$

$$\#10: \quad \frac{3}{2}$$

$$\#11: \quad y = -x + \frac{3}{2}$$

Por tanto, **y=-x+3/2 es una asíntota oblicua**.

$$\#12: \quad \lim_{t\to 1} \frac{\dfrac{t^4}{1-t^2}}{\dfrac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}}$$

$$\#13: \quad 1$$

$$\#14: \quad \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^4}{1-t^2}-\frac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}\right)$$

$$\#15: \quad \frac{3}{2}$$

$$\#16: \quad y = x + \frac{3}{2}$$

Por tanto, **y=x+3/2 es una asíntota oblicua**.

C) Los puntos de tangencia vertical son aquellos en que x’(t)=0 e $y'(t) \neq 0$

$$\#17: \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{t\cdot(3\cdot t^2-2)}{1-t^2}, \frac{t^4}{1-t^2}\right]$$

#18: $$\left[-\frac{3\cdot t^4-7\cdot t^2+2}{(t^2-1)^2},\ \frac{2\cdot t^3\cdot(2-t^2)}{(t^2-1)^2}\right]$$

#19: $$\mathrm{SOLVE}\left(-\frac{3\cdot t^4-7\cdot t^2+2}{(t^2-1)^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$$

#20: $$t=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \vee\ t=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \vee\ t=-\sqrt{2}\ \vee\ t=\sqrt{2}$$

#21: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{2\cdot t^3\cdot(2-t^2)}{(t^2-1)^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$$

#22: $$t=-\sqrt{2}\ \vee\ t=\sqrt{2}\ \vee\ t=0$$

#23: $$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{6}\right]$$

Luego el punto $\left(x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{6}\right)$ es un punto de tangencia vertical, por simetría también lo es $\left(x\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),y\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{6}\right)$.

#24: $[0,\ 0]$

Los puntos de tangencia horizontal son aquellos en que $x'(t)\neq 0$ e $y'(t)=0$

Luego el punto $[x(0),y(0)]=[0,0]$ es un punto de tangencia horizontal.

Puntos singulares son aquellos en que $x'(t)=0$ e $y'(t)=0$ o bien no existen dichas derivadas.

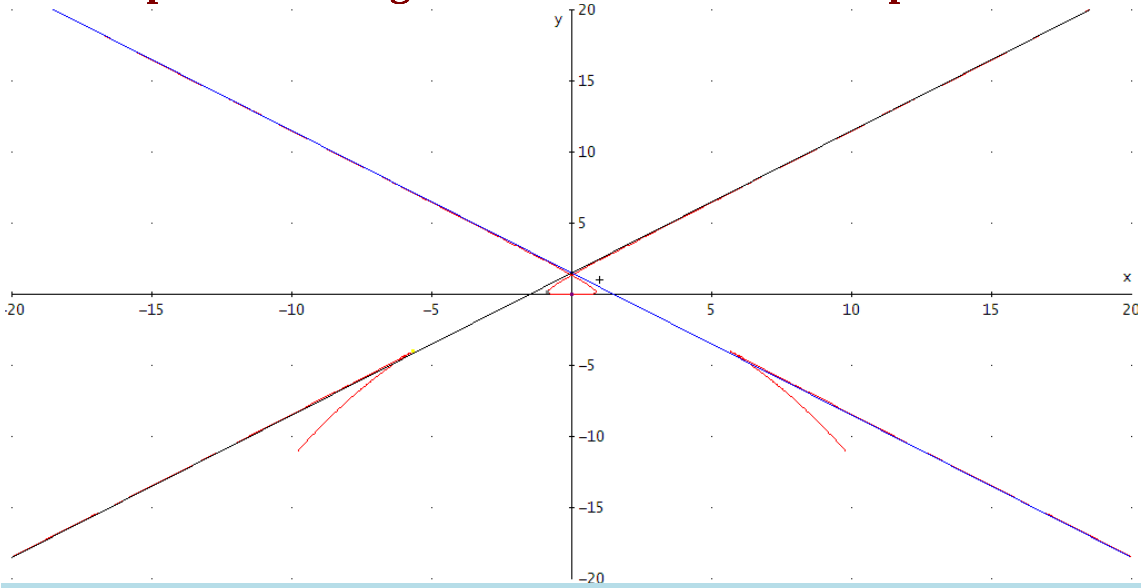
#25: $[-4\cdot\sqrt{2},\ -4]$

Luego el punto $\left(x\left(\sqrt{2}\right),y\left(\sqrt{2}\right)\right)=\left(-4\sqrt{2},-4\right)$ es un punto singular, por simetría también lo es $\left(x\left(-\sqrt{2}\right),y\left(-\sqrt{2}\right)\right)=\left(4\sqrt{2},-4\right)$.

#26: $$\frac{d}{dt}\left[-\frac{3\cdot t^4-7\cdot t^2+2}{(t^2-1)^2},\ \frac{2\cdot t^3\cdot(2-t^2)}{(t^2-1)^2}\right]$$

#27: $$\left[\frac{2\cdot t\cdot(t^2+3)}{(1-t^2)^3},\ \frac{2\cdot t^2\cdot(t^4-3\cdot t^2+6)}{(1-t^2)^3}\right]$$

#28: $[-10\cdot\sqrt{2},\ -16]$


y
20
15
10
5
x
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20
-5
-10
-15
-20

29.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)} \end{cases}$ **, se pide:**

a) Hallar el *Campo de variación* del parámetro t.

b) Estudiar la existencia de *asíntotas* y en su caso calcularlas.

c) Hallar los *puntos críticos*.

d) Estudiar los *puntos de tangencia horizontal*, *vertical* y *singulares*.

***Solución*:**

a)

#1: $\left[\dfrac{t}{t-1}, \dfrac{t+1}{t\cdot(t-1)}\right]$

El campo de variación de t es: **R−{0,1}**

b)

Asíntotas verticales: y→∞ cuando t→0,1; para esos valores hallamos el límite de x(t)

#2: $$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t-1} = 0$$

#3: $$\lim_{t\to 1} \frac{t}{t-1} = \pm\infty$$

Luego **x=0 es una asíntota vertical** de la curva

Asíntotas horizontales: x→∞ cuando t→1, para este valor hallamos el límite de y(t)

#4: $$\lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t\cdot(t-1)} = \pm\infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: buscamos los valores para los cuales x→∞ e y→∞ simultáneamente, solo hay un único valor que es t=1, para este valor vemos si existen m y n

#5: $$\lim_{t\to 1} \frac{\dfrac{t+1}{t\cdot(t-1)}}{\dfrac{t}{t-1}} = 2$$

#6: $$\lim_{t\to 1} \left(\frac{t+1}{t\cdot(t-1)} - 2\cdot\frac{t}{t-1}\right) = -3$$

Luego **y=2x−3 es una asíntota oblicua**

c)

Puntos críticos: Valores que anulan, o para los que no existen x'(t), e y'(t)

$$\#7: \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{t}{t-1}, \frac{t+1}{t\cdot(t-1)}\right] = \left[-\frac{1}{(t-1)^2}, -\frac{t^2+2\cdot t-1}{t^2\cdot(t-1)^2}\right]$$

x'(t)≠0 para cualquier t y no existe en t=1

Hallamos los valores que anulan a y'(t)

$$\#8: \quad \text{SOLVE}(t^2 + 2\cdot t - 1, t, \text{Real})$$

$$\#9: \quad t = -\sqrt{2} - 1 \lor t = \sqrt{2} - 1$$

Además y'(t) no existe en t=0,1.

Luego la curva tiene 4 puntos críticos. **$t=-\sqrt{2}-1$, $t=0$, $t=\sqrt{2}-1$, $t=1$**

$$\#10: \left[\frac{-\sqrt{2}-1}{(-\sqrt{2}-1)-1}, \frac{(-\sqrt{2}-1)+1}{(-\sqrt{2}-1)\cdot((-\sqrt{2}-1)-1)}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\cdot\sqrt{2}-3\right]$$

$$\#11: \quad \left[\frac{0}{0-1}, \frac{0+1}{0\cdot(0-1)}\right] = [0, \pm\infty]$$

$$\#12: \left[\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)-1}, \frac{(\sqrt{2}-1)+1}{(\sqrt{2}-1)\cdot((\sqrt{2}-1)-1)}\right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\cdot\sqrt{2}-3\right]$$

$$\#13: \quad \left[\frac{1}{1-1}, \frac{1+1}{1\cdot(1-1)}\right] = [\pm\infty, \pm\infty]$$

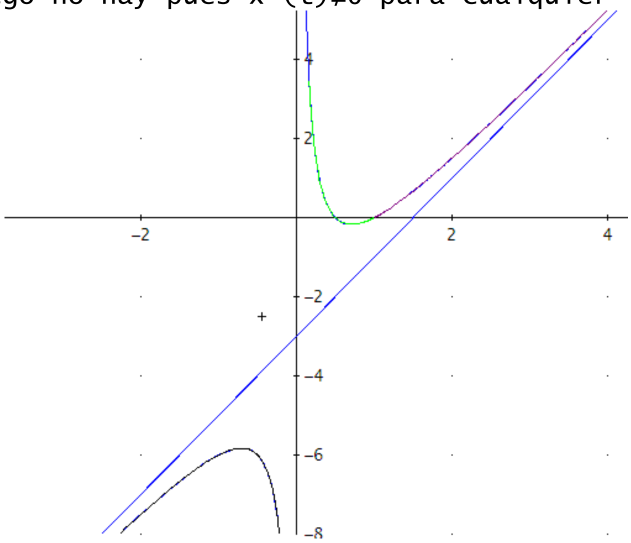
d)

Los puntos de tangencia horizontal son aquellos para los que y'(t)=0 y x'(t)≠0 simultáneamente, luego son

$$\#14: \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\cdot\sqrt{2}-3\right] \land \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\cdot\sqrt{2}-3\right]$$

Los puntos de tangencia vertical son aquellos para los que y'(t)≠0 y x'(t)=0 simultáneamente, luego no hay pues x'(t)≠0 para cualquier t.

Los puntos singulares son aquellos para los que y'(t)=0 y x'(t)=0 simultáneamente, luego no hay pues x'(t)≠0 para cualquier t.



30.- Dada la curva: $\begin{cases} x\ (t) = \dfrac{1}{t+1} \\ y\ (t) = t^2 + 1 \end{cases}$. Se pide:

a) *Dominio*
b) *Simetrías*
c) *Asíntotas*
d) *Puntos críticos*, *singulares* y de *tangencia vertical* y *horizontal*
e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas
f) *Corte con los ejes* y con las *asíntotas*

Solución:

a.- Dominio: **R-{-1}**

b.- Simetrías

$\begin{cases} x\ (-t) \neq \pm x\ (t) \\ y\ (-t) = y\ (t) \end{cases}$, No hay simetrías.

c.- Asíntotas

#1: $\left[\dfrac{1}{t+1},\ t^2 + 1\right]$

#2: $\lim\limits_{t \to -\infty} \left[\dfrac{1}{t+1},\ t^2 + 1\right]$

#3: $[0,\ \infty]$

#4: **x = 0 Asíntota vertical**

#5: $\lim\limits_{t \to -1} \left[\dfrac{1}{t+1},\ t^2 + 1\right]$

#6: $[\pm\infty,\ 2]$

#7: **y = 2 Asíntota horizontal**

#8: $\lim\limits_{t \to \infty} \left[\dfrac{1}{t+1},\ t^2 + 1\right]$

#9: $[0,\ \infty]$

d.- Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

#10: $\dfrac{d}{dt} \left[\dfrac{1}{t+1},\ t^2 + 1\right]$

#11: $\left[-\dfrac{1}{(t+1)^2},\ 2 \cdot t\right]$

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{1}{(t+1)^2} < 0 \\ y'(t) = 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\{t_1 = 0 \Rightarrow P_1(1,1)}$ $\Rightarrow \{$Puntos de tangencia horizontal: P_1

Puntos singulares: No hay

Puntos críticos: $\boxed{t_1 = 0; t_2 = -1}$

f.- Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t		x’	y’	y’(x)	y(x)
T< 0	$(0,\infty) \to (1,1)$	-	-	+	↗
0	$\boxed{(1,1)}$	-1	0	0	Tangencia horizontal
0<t<-1	$(1,1) \to (-\infty,2)$	-	+	-	↙
-1<t	$(\infty,2) \to (0,\infty)$	-	+	-	↙

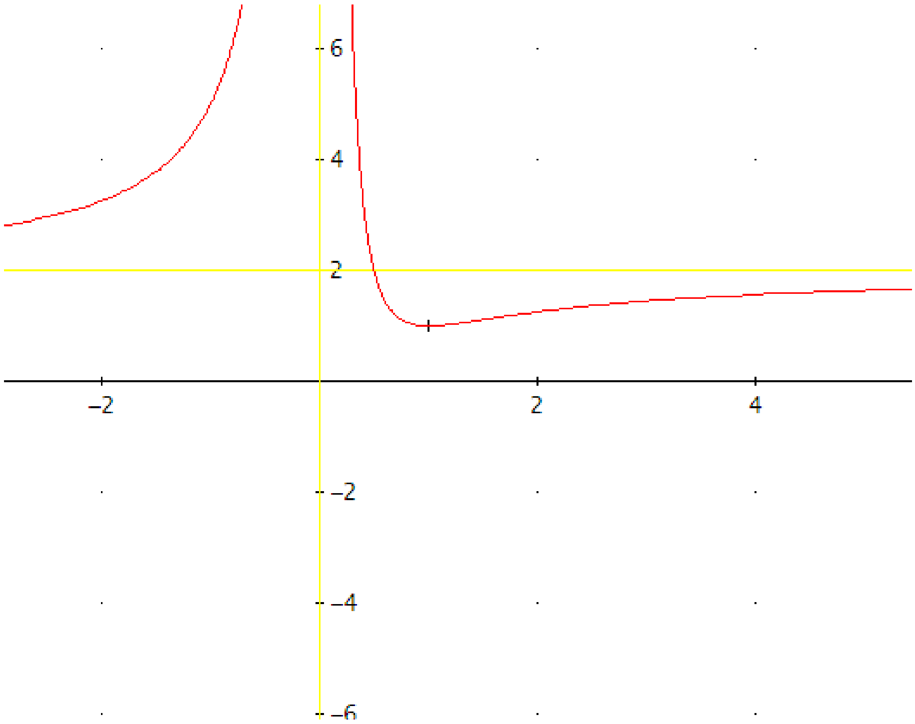
Mínimo relativo en (1,1)

g.- Cortes con los ejes y con las asíntotas

Con OY: $x = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{t+1} = 0 \Rightarrow \text{Imposible}$

Con OX: $y = 0 \Rightarrow t^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{Imposible}$

Con la asíntota horizontal: y= 2$\Rightarrow$ $t^2 + 1 = 2 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow P_2\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$



31.- Indicar el *periodo* de la curva $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(3\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{sen}\left(3t+2\pi\right) = \text{sen}(3t) = x(t) \text{ de período } \dfrac{2\pi}{3} \\ y(t+\pi) = \cos\left(2\left(t+\pi\right)\right) = \cos\left(2t+2\pi\right) = \cos(2t) = y(t) \text{ de período } \pi \end{cases}$$

$$\textbf{mcm}\left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2\pi}$$

32.- Dada la curva: $\begin{cases} x\ (t) = \dfrac{t^2}{t+1} \\ y\ (t) = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$. Se pide:

a) *Dominio*
b) *Simetrías*
c) *Asíntotas*
d) *Puntos críticos*, *singulares* y de *tangencia vertical* y *horizontal*
e) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*
f) *Corte con los ejes* y con las *asíntotas*

Solución:

a.- Dominio: **R-{-1,1}**

b.- Simetrías

$$\begin{cases} x\ (-t) \neq \pm x\ (t) \\ y\ (-t) = -y\ (t) \end{cases},$$

No hay simetrías.

c.- Asíntotas

#1: $\left[\dfrac{t^2}{t+1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#2: $\lim\limits_{t\to-\infty} \left[\dfrac{t^2}{t+1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#3: $[-\infty,\ 0]$

#4: $\lim\limits_{t\to-1} \left[\dfrac{t^2}{t+1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$

#5: $[\pm\infty,\ \pm\infty]$

#6: $\lim\limits_{t\to-1} \dfrac{\dfrac{t}{t^2-1}}{\dfrac{t^2}{t+1}}$

#7: $\dfrac{1}{2}$

#8: $\lim_{t\to -1} \left(\frac{t}{t^2 - 1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t+1} \right)$

#9: $\frac{3}{4}$

#10: **$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ Asíntota oblicua**

#11: $\lim_{t\to 1} \left[\frac{t^2}{t+1}, \frac{t}{t^2 - 1} \right]$

#12: $\left[\frac{1}{2}, \pm\infty \right]$

#13: **$x = \frac{1}{2}$ Asíntota vertical**

#14: $\lim_{t\to \infty} \left[\frac{t^2}{t+1}, \frac{t}{t^2 - 1} \right]$

#15: $[\infty, 0]$

#16: **$y = 0$ Asíntota horizontal**

d.- Puntos críticos, singulares y de tangencia horizontal y vertical

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \\ y'(t) = -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow P_1(0,0) \\ t_2 = -2 \Rightarrow P_2\left(-4, -\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}} \Rightarrow \{\text{Puntos de tangencia vertical: } P_1 \text{ y } P_2$$

Puntos singulares: No hay

Puntos críticos: $t_1 = 0; t_2 = -2; t_3 = -1; t_4 = 1$

e.- Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t		x’	y’	y’(x)	y(x)
< -2	$(-\infty,0)\to\left(-4,-\frac{2}{3}\right)$	+	-	-	$\swarrow$
-2	$\left(-4,-\frac{2}{3}\right)$	0	-	$\nexists$	Tangencia vertical
-2<t<-1	$\left(-4,-\frac{2}{3}\right)\to(-\infty,-\infty)$	-	-	+	$\nearrow$
-1<t<0	$(\infty,\infty)\to(0,0)$	-	-	+	$\nearrow$
0	$(0,0)$	0	-	$\nexists$	Tangencia vertical
0<t<1	$(0,0)\to\left(\frac{1}{2},-\infty\right)$	+	-	-	$\swarrow$
1<t	$\left(\frac{1}{2},-\infty\right)\leftrightarrow(\infty,0)$	+	-	-	$\swarrow$

f.- Cortes con los ejes

Con OY: $x=0\Rightarrow \frac{t^2}{t+1}=0\Rightarrow t=0\Rightarrow \boxed{P_1(0,0)}$

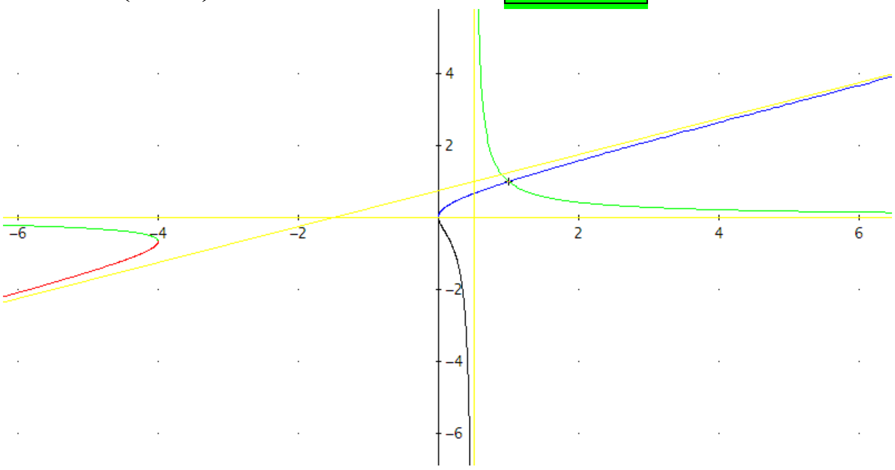
Con OX: $y=0\Rightarrow \frac{t}{t^2-1}=0\Rightarrow t=0 \Rightarrow P_1(0,0)$

Con la **asíntota vertical**:

$$x=0.5\Rightarrow \frac{t^2}{t+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{P_3\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)}$$

Con la **asíntota oblicua**:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{t+1}\right)+\frac{3}{4}\Rightarrow t=-1; t=\frac{3}{4}\Rightarrow \boxed{P_4\left(\frac{9}{10},\frac{6}{5}\right)}$$



33.- Indicar el *periodo* de la curva $\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x(t+\pi) = \cos\big(2(t+\pi)\big) = \cos(2t) = \cos(2t+2\pi) = x(t) \text{ de período } \pi \\ y(t+3\pi) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t+3\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t}{3}+\pi\right) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) = y(t) \text{ de período } 3\pi \end{cases}$$

$$\mathbf{mcm}(\pi, 3\pi) = \boxed{3\pi}$$

34.- a) ***Simetrías*** **de la curva** $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = t + \operatorname{sen} t \end{cases}$.

b) ***Asíntotas*** **de la curva** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{t^2 - 4} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 4} \end{cases}$

c) ***Periodicidad*** **de la curva** $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$

d) ***Puntos de tangencia vertical*** **de la curva** $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$.

e) ***Puntos singulares*** **de la curva** $\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t \\ y(t) = t - \operatorname{sen} t \end{cases}$

Solución:

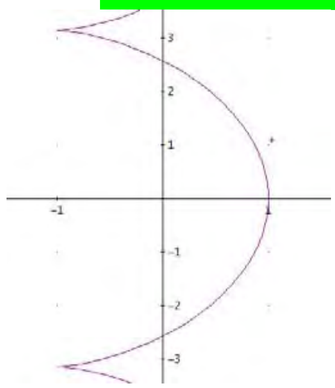
a) Simetrías de la curva $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = t + \operatorname{sen} t \end{cases}$.

#1: [1 - COS(t), t - SIN(t)]

#2: [COS(t), t + SIN(t)]

#3: [COS(t), - SIN(t) - t]

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, luego la curva es **simétrica respecto del eje OX**.



b) Asíntotas de la curva $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{t^2 - 4} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 4} \end{cases}$

#6: $\left[\dfrac{2}{t^2 - 4}, \dfrac{2 \cdot t}{t^2 - 4}\right]$

#7: $\lim_{t \to -\infty} \left[\dfrac{2}{t^2 - 4}, \dfrac{2 \cdot t}{t^2 - 4}\right]$

#8: [0, 0]

#9: $$\lim_{t\to -2}\left[\frac{2}{t^2-4}, \frac{2\cdot t}{t^2-4}\right]$$

#10: $$[\pm\infty, \pm\infty]$$

#11: $$\lim_{t\to 2}\left[\frac{2}{t^2-4}, \frac{2\cdot t}{t^2-4}\right]$$

#12: $$[\pm\infty, \pm\infty]$$

luego la curva puede presentar una asíntota oblicua *y*= m*x*+*n*, para determinarla calculamos m y n

#13: $$m = \lim_{t\to 2}\frac{\dfrac{2\cdot t}{t^2-4}}{\dfrac{2}{t^2-4}}$$

#14: $$2$$

#15: $$n = \lim_{t\to 2}\left(\frac{2\cdot t}{t^2-4} - 2\cdot\frac{2}{t^2-4}\right)$$

#16: $$\frac{1}{2}$$

#17: $$y = 2\cdot x + \frac{1}{2}$$

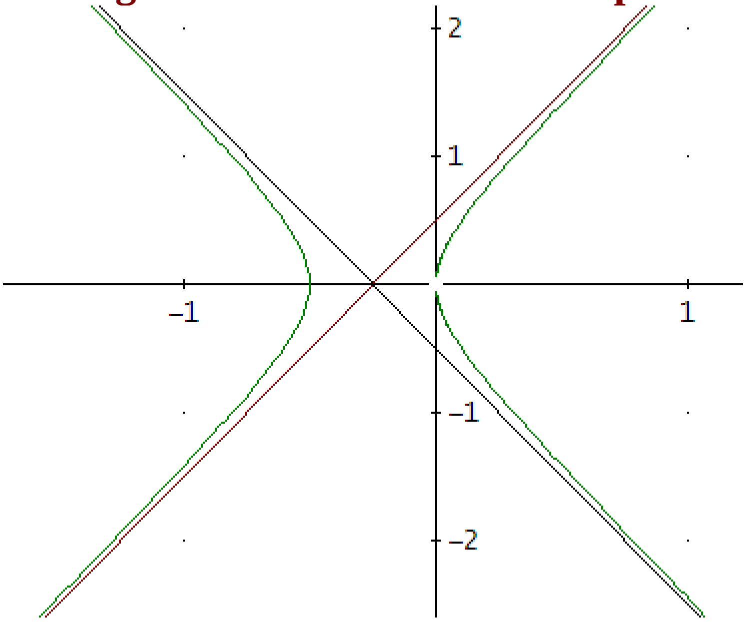
Por simetría tenemos:

#18: $$\lim_{t\to -2}\frac{\dfrac{2\cdot t}{t^2-4}}{\dfrac{2}{t^2-4}} = -2$$

#19: $$\lim_{t\to -2}\left(\frac{2\cdot t}{t^2-4} + 2\cdot\frac{2}{t^2-4}\right)$$

#20: $$-\frac{1}{2}$$

#21: $$y = -2\cdot x - \frac{1}{2}$$



b) Periodicidad de la curva $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \text{tg}\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$

#4: $\left[\text{COS}(2\cdot t),\ \text{TAN}\left(\dfrac{t}{3}\right)\right]$

#5: $\text{LCM}(\pi,\ 3\cdot\pi) = \boxed{3\cdot\pi}$

$\begin{cases} x(t+\pi) = x(t) \\ y(t+3\pi) = y(t) \end{cases}$,luego la curva es una función periódica de t, de período m.c.m.$(\pi,3\pi)=3\pi$.

d) Puntos de tangencia vertical de la curva $\begin{cases} x(t) = \text{sen}t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$

#23: [SIN(t), COS(t)]

#24: $\dfrac{d}{dt}$ [SIN(t), COS(t)]

#25: [COS(t), − SIN(t)]

#26: SOLVE(COS(t), t, Real)

#27: $t = \dfrac{3\cdot\pi}{2} \vee t = -\dfrac{\pi}{2} \vee t = \dfrac{\pi}{2}$

#28: SOLVE(− SIN(t), t, Real)

#29: $t = -\pi \vee t = \pi \vee t = 0$

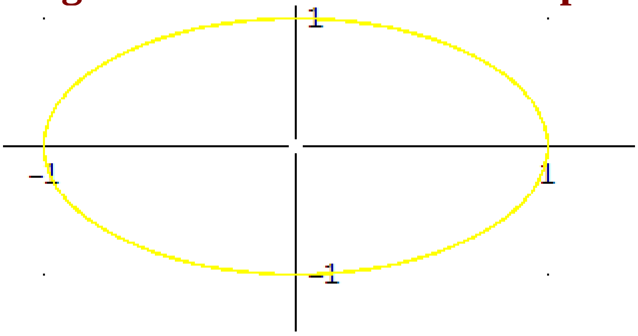
Puntos de tangencia vertical: son aquellos donde x'(t)=0 e y'(t)≠0

#30: $\left[\text{SIN}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right),\ \text{COS}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

#31: $\boxed{[-1,\ 0]}$

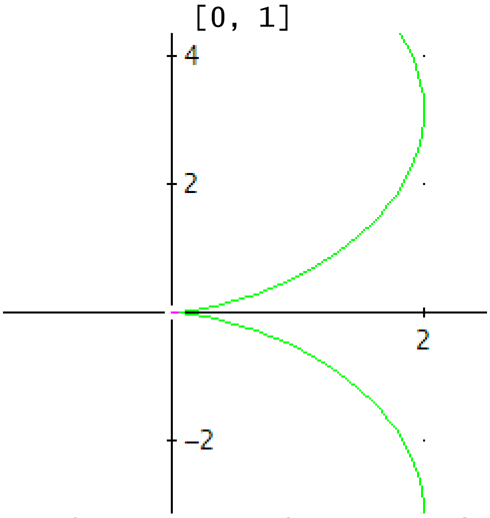
#32: $\left[\text{SIN}\left(\dfrac{\pi}{2}\right),\ \text{COS}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

#33: $\boxed{[1,\ 0]}$



e) Puntos singulares de la curva $\begin{cases} x(t) = 1 - \cos t \\ y(t) = t - \operatorname{sen} t \end{cases}$

```
#34:  [1 - COS(t), t - SIN(t)]
      d
#35:  ── [1 - COS(t), t - SIN(t)]
      dt
#36:                            [SIN(t), 1 - COS(t)]
#37:  SOLVE(SIN(t), t, Real)
#38:                            t = -π ∨ t = π ∨ t = 0
#39:  SOLVE(1 - COS(t), t, Real)
#40:                         t = - 2·π ∨ t = 2·π ∨ t = 0
#41:  [1 - COS(0), 0 - SIN(0)]
#42:                                  [0, 0] es un punto singular
      d
#43:  ── [SIN(t), 1 - COS(t)]
      dt
#44:                              [COS(t), SIN(t)]
#45:  [COS(0), SIN(0)]
#46:                                   [1, 0]
      d
#47:  ── [COS(t), SIN(t)]
      dt
#48:                             [- SIN(t), COS(t)]
#49:  [- SIN(0), COS(0)]
#50:                                   [0, 1]
```



El origen (0,0) es un punto de retroceso de 1ª especie.

35.- a) Sea la curva dada por las *ecuaciones paramétricas*: $\left(\frac{1}{tg(t)}, 4sen(t)\cos(t)\right)$, se pide:

i. *Campo de variación* de t

ii. *Asíntotas*

iii. Dar las *coordenadas* de los puntos de *tangencia horizontal*

b) Sea la curva dada por las *ecuaciones paramétricas*: $\left(4\cos(t), 4sen(t)\cos(t)\right)$, se pide:

i. Estudiar si la curva es *simétrica* y dar el *periodo* y un intervalo cuya longitud sea igual al *periodo*

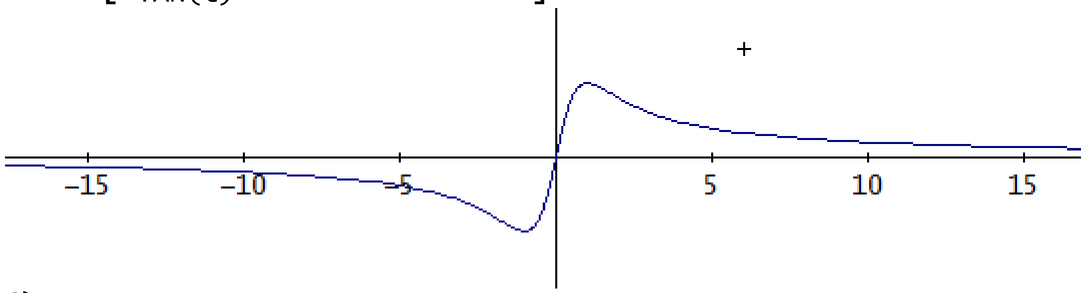
ii. Hallar los *puntos críticos*

iii. Dar las *coordenadas* de los puntos de *tangencia vertical*

Solución:

a) Para hallar el campo de variación de t, estudiamos los puntos donde existen x(t) e y(t)

#1: $\left[\frac{1}{\mathrm{TAN}(t)}, 4\cdot\mathrm{SIN}(t)\cdot\mathrm{COS}(t)\right]$



i)

Campo de variación: **R−{kπ,kεR}** pues $x(t)=\frac{1}{tgt}$ no está definida cuando tgt=0, es decir para t= kπ siendo k cualquier número entero.

Es una curva periódica de período: 2π, por ser la tangente una función periódica de periodo π y el seno y el coseno de periodo 2π, en consecuencia m.c.m.{π, 2π}=2π

Intervalo de estudio:(−π,π]

ii) Asíntotas:

Asíntotas verticales: no existen pues −4≤y(t)≤4, es decir, y no se puede hacer infinita para ningún valor de t.

Por la misma razón la curva tampoco puede tener asíntotas oblicuas.

Para estudiar la existencia de asíntotas horizontales hallamos los valores que hacen que x(t) se haga infinita (basta calcularlos en (−π,π]) y son precisamente los valores que anulan a tgt, es decir, t=0,π

#2: $\lim_{t\to\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{TAN}(t)}, 4\cdot\mathrm{SIN}(t)\cdot\mathrm{COS}(t)\right] = [\pm\infty, 0]$

#3: $\lim_{t\to-\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{TAN}(t)}, 4\cdot\mathrm{SIN}(t)\cdot\mathrm{COS}(t)\right] = [\pm\infty, 0]$

El eje de abscisas y = 0 es una asíntota horizontal.

iii) Puntos de tangencia horizontal: son los puntos donde se verifica que $y'(t)=0,\ x'(t)\neq 0$

$$\#4:\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{TAN(t)},\ 4\cdot SIN(t)\cdot COS(t)\right] = \left[-\frac{1}{SIN(t)^2},\ 8\cdot COS(t)^2 - 4\right]$$

Observemos que $\frac{1}{sen^2 t}\neq 0$ para cualquier valor de t.

$$\#5:\quad SOLVE(8\cdot COS(t)^2 - 4,\ t,\ Real)$$

$$t = \frac{7\cdot\pi}{4} \vee t = \frac{5\cdot\pi}{4} \vee t = -\frac{3\cdot\pi}{4} \vee t = \frac{3\cdot\pi}{4} \vee t = -\frac{\pi}{4} \vee t = \frac{\pi}{4}$$

Los valores de t contenidos en el intervalo $(-\pi,\pi]$ son:

$$\#7:\quad t = -\frac{3\cdot\pi}{4} \vee t = \frac{3\cdot\pi}{4} \vee t = -\frac{\pi}{4} \vee t = \frac{\pi}{4}$$

Los correspondientes puntos son:

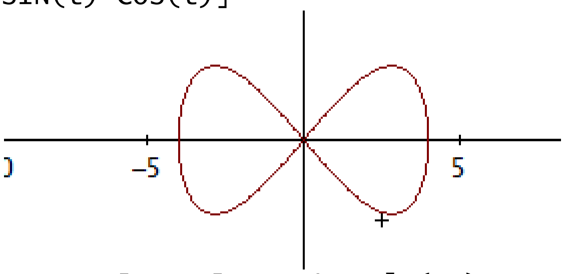
$$\#8:\quad \left[\frac{1}{TAN\left(-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)},\ 4\cdot SIN\left(-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\cdot COS\left(-\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\right] = \boxed{[1,\ 2]}$$

$$\#9:\quad \left[\frac{1}{TAN\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)},\ 4\cdot SIN\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\cdot COS\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\right] = \boxed{[-1,\ -2]}$$

$$\#10:\quad \left[\frac{1}{TAN\left(\frac{\pi}{4}\right)},\ 4\cdot SIN\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot COS\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{[1,\ 2]}$$

$$\#11:\quad \left[\frac{1}{TAN\left(-\frac{\pi}{4}\right)},\ 4\cdot SIN\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot COS\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{[-1,\ -2]}$$

b) $\#12:\quad [4\cdot COS(t),\ 4\cdot SIN(t)\ COS(t)]$



i) Simetrías: hallamos el valor de $[x(-t),\ y(-t)] = [4\cdot COS(t),\ -4\cdot SIN(t)\cdot COS(t)]$

Luego **La curva es simétrica respecto del eje OX**

Período: **2π** pues el sent y cost son funciones periódicas de periodo 2π

Intervalo mínimo de estudio es: $(-\pi,\pi]$ o bien $(0,\ 2\pi]$

ii) Puntos críticos en un intervalo de período mínimo $(-\pi,\pi]$, los puntos críticos son los puntos donde las derivadas x'(t) e y'(t) se anulan o no existen

#14: $\frac{d}{dt}$ [4·COS(t), 4·SIN(t)·COS(t)] = $\left[-4\cdot SIN(t),\ 8\cdot COS(t)^2 - 4\right]$

En este caso las derivadas existen para cualquier valor de t, luego solo hay que hallar los valores donde se anulan las derivadas antes mencionadas (restringiéndonos al intervalo de estudio)

#15: SOLVE(– 4·SIN(t), t, Real)

#16: $t = -\pi \lor t = \pi \lor t = 0$

#17: SOLVE(8·COS(t) – 4, t, Real)

#18: $t = -\frac{3\cdot\pi}{4} \lor t = \frac{3\cdot\pi}{4} \lor t = -\frac{\pi}{4} \lor t = \frac{\pi}{4}$

Sustituyendo en la curva se obtienen los puntos:
[4, 0], [–4, 0], [–2·√2, –2],], [–2·√2, –2], [2·√2, –2], [2·√2, 2]

iii) Puntos de tangencia vertical: son aquellos donde x'(t)=0 e y'(t)≠0
Período:

#19: [4·COS(–π), 4·SIN(–π) COS(–π)] = [–4, 0]

#20: [4·COS(π), 4·SIN(π) COS(π)] = [–4, 0]

#21: [4·COS(0), 4·SIN(0) COS(0)] = [4, 0]

36.- Dada la curva $(2p\cos t + p\cos(2t),\ 2p\text{sen}t - p\text{sen}(2t))$, siendo p una constante p>0, se pide:

a) *Campo de variación* de t.

b) Estudio de *simetrías*.

c) *Periodicidad*.

d) Estudio de la existencia de *asíntotas*.

e) *Puntos críticos* en $[0,\pi]$.

f) Estudio por *ramas* en $[0,\pi]$.

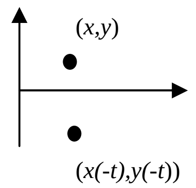
g) Gráfica aproximada.

***Solución*:**

$$\begin{cases} x(t) = 2p\text{ cos}t + p\text{ cos}(2t) \\ y(t) = 2p\text{ sen}t - p\text{ sen}(2t) \end{cases}$$

a) Para cualquier valor de p>0 el campo de variación de la curva dada es **R**.

b) Si en $(2p\cos t + p\cos(2t), 2p\sin t - p\sin(2t))$ sustituimos t por –t se obtiene $(2p\cos t + p\cos(2t), -2p\sin t + p\sin(2t))$, es decir, $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$



luego la curva es simétrica respecto del eje de abscisas

c) Tanto sen$t$ como cos$t$ son funciones periódicas de período 2π, por otro lado, sen(2t), cos(2t) son funciones periódicas de periodo π, luego la curva dada es periódica y su periodo es el m.c.m.{π, 2π} = **2π**

De los apartados b) y c) se concluye que basta estudiar la curva en [0, π] y el resto se conoce por simetría y periodicidad.

d) La curva no tiene asíntotas por ser sen t y cos t funciones acotadas y en consecuencia $-3p \le x(t) \le 3p, -3p \le y(t) \le 3p$, luego se trata de una curva cerrada y acotada en x e y.

e) Los puntos críticos son los que anulan a las primeras derivadas o dónde no existen. En [0,π]:

$x'(t) = -2p\text{sen}t - 2p\text{sen}(2t) = -2p(\text{sen}t + 2\text{sen}t\cos t) = -2p\text{sen}t(1 + 2\cos t) \Rightarrow$ se anula cuando

$$\begin{cases} \text{sen}t = 0 \\ \cos t = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi.$$

$y'(t) = 2p\text{cos}t - 2p\text{cos}(2t) = -2p\left(-\text{cos}t + \left(\cos^2 t - \text{sen}^2 t\right)\right) = -2p\left(-\text{cos}t + 2\cos^2 t - 1\right) \Rightarrow$ se anula

cuando $2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \Rightarrow \cos t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow t = 0, \dfrac{2\pi}{3}$.

Luego los puntos críticos son:

$$t = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{P_1 = (3p, 0)}}$$

$$t = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \boxed{\mathbf{P_2} = \left(-\frac{3p}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

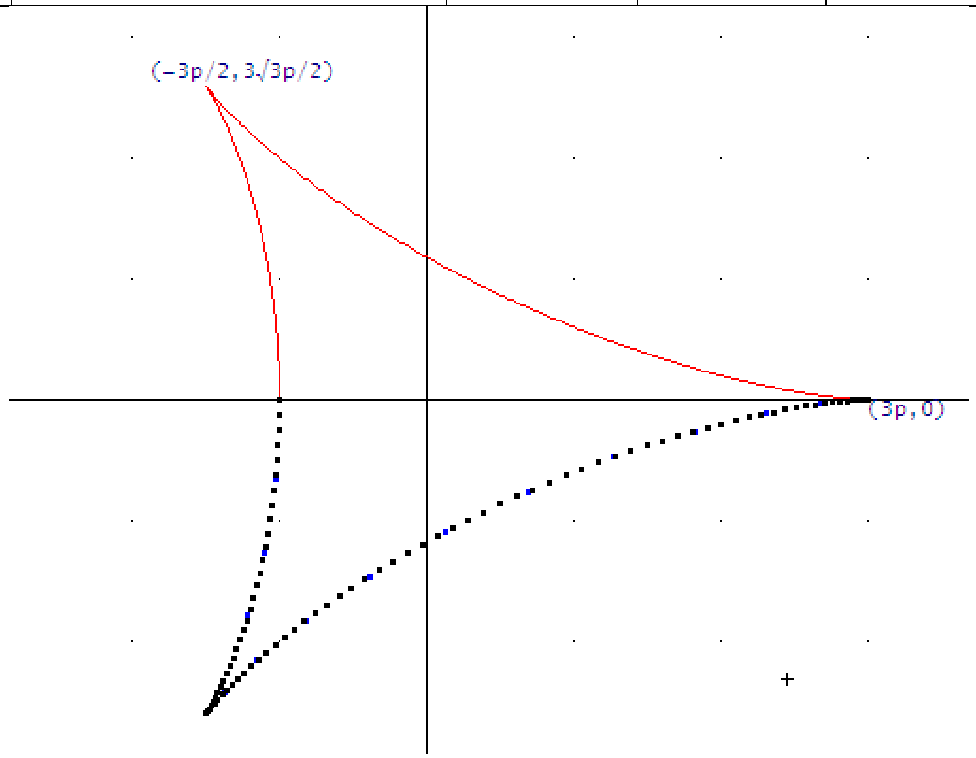
$$t = \pi \rightarrow \boxed{\mathbf{P_3 = (-p, 0)}}$$

Además, P_1 y P_2 son puntos singulares (anulan a ambas derivadas) y P_2 es un punto de tangencia vertical.

f) Estudio por ramas en $[0, \pi]$

$0 \qquad 2\pi/3 \qquad \pi$

$[t_i, t_j]$	$P_i \rightarrow P_j$	signo($x'(t)$)	signo($y'(t)$)	signo$\left(\frac{dy}{dx}\right)$
$\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$	$(3p, 0) \rightarrow \left(-\frac{3p}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}p\right)$	-	+	-
$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$	$\left(-\frac{3p}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}p\right) \rightarrow (-p, 0)$	+	-	-



37.-Realizar un estudio completo de la curva dada por las *ecuaciones paramétricas*: $\begin{cases} x = 2sen^2 t \\ y = 2sen^2 t \cos t \end{cases}$.

Solución:

a) Campo de variación del parámetro t: el campo de variación de la función es **R**.

b) Estudio de simetrías:

$$\begin{cases} x(-t) = 2sen^2(-t) = 2sen^2 t = x(t) \\ y(-t) = 2sen^2(-t)\cos(-t) = 2sen^2 t \cos t = y(t) \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} t \to (x,y) \\ -t \to (x,y) \end{cases}$$ luego la curva se repite para los valores negativos. Basta estudiarla para t≥0.

c) Periodicidad:

$$\begin{cases} x(t+\pi) = 2sen^2(t+\pi) = 2(sent\cos\pi + \cos t sen\pi)^2 = 2sen^2 t = x(t) \\ y(t+2\pi) = 2sen^2(t+2\pi)\cos(t+2\pi) = 2sen^2 t\cos t = y(t) \end{cases}$$

$x(t)$ es una función periódica de periodo π e $y(t)$ es periódica de periodo 2π, luego la curva es periódica de periodo **2π**, por lo que basta estudiarla en [-π,π].

Además $\begin{matrix} 0 \le x(t) \le 2 \\ -2 \le y(t) \le 2 \end{matrix}$, luego se trata de una curva cerrada y acotada.

***Por b) y ser periódica basta estudiarla en* [*0,π*]**

d) Estudio de asíntotas: Al tratarse de una curva cerrada y acotada **no tiene asíntotas**.

e) Puntos críticos en [0,π]: son aquéllos donde las derivadas se anulan o no existen. En este caso las funciones son derivables por lo que solo hay que calcular los valores que anulan a las derivadas

$x'(t) = 4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)=0 \Rightarrow t= 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$y'(t) = 6\cdot\sin(t)\cdot\cos^2(t) - 2\cdot\sin(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\sin(t)\cdot(3\cos^2(t) - 1) = 0 \Rightarrow t= 0$, 0.9553166181, 2.186276035, π. Luego los puntos críticos son:

$t = 0 \to$ **P_1 (0,0)**

$t = 0.9553166181 \to$ **P_2 (1.33333, 0.769800)** (de forma aproximada)

$t = \pi/2 \to$ **P_3 (2,0)**

$t = 2.186276035 \to$ **P_4 (1.33333, -0.769800)** (de forma aproximada)

$t = \pi \to P_1$ (0,0)

f) Puntos de tangencia horizontal, vertical y singulares:

P_1 (0,0) es un punto singular pues 0= $x'(0) = y'(0)$

P_2 (1.33333, 0.76980) es de tangencia horizontal pues 0= $y'(0)$ pero $x'(0)\neq 0$

P_3 (2,0) es tangencia vertical pues 0= $x'(0)$ pero $y'(0) \neq 0$

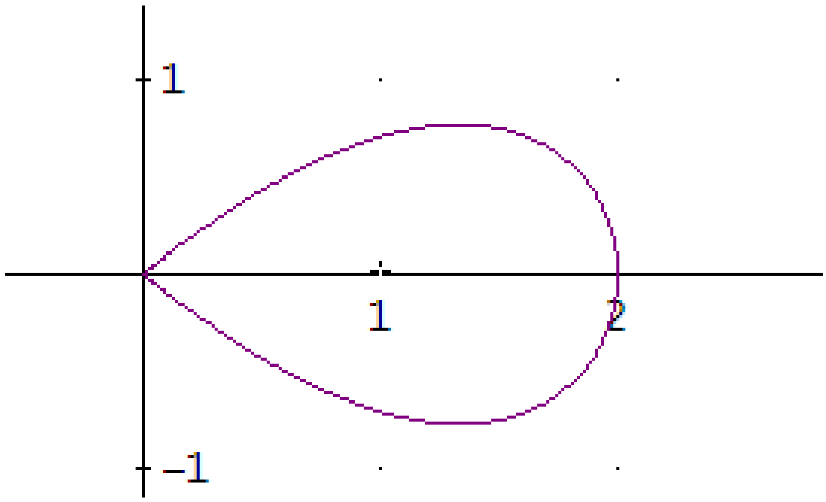
P_4 (1.33333, -0.769800) es de tangencia horizontal pues 0= $y'(0)$ pero $x'(0)\neq 0$

g) Estudio por ramas en $[0, \pi)$

Observamos 4 ramas

0 0.9553 $\pi/2$ 2.186276 π

Intervalo de variación de t	$P_{inicial} \rightarrow P_{final}$	Signo $x'(t)$	Signo $y'(t)$	Signo $\left(\frac{dy}{dx}\right)$
(0, 0.9553)	(0,0)→(1.3333, 0.76980)	+	+	+ (creciente)
(0.9553, $\pi/2$)	(1.3333, 0.76980)→(2,0)	+	-	- (decreciente)
($\pi/2$, 2.1862)	(2,0)→(1.3333, -0.76980)	-	-	+ (creciente)
(2.1862,π)	(1.3333, -0.76980)→(0,0)	-	+	- (decreciente)



38.- Dada la curva $\left(\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t-1}\right)$**, se pide:**

a) ***Campo de variación*** **de t**
b) Estudio de ***simetrías*****.**
c) Estudio de ***asíntotas*****.**

Solución:

a) El campo de variación de *t* es: **R– {1}**, pues *t* = 1 anula el denominados de *x* e *y*.

b) Estudio de simetrías:

$x(-t)= \frac{-t}{-t-1}=\frac{t}{t+1}\neq\begin{cases}x(t)\\-x(t)\end{cases}$, luego no podemos deducir que la curva es simétrica respecto de OX, ni de OY, ni del origen O. **No hay**.

c) La curva solo puede presentar asíntotas para aquellos valores de *t* para los cuales *x* ó *y* se hacen infinitas luego, teniendo en cuenta el apartado a), basta estudiar el comportamiento de la curva (usando como herramienta el cálculo de límites) en *t*= 1, -∞, +∞

- En *t*= 1

$\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t-1}\right)=(\infty,\infty)$, luego la curva puede presentar una asíntota oblicua *y*= m*x*+*n*, para determinarla calculamos m y n

m= $\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{\frac{t^2}{t-1}}{\frac{t}{t-1}}\right)=\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{t^2(t-1)}{t(t-1)}\right)=\lim\limits_{t\to1}t=1$, por lo tanto, la curva puede presenta asíntota en *t*=1.

n= $\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{t^2}{t-1}-1\frac{t}{t-1}\right)=\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{t(t-1)}{(t-1)}\right)=\lim\limits_{t\to1}t=1$

Por consiguiente, **y=1x+1** es una asíntota oblicua en *t*=1

- En $t\to\pm\infty$; $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t-1}\right)=(1,\pm\infty)$, luego la curva presentar una asíntota vertical **x=1**

39.- Dada la curva $\left(\text{sen}(2t), \cos(3t)\right)$, se pide:

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Cálculo de puntos *críticos* en [0, π].

c) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de t*angente horizontal, vertical o singulares.*

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

Solución:

a) El campo de variación de *t* es **R** por ser sen(2*t*) y cos (3*t*) funciones continuas.

b) Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen.

#1: Trigonometry := Expand

#2: [SIN(2·t), COS(3·t)]

#3: $\frac{d}{dt}$ [SIN(2·t), COS(3·t)] = [2·COS(2·t), − 3·SIN(3·t)]

Resolvemos x'(t)=0 y tomamos las soluciones en [0,π]

#4: SOLVE(2·COS(2·t), t, Real)

#5: $t = \frac{3\cdot\pi}{4} \vee t = \frac{\pi}{4}$

x'(t) existe para cualquier valor de t

Resolvemos y'(t)=0 y tomamos las soluciones en [0,π]

#6: SOLVE(− 3·SIN(3·t), t, Real)

#7: $t = \frac{2\cdot\pi}{3} \vee t = \frac{\pi}{3} \vee t = \pi \vee t = 0$

y'(t) existe para cualquier valor de t

Luego en [0, π] hay puntos críticos en $t=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

c)

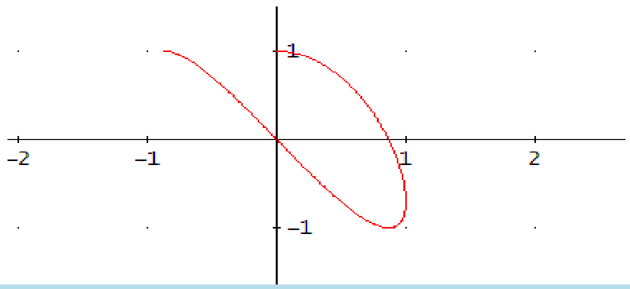
Punto crítico: Valor de t	Punto	Valor de la derivada	Tipo de punto crítico
$t=0$	$P_1(0,1)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1}=0$	De **tangencia horizontal**
$t=\frac{\pi}{4}$	$P_2\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_2}=\infty$	De **tangencia vertical**
$t=\frac{\pi}{3}$	$P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_3}=0$	De **tangencia horizontal**
$t=\frac{2\pi}{3}$	$P_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_4}=0$	De **tangencia horizontal**
$t=\frac{3\pi}{4}$	$P_5\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_5}=\infty$	De **tangencia vertical**
$t=\pi$	$P_6(0,-1)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_6}=0$	De **tangencia horizontal**

d) Ramas en $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

$0 \qquad \pi/4 \qquad \pi/3 \qquad 2\pi/3$

Intervalo para t	$P_{inicial} \rightarrow P_{final}$	Sg ($x'(t)$)	Sg ($y'(t)$)	$Sg\left(\frac{dy}{dx}\right)=sg\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$(0,1)\rightarrow\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	+ $\rightarrow$	— $\downarrow$	— **decreciente**
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$	— $\leftarrow$	— $\downarrow$	+ **creciente**
$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)\rightarrow\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$	— $\leftarrow$	+ $\uparrow$	— **decreciente**

Nota: $P_{inicial}$ señala donde comienza la rama y P_{final} donde termina. En esta ocasión son puntos pero en otros ejercicios pueden corresponder al inicio o al final de una rama asintótica.



40.- Dada la curva (sen(2*t*), tg(2*t*)), se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Estudio de *simetrías*.

c) Estudio de la *periodicidad* de la curva. Si fuera periódica, dar un intervalo [a,b] de *periodo* mínimo.

d) Razonar porqué la curva solo tiene *asíntotas* verticales y hallarlas.

Solución:

a) El campo de variación de *t* es Dom *x* ∩ Dom *y*= $\boxed{\mathbf{R}-\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}, k\in Z\right\}}$ porque:

Dom*x* = **R,** pues sin(2*t*) es una función continua en **R.**

Dom *y*= $\mathbf{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},\pm\frac{5\pi}{4},\pm\frac{7\pi}{4}\cdots\right\}=\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}, k\in Z\right\}$.

b) Estudio de simetrías:

x(-*t*)= sin (-2*t*) = -sin (2*t*)= -*x*(*t*).

y(-*t*)= tg (-2*t*) = -tg (2*t*) = -*y*(*t*).

Es decir,si $t\to(x,y)\Rightarrow -t\to(-x,-y)$, luego la curva es **simétrica respecto del origen O**.

c) sin(2*t*) es periódica de periodo $\frac{2\pi}{2}=\pi$, y tg (2*t*) es periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$, luego la curva [sin (2*t*), tg (2*t*)] es periódica de periodo m.c.m. $\left\{\pi,\frac{\pi}{2}\right\}=\pi$.

Los intervalos $\boxed{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, $\boxed{[0,\pi]}$ son de periodo mínimo.

d) Se observa que -1≤ *x*≤ 1, por lo que *x* no puede hacerse infinita, en consecuencia la curva no puede tener asíntotas horizontales ni oblicuas.

Sin embargo, -∞<*y*<∞ , por lo que puede tener asíntotas verticales para los valores de *t* en que *y* se hace infinita, esto ocurre, si consideramos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, para *t*= $\pm\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{4}}\left(sen(2t),tg(2t)\right)=\left(sen\left(2\frac{-\pi}{4}\right),tg\left(2\frac{-\pi}{4}\right)\right)=(-1,\pm\infty)$$ ⇒en $\boxed{x=-1}$ *y* se hace infinita

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\left(sen(2t),tg(2t)\right)=\left(sen\left(2\frac{\pi}{4}\right),tg\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)=(1,\pm\infty)$$ ⇒en $\boxed{x=1}$ *y* se hace infinita, por lo tanto

las rectas verticales **x= –1** y **x=1** son **asíntotas verticales** de la curva.

41.- Dada la curva $\left(\dfrac{2t^2-3}{t-1}, \dfrac{t}{(t-1)^2}\right)$**, se pide:**

a) ***Campo de variación*** **de** ***t.***

b) **Cálculo de** ***puntos crítico*****s.**

c) **Clasificación de los** ***puntos críticos*** **según sean de** ***tangente horizontal, vertical o singulares.***

d) **Estudio del** ***crecimiento*** **por** ***ramas.***

Solución:

a) El campo de variación de t es Dom $x \cap$ Dom y= $\mathbf{R}-\{1\}$ porque:

Dom$x$ = $\mathbf{R}-\{1\}$

pues 1 es el único valor que anula al denominador de la función racional $x(t)=\dfrac{2t^2-3}{t-1}$.

Dom y= $\mathbf{R}$-$\{1\}$ por la misma razón para $y(t)=\dfrac{t}{(t-1)^2}$

b) Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen.

$$\#16:\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{2\cdot t^2-3}{t-1}, \frac{t}{(t-1)^2}\right] = \left[\frac{2\cdot t^2-4\cdot t+3}{(t-1)^2}, \frac{t+1}{(1-t)^3}\right]$$

Resolvemos x'(t)=0, eso significa hallar las raíces del numerador

$\#17:\quad \text{SOLVE}(2\cdot t^2 - 4\cdot t + 3, t, \text{Real})$

#18: false

Luego, no existen puntos críticos debidos a esta condición.
Hallamos los valores para los que no existe x'(t), lo cual se cumple para los valores que anulan al denominador (no está definida la división por 0).

$\#19:\quad \text{SOLVE}((t - 1)^2, t, \text{Real})$

#20: t = 1

Resolvemos y'(t)=0, eso significa hallar las raíces del numerador

#21: SOLVE(t + 1, t, Real)

#22: t = -1

Hallamos los valores para los que no existe y'(t), lo cual se cumple para los valores que anulan al denominador (no está definida la división por 0)

$\#23:\quad \text{SOLVE}((1 - t)^3, t, \text{Real})$

#24: t = 1

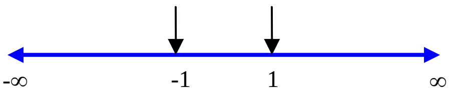
#25: t = 1

Luego hemos obtenido que existen puntos críticos en $t = -1, 1$

c)

Punto crítico: Valor de *t*	**Punto**	**Valor de la derivada**	**Tipo de punto crítico**
$t = -1$	$P_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1}=0$	De **tangencia horizontal**
$t = 1$	$(\pm\infty,\infty)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$ no definida	Puede haber asíntota oblicua

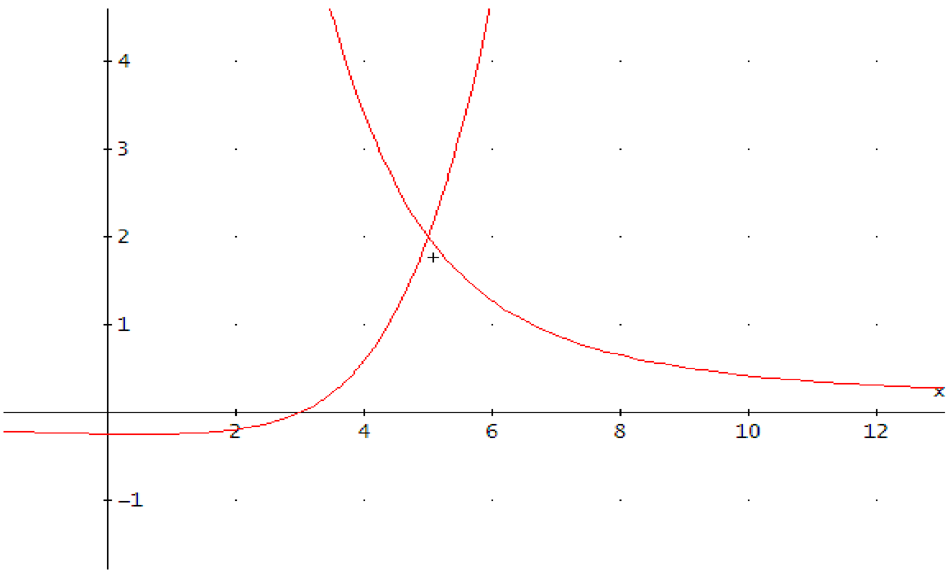
d) Estudio por ramas



Intervalo para *t*	$P_{inicial} \to P_{final}$	**Sg (*x'*(*t*))**	**Sg (*y'*(*t*))**	$Sg\left(\frac{dy}{dx}\right)=sg\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
$(-\infty,-1)$	$(-\infty,0)\to\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$	+ $\rightarrow$	— $\downarrow$	— **decreciente**
(-1,1)	$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\to(\infty,\infty)$	+ $\rightarrow$	+ $\uparrow$	+ **creciente**
$(1,\infty)$	$(-\infty,\infty)\to(\infty,0)$	+ $\rightarrow$	— $\downarrow$	— **decreciente**

Nota:

$P_{inicial}$ señala donde comienza la rama y P_{final} donde termina. En esta ocasión unas veces son puntos y otras corresponden al inicio o al final de una rama asintótica.



42.- Dada la curva $\left(\ln(t-1), \dfrac{1}{1-t}\right)$ se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Razonar porqué la curva no es *periódica*.

c) Estudio de *asíntotas*.

Solución:

a) El campo de variación de t= Dom $x \cap$ Dom y= **(1, ∞)** pues:
Dom x = (1, ∞) y Dom y =**R**−{1}

b) La curva **no es periódica** porque la función logaritmo y las funciones racionales no lo son. Solo son periódicas las funciones circulares o aquéllas cuya expresión algebraica solo contiene funciones circulares (funciones seno y coseno).

c) La curva solo presenta asíntotas en aquellos valores de t para los que $x\to\infty$ ó $y\to\infty$. En este caso basta estudiar qué ocurre en t = 1, +∞

$\lim\limits_{t\to 1}\left(\ln(t-1), \dfrac{1}{1-t}\right) = (-\infty, -\infty)$, en consecuencia la curva podría tener una asíntota oblicua y = mx + n , calculamos m= $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{\frac{1}{1-t}}{\ln(t-1)}\right) = \lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{\left(\frac{1}{1-t}\right)^2}{\frac{1}{(t-1)}}\right) = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{t-1} = \infty$, luego la curva no presenta una asíntota sino una rama parabólica.

$\lim\limits_{t\to \infty}\left(\ln(t-1), \dfrac{1}{1-t}\right) = (\infty, 0)$, luego la asíntota presenta una asíntota horizontal **y =0**.

43.- Dada la curva $(\cos(2t), \cos(3t))$, se pide:

a) ***Campo de variación*** **de *t*.**

b) Cálculo de *puntos críticos* en [0, π].

c) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangencia horizontal, vertical o singulares*.

d) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) El campo de variación de *t* es **R** por ser cos(2*t*) y cos (3*t*) funciones continuas.

b) Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen.

#8: $[\cos(2\cdot t), \cos(3\cdot t)]$

#9: $\frac{d}{dt}[\cos(2\cdot t), \cos(3\cdot t)]$

#10: $\left[-4\cdot \sin(t)\cdot \cos(t),\ 3\cdot \sin(t) - 12\cdot \sin(t)\cdot \cos(t)^2\right]$

Resolvemos x'(t)=0 y tomamos las soluciones en [0,π]

#11: SOLVE(− 4·SIN(t)·COS(t), t, Real)

#12: $t = \frac{\pi}{2} \vee t = \pi \vee t = 0$

x'(t) existe para cualquier valor de t

Resolvemos y'(t)=0 y tomamos las soluciones en [0,π]

#13: SOLVE$(3\cdot \sin(t) - 12\cdot \sin(t)\cdot \cos(t)^2$, t, Real)

#14: $t = \frac{2\cdot\pi}{3} \vee t = \frac{\pi}{3} \vee t = \pi \vee t = 0$

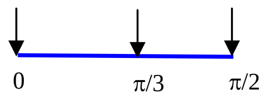
y'(t) existe para cualquier valor de t

Luego en [0, π] hay puntos críticos en $t=0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

c)

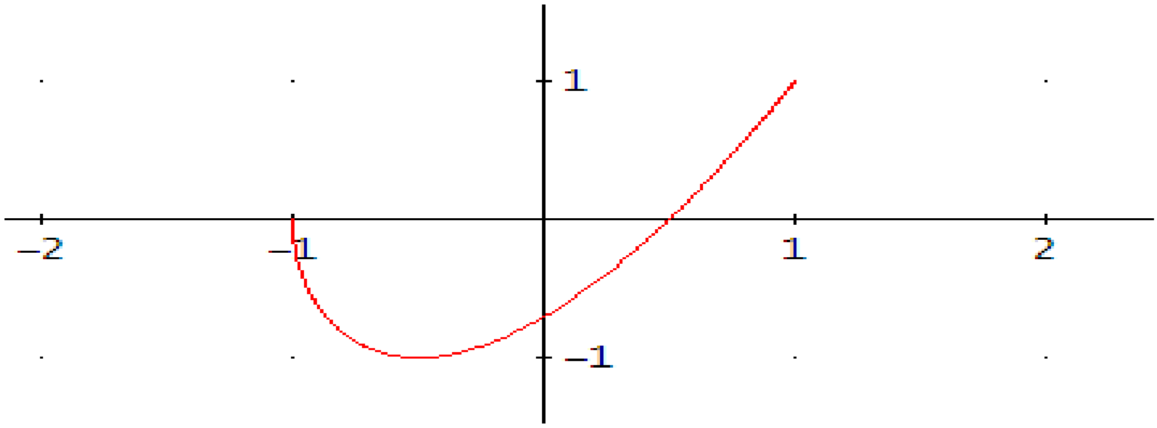
Punto crítico: Valor de *t*	**Punto**	**Valor de la derivada**	**Tipo de punto crítico**
$t=0$	$P_1(1,1)$	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{P_1}=\dfrac{0}{0}$	**Punto singular**
$t=\dfrac{\pi}{3}$	$P_2\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{P_2}=0$	De **tangencia horizontal**
$t=\dfrac{\pi}{2}$	$P_3\left(-1,0\right)$	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{P_3}=\infty$	De **tangencia vertical**
$t=\dfrac{2\pi}{3}$	$P_4\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{P4}=0$	De **tangencia horizontal**
$t=\pi$	$P_5(1,-1)$	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{P5}=\dfrac{0}{0}$	**Punto singular**

d) Ramas en $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$



Intervalo para *t*	$\mathbf{P_{inicial} \rightarrow P_{final}}$	**Sg (*x'*(*t*))**	**Sg (*y'*(*t*))**	$\mathbf{Sg\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=sg\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)}$
$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$	$(1,1)\rightarrow\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$	— ←	— ↓	+ **creciente**
$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)\rightarrow(-1,0)$	— ←	+ ↑	— **decreciente**

Nota: $P_{inicial}$ señala donde comienza la rama y P_{final} donde termina. En esta ocasión son puntos pero en otros ejercicios pueden corresponder al inicio o al final de una rama asíntótica.



44.- Dada la curva $\left(e^{t-1}, \text{sen}t\right)$ se pide:

a) *Campo de variación* de t

b) Explica porqué la curva no es *simétrica*.

c) Razona porqué todos los *puntos críticos* de esta curva son de *tangencia horizontal*.

Solución:

a) El campo de variación de *t*= Dom *x* $\cap$ Dom *y*= **R** pues:
Dom *x* = **R** y Dom *y* =**R** por ser funciones continuas en **R**.

b) La curva **no es simétrica** porque.
$x(-t) = e^{-t-1} \neq e^{t-1}, -e^{t-1}$, es decir, $x(-t) \neq x(t), \ -x(t)$

c) Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen
$x'(t) = e^{t-1} \neq 0$ para cualquier $t \in$ **R,** además $x'(t) = x(t)$ luego es continua
$y'(t) = \cos t$, luego $y'(t)=0 \Rightarrow t = \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}\cdots\right\} = \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in Z\right\}$,
por otro lado $y'(t)$ es continua y existe para cualquier $t \in$ **R.**
Luego sus puntos críticos se producen en $t = \boxed{\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in Z\right\}}$, y en ellos, como se indica en el párrafo anterior, $x'(t) = e^{t-1} \neq 0$ $y'(t)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$, luego, todos ellos son puntos de **tangencia horizontal**.

45.- Dada la curva $\left(\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right)$**, se pide:**

a) *Campo de variación* de *t*.

b) Estudio de *asíntotas*.

c) Cálculo de *puntos críticos*.

d) Clasificación de los *puntos críticos* según sean de *tangencia horizontal, vertical o singulares*.

e) Estudio del *crecimiento* por *ramas* en $[0,\infty)$

Solución:

a) El campo de variación de t es Dom $x \cap$ Dom y= R−{0, −1,1} porque:

Dom$x$ = **R**−{0}

pues t=0 es el único valor que anula al denominador de la función racional $x(t)= \dfrac{1+t^2}{t^2}$.

Dom y= **R**-{−1,1} por la misma razón para $y(t)= \dfrac{t}{1-t^2}$.

b) La curva solo presenta asíntotas en aquellos valores de t para los que $x\to\infty$ ó $y\to\infty$. En este caso basta estudiar qué ocurre en t = -1, 0, 1, ±∞.

#35: $\lim_{t\to-\infty}\left[\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right] = [1, 0]$, luego en $t\to-\infty$ no presenta asíntotas.

#36: $\lim_{t\to-1}\left[\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right] = [2, \pm\infty], \Rightarrow$ **x=2 es una asíntota vertical**.

#37: $\lim_{t\to0}\left[\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right] = [\infty, 0], \Rightarrow$ **y=0 es una asíntota horizontal.**

#38: $\lim_{t\to1}\left[\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right] = [2, \pm\infty], \Rightarrow$ **x=2 es una asíntota vertical**.

#39: $\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{1+t^2}{t^2}, \dfrac{t}{1-t^2}\right] = [1, 0]$, luego en $t\to\infty$ no presenta asíntotas.

c) Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen.

$$\#40:\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1+t^2}{t^2}, \frac{t}{1-t^2}\right] = \left[-\frac{2}{t^3}, \frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}\right]$$

Resolver x'(t)=0, significa hallar las raíces del numerador que en este caso es 2≠0, luego esta condición no proporciona puntos críticos.
Hallamos los valores para los que no existe x'(t), lo cual se cumple para los valores que anulan al denominador (no está definida la división por 0)

$$\#41:\quad \text{SOLVE}(t^3, t, \text{Real})$$
$$\#42:\quad t = 0$$

Resolver y'(t)=0, significa hallar las raíces del numerador pero en este caso no proporciona puntos críticos pues

$$\#43:\quad \text{SOLVE}(t^2 + 1, t, \text{Real})$$
$$\#44:\quad \text{false}$$

Hallamos los valores para los que no existe x'(t), lo cual se cumple para los valores que anulan al denominador (no está definida la división por 0)

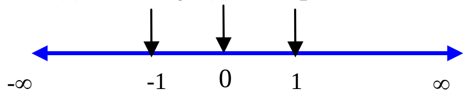
$$\#45:\quad \text{SOLVE}((t^2 - 1)^2, t, \text{Real})$$
$$\#46:\quad t = -1 \lor t = 1$$

Luego hemos obtenido que existen puntos críticos en ***t* = –1, 0, 1**.

d) Puntos de tangencia horizontal **no hay**, al ser $y'(t) \neq 0$ para todo t.

Puntos de tangencia vertical **no hay**, al ser $x'(t) \neq 0$ para todo t.

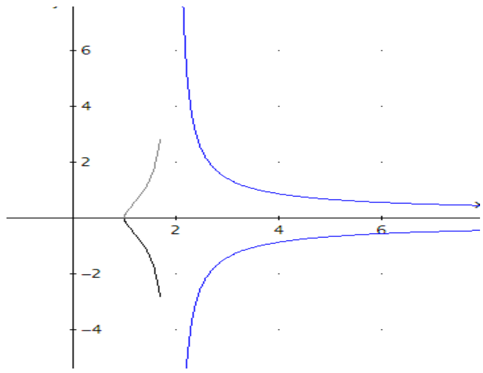
Puntos singulares **no hay**, al ser $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) \neq 0$ para todo t.



e) Estudio por ramas

Intervalo para *t*	$P_{inicial} \rightarrow P_{final}$	**Sg (*x'*(*t*))**	**Sg (*y'*(*t*))**	$\text{Sg}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{sg}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
(0,1)	$(\infty,0) \rightarrow (2,\infty)$	– ←	+ ↑	– **decreciente**
$(1,\infty)$	$(2,-\infty) \rightarrow (1,0)$	– ←	+ ↑	– **decreciente**

Nota: $P_{inicial}$ señala donde comienza la rama y P_{final} donde termina. En esta ocasión unas veces son puntos y otras corresponden al inicio o al final de una rama asintótica.



46.- Dada la curva dada por las *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1+t} \\ y(t) = \dfrac{1-t^2}{t} \end{cases}$, **se pide:**

a) Hallar el *campo de variación* del parámetro *t*.

b) Estudio de la existencia de *simetrías*.

c) Hallar las *asíntotas* de la curva.

d) Hallar los *puntos críticos*.

e) Calcular los *puntos de tangencia horizontal, vertical y singulares*.

f) Estudio del *crecimiento* por *ramas*.

Solución:

a) El campo de variación del parámetro *t* es R-{-1,0}

b) Estudio de simetrías:

$x(-t) = \dfrac{2(-t)^2}{1-t} = \dfrac{2t^2}{1-t} \neq x(t), -x(t), y(t)$, luego **no podemos apreciar ninguna simetría** respecto de OX, OY, Origen o bisectriz del primer cuadrante.

c) Cálculo de asíntotas: la curva solo puede tener asíntotas para los valores del parámetro *t* donde, o bien $x(t)$, o bien $y(t)$ no están definida o cuando $t \to \pm\infty$.

Por lo tanto, hemos de estudiar, usando límites, cómo se comporta la curva cuando $t \to 0, -1, \pm\infty$,.

Veamos que ocurre cuando $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{2 \cdot t^2}{1+t}, \frac{1-t^2}{t} \right] = [0, \pm\infty]$$

Luego, la curva presenta la asíntota vertical **x=0**

Ahora estudiamos cómo se comporta la curva cuando $t \to -1$:

$$\lim_{t\to -1} \left[\frac{2 \cdot t^2}{1+t}, \frac{1-t^2}{t} \right] = [\pm\infty, 0]$$

Luego, en *t*=-1, la curva presenta la asíntota horizontal $y=0$

Y hacemos lo mismo cuando $t \to \pm\infty$,

$$\lim_{t\to -\infty} \left[\frac{2 \cdot t^2}{1+t}, \frac{1-t^2}{t} \right] = [-\infty, \infty]$$

$$\lim_{t\to +\infty} \left[\frac{2 \cdot t^2}{1+t}, \frac{1-t^2}{t} \right] = [\infty, -\infty]$$

Luego cuando $t\to\pm\infty$, la curva puede presentar asíntotas oblicuas.

Aplicamos el procedimiento de cálculo de los coeficientes de las asíntotas, en primer lugar cuando $t\to\infty$

$$m = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1-t^2}{t}}{\frac{2t^2}{1+t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(1-t^2)(1+t)}{2t^3} = -\frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{t\to\infty}\left(y(t) - \left(-\frac{1}{2}\right)x(t)\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1-t^2}{t} + \frac{1}{2}\frac{2t^2}{1+t} = \lim_{t\to\infty} -\frac{t^2-t-1}{t^2+t} = -1.$$

Luego $\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 1}$ es una asíntota oblicua hacia $+\infty$ (observa que si $t\to\infty \Rightarrow x\to\infty$).

Aplicamos el mismo procedimiento para $t\to-\infty$

$$m = \lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1-t^2}{t}}{\frac{2t^2}{1+t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{(1-t^2)(1+t)}{2t^3} = -\frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{t\to-\infty}\left(y(t) - \left(-\frac{1}{2}\right)x(t)\right) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1-t^2}{t} + \frac{1}{2}\frac{2t^2}{1+t} = \lim_{t\to-\infty} -\frac{t^2-t-1}{t^2+t} = -1.$$

Luego $\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 1}$ es una asíntota oblicua también hacia $-\infty$ (si $t\to-\infty \Rightarrow x\to-\infty$).

d) Cálculo de puntos críticos: hallamos los valores de t para los que las derivadas se anulan o no existen.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{2\cdot t^2}{1+t}, \frac{1-t^2}{t}\right] = \left[\frac{2\cdot t\cdot (t+2)}{(t+1)^2}, -\frac{t^2+1}{t^2}\right]$$

```
SOLVE(2·t·(t + 2), t, Real)
 x'(t) se anula para t = -2 ∨ t = 0
           2
 SOLVE((t + 1) , t, Real)
 x'(t) no existe para t = -1
       2
 SOLVE(t  + 1, t, Real)
 False, es decir, y'(t) no se anula en ningún caso
       2
 SOLVE(t , t, Real)
 y'(t) no existe para t = 0
```

Luego, los puntos críticos de la curva (donde puede cambiar el sentido del crecimiento) son :

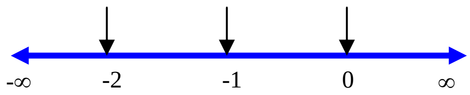
$\boxed{t = -2, -1, 0}$

e) **Puntos de tangencia horizontal** son aquellos donde $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=0\Rightarrow\begin{cases}x'(t)\neq 0\\ y'(t)=0\end{cases}\Rightarrow$ **no hay** pues $y'(t)\neq 0$ para todo t.

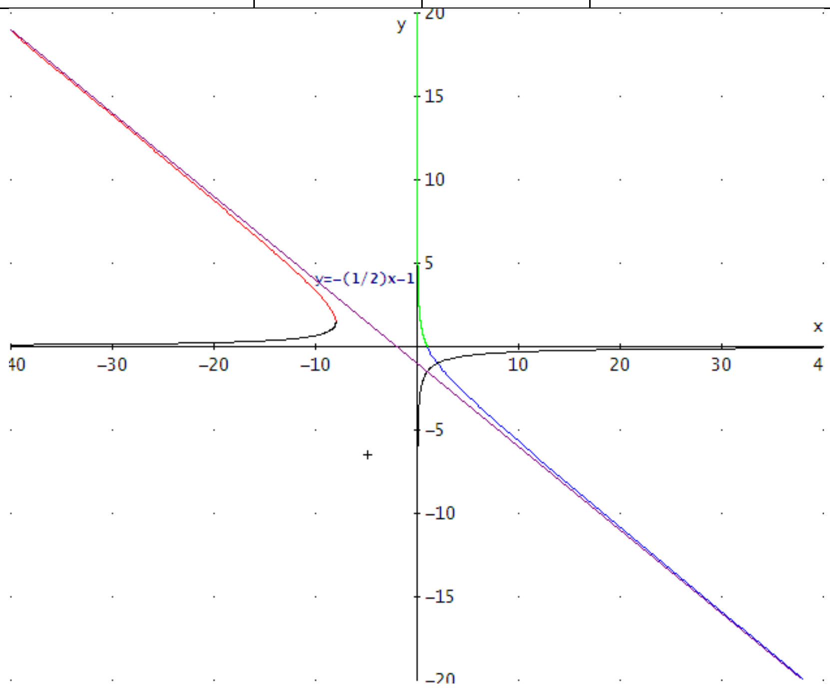
Puntos de tangencia vertical son aquellos donde $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}\to\infty\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=0\\ y'(t)\neq 0\end{cases}\Rightarrow$ sólo hay uno el correspondiente a t=-2, sustituyendo en las ecuaciones de la curva, se obtiene: $\boxed{P\left(-8,\frac{3}{2}\right)}$

Puntos singulares son aquellos donde $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{0}{0}\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=0\\ y'(t)=0\end{cases}\Rightarrow$ **no hay** pues $y'(t)\neq 0$ para todo t.

f) Crecimiento por ramas:



Intervalo para t	**$P_{inicial} \to P_{final}$**	**Sg ($x'(t)$)**	**Sg ($y'(t)$)**	$sg\left(\frac{dy}{dx}\right)=sg\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
$(-\infty,-2)$	$(-\infty,\infty)\to\left(-8,\frac{3}{2}\right)$	+ $\to$	— $\downarrow$	— **decreciente**
(-2,-1)	$\left(-8,\frac{3}{2}\right)\to$ (-∞,0)	— $\leftarrow$	— $\downarrow$	+ **creciente**
(-1,0)	(-∞,0) → (0,- ∞)	+ $\to$	— $\downarrow$	+ **creciente**
$(0,\infty)$	(0, ∞)→(∞,−∞)	+ $\to$	— $\downarrow$	— **decreciente**



47.- Dada la curva expresada por sus *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t(1-t)} \\ y(t) = \dfrac{1}{t(1+t)} \end{cases}$.

a) Estudio de la existencia de *simetrías*.

b) Calcular las ecuaciones de sus *asíntotas*.

c) Los puntos de la curva de *tangencia horizontal* y *vertical*.

d) Estudio del *crecimiento* en las *ramas*: $(-\infty,\ -1)$ y $(1,\ \infty)$.

Solución:

a) $x(-t) = -y(t)$, $y(-t) = -x(t)$, por tanto la curva es **simétrica respecto de la bisectriz y = -x.**

b) La curva solo puede tener asíntotas para los valores del parámetro t donde, o bien x(t), o bien y(t) no están definidas o cuando $t \to \pm\infty$.

Las ecuaciones x(t) o y(t) no están definidas para los valores: t = -1, t = 0 y t=1

Para t = -1, $\lim\limits_{t\to-1}(x(t),\ y(t)) = \lim\limits_{t\to-1}\left(\dfrac{1}{t(1-t)},\ \dfrac{1}{t(1+t)}\right) = \left(-\dfrac{1}{2},\ \pm\infty\right)$, por tanto $x = -\dfrac{1}{2}$ es una **asíntota vertical**.

Para t = 1, $\lim\limits_{t\to1}(x(t),\ y(t)) = \lim\limits_{t\to1}\left(\dfrac{1}{t(1-t)},\ \dfrac{1}{t(1+t)}\right) = \left(\mp\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)$, por tanto $y = \dfrac{1}{2}$ es una **asíntota horizontal**.

Para t = 0, $\lim\limits_{t\to0}(x(t),\ y(t)) = \lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t(1-t)},\ \dfrac{1}{t(1+t)}\right) = (\mp\infty,\ \mp\infty)$ y es posible una asíntota oblicua.

Si t=0, $m = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-t}{1+t} = 1$,

$$n = \lim_{t\to0}(y - mx) = \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t(1+t)} - \frac{1}{t(1-t)}\right) = \lim_{t\to0}\frac{-2}{1-t^2} = -2$$, por tanto existe una **asíntota oblicua** de ecuación **y = x – 2**.

c) Puntos de tangencia vertical y horizontal.

Veamos las derivadas de x(t) y de y(t).

$$x'(t) = \frac{2t-1}{t^2(t-1)^2}, \qquad y'(t) = -\frac{2t+1}{t^2(t+1)^2}$$

Existe un punto de tangencia vertical, si existe un valor t, tal que, $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$.

$x'(t) = 0$ si $t = \dfrac{1}{2}$, y para $t = \dfrac{1}{2}$ se obtiene el punto de tangencia vertical

$$\left(x\left(\frac{1}{2}\right),\ y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(4,\ \frac{4}{3}\right).$$

Existe un punto de tangencia horizontal, si existe un valor t, tal que, $y(t)=0$ y $x'(t)\neq 0$.

$y'(t)=0$ si $t=-\frac{1}{2}$, y para $t=-\frac{1}{2}$ se obtiene el punto de tangencia horizontal

$$\boxed{\left(x\left(-\frac{1}{2}\right),\ y\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(-\frac{4}{3},\ -4\right)}$$

d)

Intervalo para t	$P_{inicial} \longrightarrow P_{final.}$	**Signo de** $(x'(t))$	**Signo de** $(y'(t))$	**Signo de** $\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
$(-\infty,-1)$	**(0, 0)** $\longrightarrow \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$	- $\leftarrow$	+ $\uparrow$	- **decreciente**
$(1,\infty)$	$\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right) \longrightarrow$ **(0, 0)**	+ $\rightarrow$	- $\downarrow$	- **decreciente**

48.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = e^{\text{sen}t} \\ y(t) = \cos t \end{cases}$ **Se pide:**

a) *Campo de variación* de t.
b) *Periodicidad* de la curva.
c) *Simetrías* de la curva:
Al cambiar t por -t
Al cambiar t por -t + π.
d) *Asíntotas*.
e) *Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal* y *vertical, puntos singulares*.
f) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas* en [0, π].

#1: $\left[e^{\text{SIN}(t)}, \text{COS}(t)\right]$

Solución

a) Campo de variación de t: **R**

b) Periodicidad: T = mcm (2π,2π) = **2π**

Basta estudiar la curva para t en $[-\pi, \pi]$

c) Simetrías de la curva:

Al cambiar t por -t

Al cambiar t por -t + π

#2: $\left[e^{\text{SIN}(-t)}, \text{COS}(-t)\right]$

#3: $\left[e^{-\text{SIN}(t)}, \text{COS}(t)\right]$

No hay simetrías al cambiar t por -t

#4: $\left[e^{\text{SIN}(-t + \pi)}, \text{COS}(-t + \pi)\right]$

#5: $\left[e^{\text{SIN}(t)}, -\text{COS}(t)\right]$

Al cambiar t por -t + π se obtiene la misma x y la y cambia de signo, luego, la curva es **simétrica respecto al eje OX**.

d) Asíntotas:

$-1 \le \cos t \le 1$, luego no tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

#6: $e^{-1} \le e^{\text{SIN}(t)} \le e^{1}$

Luego, tampoco tiene asíntotas horizontales.

e) Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, puntos singulares:

#7: $\left[e^{\text{SIN}(t)}, \text{COS}(t)\right]$

#8: $\frac{d}{dt}\left[e^{\text{SIN}(t)}, \text{COS}(t)\right]$

#9: $\left[e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t), -\text{SIN}(t)\right]$

#10: $\text{SOLVE}\left(\left[e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t), -\text{SIN}(t)\right], t, \text{Real}\right)$

#11: $[\,]$

Luego, **no hay puntos singulares**.

#12: $e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t) = 0$

#13: $\text{SOLVE}(e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t) = 0,\ t,\ \text{Real})$

#14: $t = \dfrac{3\cdot\pi}{2} \vee t = -\dfrac{\pi}{2} \vee t = \dfrac{\pi}{2}$

#15: $-\ \text{SIN}(t) = 0$

#16: $\text{SOLVE}(-\ \text{SIN}(t) = 0,\ t,\ \text{Real})$

#17: $t = -\pi \vee t = \pi \vee t = 0$

Puntos críticos en [$-\pi$, π]:

#18: $t = -\pi \vee t = -\dfrac{\pi}{2} \vee t = 0 \vee t = \dfrac{\pi}{2}\cdot t = \pi$

Puntos de tangencia horizontal: $y'(t) = 0$

#19: $\left[e^{\text{SIN}(-\pi)},\ \text{COS}(-\pi)\right]$

#20: $[1,\ -1]$

#21: $\left[e^{\text{SIN}(\pi)},\ \text{COS}(\pi)\right]$

#22: $[1,\ -1]$

#23: $\left[e^{\text{SIN}(0)},\ \text{COS}(0)\right]$

#24: $[1,\ 1]$

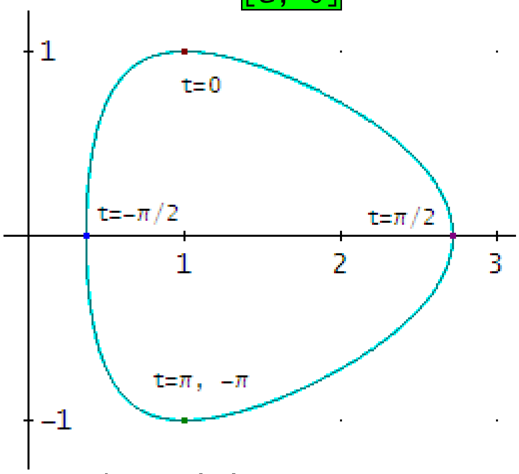
Puntos de tangencia vertical: $x'(t) = 0$

#25: $\left[e^{\text{SIN}(-\ \pi/2)},\ \text{COS}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

#26: $\left[e^{-1},\ 0\right]$

#27: $\left[e^{\text{SIN}(\pi/2)},\ \text{COS}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

#28: $[e,\ 0]$



f) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas en $[0,\ \pi]$:

t	$P_{inicial} \rightarrow P_{final}$	Sg(x'(t))	Sg(y'(t))	Sg(y'(x))	y(x)
$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$(1,1) \rightarrow (e,0)$	+	−	$\dfrac{-}{+} = -$	$1 \downarrow 0$
$\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$	$(e,0) \rightarrow (1,-1)$	−	−	$\dfrac{-}{-} = +$	$-1 \uparrow 0$

49.- Dada la curva de *ecuaciones paramétricas* $\begin{cases} x(t) = e^{\text{sen}t} \\ y(t) = e^{\cos t} \end{cases}$ **Se pide:**

a) *Campo de variación* de t.
b) *Periodicidad* de la curva.
c) *Simetrías* de la curva:
Al cambiar t por -t
Al cambiar t por -t + π/2.
d) *Asíntotas*.
e) Para $-\pi \le t \le \pi$, *Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal* y *vertical, puntos singulares*.
f) Estudio del *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas* en [0, π].

Solución

#1: $\left[e^{\text{SIN}(t)}, e^{\text{COS}(t)}\right]$

a) Campo de variación de t: **R**

b) Periodicidad: T = mcm (2π,2π) = **2π**
Basta estudiar la curva para t en [−π, π]

c) Simetrías de la curva:
Al cambiar t por −t
Al cambiar t por −t + π/2

#2: $\left[e^{\text{SIN}(-t)}, e^{\text{COS}(-t)}\right]$

#3: $\left[e^{-\text{SIN}(t)}, e^{\text{COS}(t)}\right]$

No hay simetrías al cambiar t por −t

#4: $\left[e^{\text{SIN}(-t+\pi/2)}, e^{\text{COS}(-t+\pi/2)}\right]$

#5: $\left[e^{\text{COS}(t)}, e^{\text{SIN}(t)}\right]$

Luego, x(−t + π/2) = y(t) y y(−t + π/2) = x(t), luego, la curva es **simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante y = x.**

d) Asíntotas:

#6: $e^{-1} \le e^{\text{SIN}(t)}, e^{\text{COS}(t)} \le e^{1}$

Luego, **no tiene asíntotas**.

e) Puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, puntos singulares:

#5: $\frac{d}{dt}\left[e^{\text{SIN}(t)}, e^{\text{COS}(t)}\right]$

#6: $\left[e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t), -e^{\text{COS}(t)}\cdot\text{SIN}(t)\right]$

#7: $e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t) = 0$

#8: $\text{SOLVE}(e^{\text{SIN}(t)}\cdot\text{COS}(t) = 0, t, \text{Real})$

#9: $t = \frac{3\cdot\pi}{2} \lor t = -\frac{\pi}{2} \lor t = \frac{\pi}{2}$

#10: $-e^{\mathrm{COS}(t)}\cdot \mathrm{SIN}(t) = 0$

#11: $\mathrm{SOLVE}(-e^{\mathrm{COS}(t)}\cdot \mathrm{SIN}(t) = 0,\ t,\ \mathrm{Real})$

#12: $t = -\pi \lor t = \pi \lor t = 0$

Puntos críticos en $[-\pi, \pi]$:

#18: $t = -\pi \lor t = -\frac{\pi}{2} \lor t = 0 \lor t = \frac{\pi}{2} \lor t = \pi$

Puntos de tangencia horizontal: y'(t) = 0

#13: $\left[e^{\mathrm{SIN}(-\pi)},\ e^{\mathrm{COS}(-\pi)}\right]$

#14: $\left[1,\ e^{-1}\right]$

#16: $\left[e^{\mathrm{SIN}(0)},\ e^{\mathrm{COS}(0)}\right]$

#17: $[1,\ e]$

#18: $\left[e^{\mathrm{SIN}(\pi)},\ e^{\mathrm{COS}(\pi)}\right]$

#19: $\left[1,\ e^{-1}\right]$

Puntos de tangencia vertical: x'(t) = 0

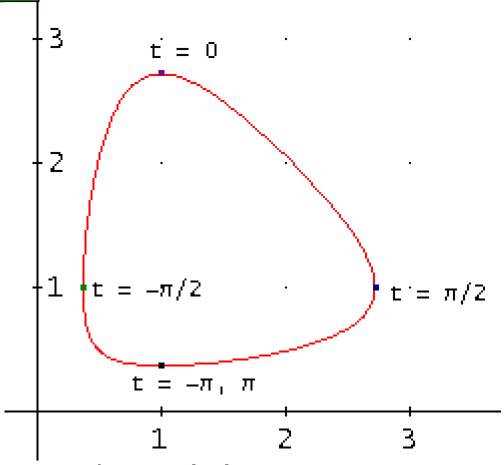
#20: $\left[e^{\mathrm{SIN}(\pi/2)},\ e^{\mathrm{COS}(\pi/2)}\right]$

#21: $[e,\ 1]$

#22: $\left[e^{\mathrm{SIN}(-\pi/2)},\ e^{\mathrm{COS}(-\pi/2)}\right]$

#23: $\left[e^{-1},\ 1\right]$

No tiene puntos singulares, pues no se anulan simultáneamente x'(t) e y'(t).



f) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas en $[0, \pi]$:

t	$P_{inicial} \to P_{final}$	Sg(x'(t))	Sg(y'(t))	Sg(y'(x))	y(x)
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(1,e) \to (e,1)$	+	–	$\frac{+}{-} = -$	$e \downarrow 1$
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$(e,1) \to (1,1/e)$	–	–	$\frac{-}{-} = +$	$1/e \uparrow 1$

50.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos)

d) Estudiar su *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas.

Solución

a) El campo de variación de t es **R-{-1,1}**

b) Estudio de asíntotas

Solo pueden existir asíntotas en t=-1,1, ±∞ y la herramienta matemática que utilizamos para comprobar su existencia es el límite en dichos valores.

$\lim_{t\to -1}\left[\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t+1}\right]=\left[\frac{1}{2},\pm\infty\right]$, luego la recta **x=1/2** es una asíntota vertical de la curva.

$\lim_{t\to 1}\left[\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t+1}\right]=\left[\pm\infty,\frac{1}{2}\right]$, luego la recta **y=1/2** es una asíntota horizontal de la curva.

$\lim_{t\to \pm\infty}\left[\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t+1}\right]=[1,\pm\infty]$, luego la recta **y=1** es una asíntota horizontal de la curva.

c) Puntos críticos. Son los puntos donde las derivadas se anulan o no existen.

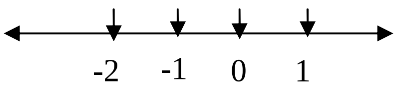
$$[x'(t),y'(t)]=\left[-\frac{1}{(t-1)^2},\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right]$$, luego:

x'(t)≠0 para cualquier t y no existe en t=1

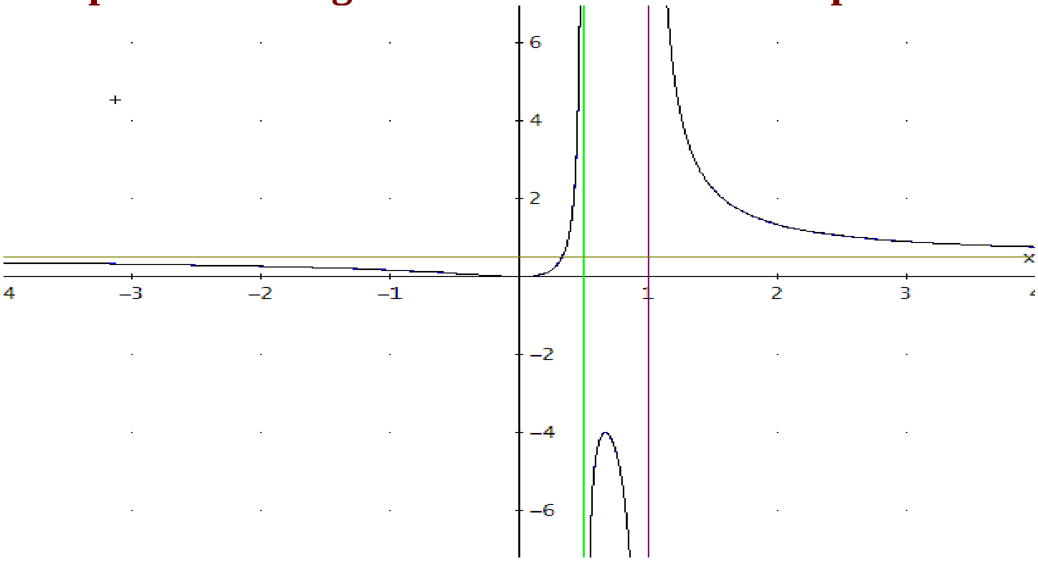
y'(t)=0 en t=0,-2 y no existe en t=-1.

Luego los puntos críticos de la curva se presentan en **t=-2,-1,0,1**.

d) Las ramas determinadas por los puntos críticos son:



Intervalo de t	I→F	Sg(x'(t)	Sg(y'(t))	Sg$\left(\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$
(-∞,-2)	(1,-∞)→ (2/3, -4)	– ←	+ ↑	– ↘
(-2,-1)	(2/3, -4) → (1/2,-∞)	– ←	– ↓	+ ↗
(-1,0)	(1/2, ∞)→ (0, 0)	– ←	– ↓	+ ↗
(0,1)	(0, 0) → (-∞, 1/2)	– ←	+ ↑	– ↘
(1,∞)	(∞, 1/2) → (1, ∞)	– ←	+ ↑	– ↘


6
4
2
-2
-4
-6
4
-3
-2
-1
1
2
3
x

51.- Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^2}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{1-t^2}{t} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos).

d) Estudiar el *crecimiento* y *decrecimiento* por ramas para $t \geq 0$.

Solución

#1: $\left[\dfrac{2\cdot t^2}{1-t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right]$

a) Campo de variación de t: R−{0,1}

b) Asíntotas:

Verticales:

#2: $\lim_{t\to 0}\left[\dfrac{2\cdot t^2}{1-t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right]$

#3: $[0, \pm\infty]$

Asíntota vertical x=0 (para t tendiendo a 0)

Horizontales:

#4: $\lim_{t\to 1}\left[\dfrac{2\cdot t^2}{1-t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right]$

#5: $[\pm\infty, 0]$

Asíntota horizontal y=0 (para t tendiendo a 1)

Oblicuas:

#6: $\lim_{t\to \infty}\left[\dfrac{2\cdot t^2}{1-t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right]$

#7: $[-\infty, -\infty]$

#8: $\lim_{t\to -\infty}\left[\dfrac{2\cdot t^2}{1-t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right]$

#9: $[\infty, \infty]$

#10: $$\frac{\frac{1-t^2}{t}}{\frac{2\cdot t^2}{1-t}}$$

#11: $$\frac{(t-1)\cdot(t^2-1)}{2\cdot t^3}$$

#12: $$\lim_{t\to\infty}\frac{(t-1)\cdot(t^2-1)}{2\cdot t^3}$$

#13: $$\frac{1}{2}$$

#14: $$\frac{1-t^2}{t}-0.5\cdot\frac{2\cdot t^2}{1-t}$$

#15: $$\frac{t^2+t-1}{t\cdot(t-1)}$$

#16: $$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+t-1}{t\cdot(t-1)}$$

#17: $$1$$

Asíntota oblicua: **y = 1/2x+1**, para t tendiendo a $\pm\infty$

c) Puntos críticos.

#22: $$\frac{d}{dt}\left[\frac{2\cdot t^2}{1-t},\ \frac{1-t^2}{t}\right]$$

#23: $$\left[\frac{2\cdot t\cdot(2-t)}{(t-1)^2},\ -\frac{t^2+1}{t^2}\right]$$

#24: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{2\cdot t\cdot(2-t)}{(t-1)^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$$

#25: $$t=2\ \vee\ t=0$$

#26: $\mathrm{SOLVE}\left(-\dfrac{t^2+1}{t^2},\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#27: false

#28: $\mathrm{SOLVE}((t-1)^2,\ t,\ \mathrm{Real})$

#29: $t = 1$

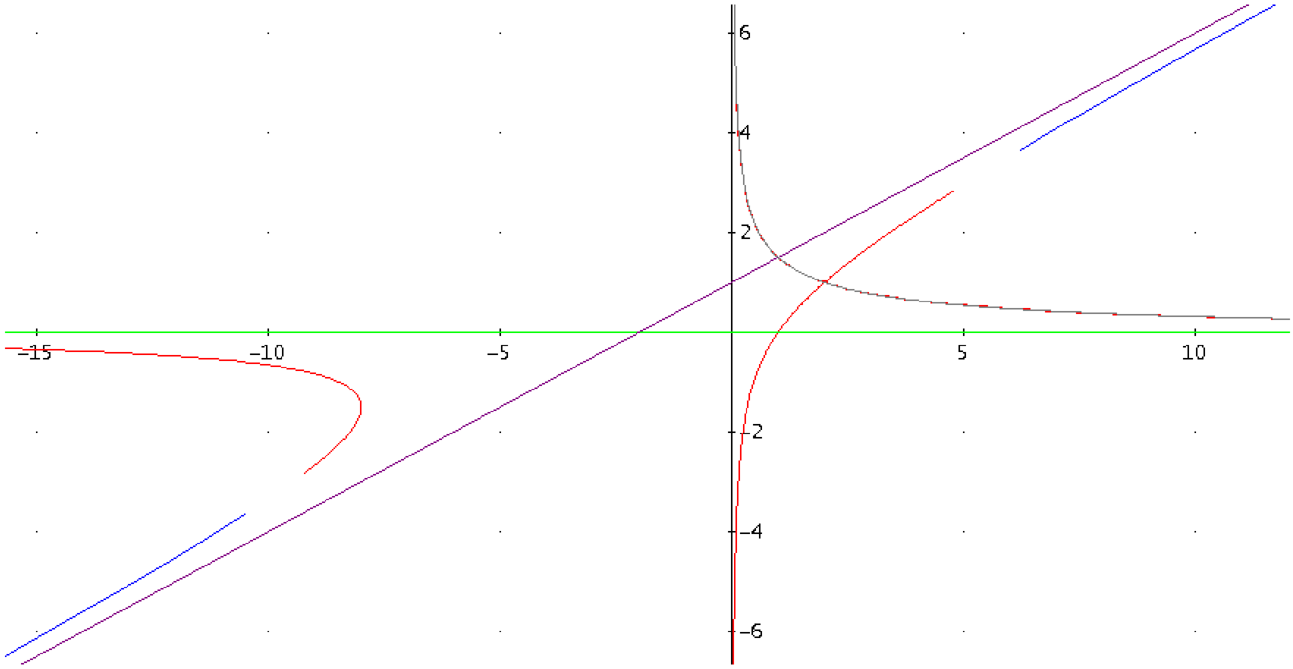
#30: $\mathrm{SOLVE}(t^2,\ t,\ \mathrm{Real})$

#31: $t = 0$

Puntos críticos: 0, 1, 2

c) Estudio del crecimiento por ramas para $t \geq 0$.

t	$P_{inicial} \to P_{final}$	x(t)	y(x)	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
(0, 1)	$(0,\ \infty) \to (\infty, 0)$	$0 \uparrow \infty$	$\infty \downarrow 0$	+	−	$\frac{-}{+} = -$	$0 \downarrow -\infty$ Decte.
(1,2)	$(-\infty, 0) \to (-8, -3/2)$	$-\infty \uparrow -8$	$0 \downarrow -3/2$	+	−	$\frac{-}{+} = -$	$\infty \downarrow 1$ Decrte.
(2, ∞)	$(-8, -3/2) \to (-\infty, -\infty)$	$-8 \downarrow -\infty$	$-3/2 \downarrow -\infty$	−	−	$\frac{-}{-} = +$	$-\infty \uparrow -3/2$ Crte.



52.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{t+4} \\ y(t) = \dfrac{t-3}{t+1} \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Calcular los *puntos críticos* (no es necesario clasificarlos).

d) Estudiar su *crecimiento* y *decrecimiento* por *ramas*.

Solución

#8: $\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

a) Campo de variación de t: R−{−4, −1}

b) Asíntotas:

#9: $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

#10: $[\infty, 1]$

#11: $\lim\limits_{t\to-\infty}\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

#12: $[-\infty, 1]$

Luego, y=1 es asíntota horizontal cuando t tiende a ±∞.

#13: $\lim\limits_{t\to-4}\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

#14: $\left[\pm\infty, \dfrac{7}{3}\right]$

Luego, y=7/3 es asíntota horizontal cuando t tiende a −4.

#15: $\lim\limits_{t\to-1}\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

#16: $\left[\dfrac{1}{3}, \pm\infty\right]$

Luego, x=1/3 es asíntota vertical cuando t tiende a −1.

No hay asíntotas oblicuas pues x e y no tienden simultáneamente a infinito.

c) Puntos críticos:

#17: $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t^2}{t+4}, \dfrac{t-3}{t+1}\right]$

#18: $\left[\dfrac{t\cdot(t+8)}{(t+4)^2}, \dfrac{4}{(t+1)^2}\right]$

#19: $\dfrac{t\cdot(t + 8)}{(t + 4)^2} = 0$

#20: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{t\cdot(t + 8)}{(t + 4)^2} = 0,\ t,\ \text{Real}\right)$

#21: $t = -8 \vee t = 0$

#22: $(t + 4)^2 = 0$

#23: $\text{SOLVE}((t + 4)^2 = 0,\ t,\ \text{Real})$

#24: $t = -4$

$\dfrac{4}{(t + 1)^2}$ no se anula para ningún valor de t.

#25: $(t + 1)^2 = 0$

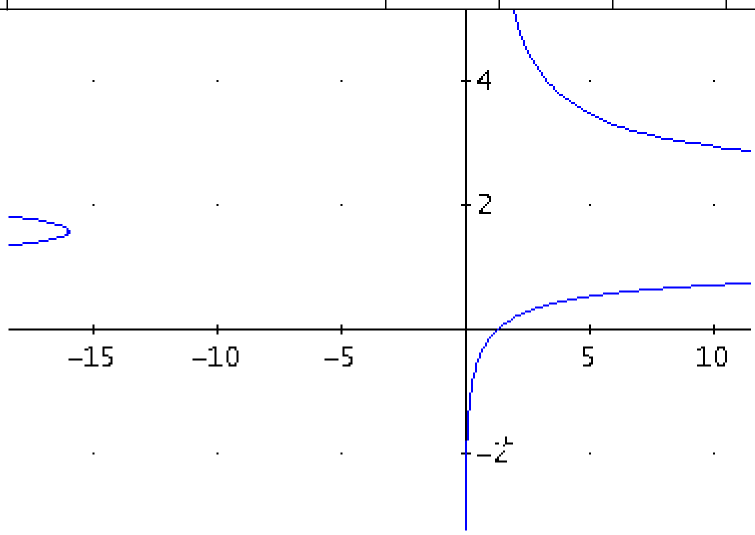
#26: $\text{SOLVE}((t + 1)^2 = 0,\ t,\ \text{Real})$

#27: $t = -1$

Por tanto, puntos críticos**:-8, -4, -1, 0**.

d) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas.

t	$P_{inicial} \rightarrow P_{final}$	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
$(-\infty,-8)$	$(-\infty,1) \rightarrow (-16,11/7)$	+	+	$\frac{+}{+} = +$	$1\uparrow 11/7$ Crte.
$(-8,-4)$	$(-16,11/7) \rightarrow (-\infty,7/3)$	−	+	$\frac{+}{-} = -$	$7/3\downarrow 11/7$ Dcrte.
$(-4,-1)$	$(\infty,7/3) \rightarrow (1/3,\infty)$	−	+	$\frac{+}{-} = -$	$\infty\downarrow 7/3$ Dcrte.
$(-1,\ 0)$	$(1/3,\ -\infty) \rightarrow (0,-3)$	−	+	$\frac{-}{+} = -$	$-3\downarrow -\infty$ Dcrte.
$(0,\ \infty)$	$(0,-3) \rightarrow (\infty,1)$	+	+	$\frac{+}{+} = +$	$-3\uparrow 1$ Crte.



53.-Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \cos\ t \\ y(t) = \operatorname{sen}(3t) \end{cases}$

a) Calcular su *período*, si lo tiene.

b) Comprobar si tiene *simetrías*.

c) Hallar sus *puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, y puntos singulares* para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución

#28: [COS(t), SIN(3·t)]

a) Período: m.c.m.(2π, 2π/3) = **2π**

b) Simetrías:

#29: [COS(-t), SIN(3·(-t))]

#30: [COS(t), - SIN(3·t)]

Curva **simétrica respecto a OX**.

c) Puntos críticos para t variando en [0, π/2]

#31: $\frac{d}{dt}$ [COS(t), SIN(3·t)]

#32: [- SIN(t), 3·COS(3·t)]

#33: - SIN(t) = 0

#34: SOLVE(- SIN(t) = 0, t, Real)

#35: t = -π ∨ t = π ∨ t = 0

#36: 3·COS(3·t) = 0

#37: SOLVE(3·COS(3·t) = 0, t, Real)

#38: $t = -\frac{\pi}{6} \vee t = \frac{\pi}{6} \vee t = \frac{\pi}{2}$

Puntos críticos en [0, π/2]: **0, π/6, π/2**.

Puntos de tangencia horizontal: y'=0, x'≠0

t = π/6, π/2

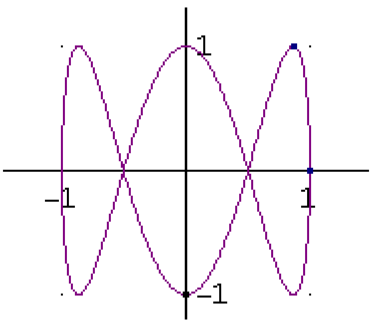
#39: $\left[\operatorname{COS}\left(\frac{\pi}{6}\right), \operatorname{SIN}\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]$

#40: $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

#41: $\left[\operatorname{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{SIN}\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$

#42:

[0, -1]



Puntos de tangencia vertical: x'=0, y'≠0

t = 0

#43: [COS(0), SIN(3·0)]

#44: **[1, 0]**

No hay puntos singulares, pues x' e y' no se anulan simultáneamente.

54.- Dada la curva: $\begin{cases} x(t) = \text{sen}(3t) \\ y(t) = \text{tg}(t) \end{cases}$

a) Calcular su *período*, si lo tiene.

b) Comprobar si tiene *simetrías*.

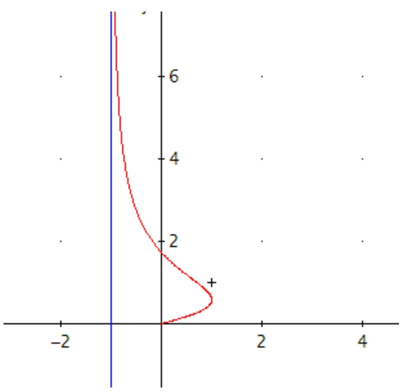
c) Escribir la definición de *punto crítico, punto de tangencia horizontal, vertical y singular* y hallar en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ los *puntos críticos, puntos de tangencia horizontal y vertical, y puntos singulares* de la curva dada.

Solución:

a) El período de x(t) es $2\pi/3 = 120^{\circ}$ y el periodo de y(t) es $\pi=180^{\circ}$, luego el periodo de la curva [x(t),y(t)] es el m.c.m.{120º,180º}=360º=2π.

b) [x(-t),y(-t)]=[sen(-3t),tg(-t)]=[-sen(3t),-tg(t)]=[-x(t),-y(t)], luego **es simétrica respecto del origen**

c)



Los puntos críticos son aquellos donde las derivadas se anulan o no existen. Calculamos

[x'(t),y'(t)]= [3cos(3t), 1/cos2(t)]. En $[0, \pi/2]$

x'(t)= 3cos(3t)=0$\Rightarrow$ $3t=\pi/2, 3\pi/2,\ldots \Rightarrow$ $t=\pi/6, 3\pi/6=\pi/2$.

x'(t) existe para cualquier t

y'(t)= $1/\cos^2(t)\neq 0$ para cualquier t

y'(t) no existe para $t= \pi/2$

Punto de tangencia horizontal es aquél donde se verifica que:

$$\begin{cases} y'(t) = 0 \\ x'(t) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

Por lo tanto, la curva **no tiene puntos de tangencia horizontal**.

Punto de tangencia vertical es aquél donde se verifica que:

$$\begin{cases} y'(t) \neq 0 \\ x'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \to \infty$$

Luego sólo hay un **punto de tangencia vertical en $t=\pi/6$** $\to [1,\sqrt{3}/3]$

Punto singular es aquél donde se verifica que:

$$\begin{cases} y'(t) = 0 \\ x'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{0}{0}$$

La curva **no tiene puntos singulares**.

55.- Dada la curva: $\left(\dfrac{2t^2}{1-t},\dfrac{1-t^2}{t}\right)$

a) Hallar el *campo de variación* de t.

b) Hacer el estudio de *asíntotas*.

c) Estudiar el *crecimiento y decrecimiento* por *ramas* para t≥0.

Solución:

a) El campo de variación de la curva es el conjunto de números reales donde están definidas x e y, es decir, C=Domx∩Domy=**R**-{0,1}.

b) Las asíntotas son rectas a las que se aproxima la curva cuando, o bien x, o bien y, o ambas, se hacen infinitas. Por lo tanto, para hallarlas hemos de obtener los valores donde x e y se pueden hacer ∞. En este caso, t=0,1,+ ∞,-∞.

Hallamos el límite de [x(t), y(t)] en cada uno de estos valores

$\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{2t^2}{1-t},\dfrac{1-t^2}{t}\right]=[0,\infty]$, luego la curva presenta en t=0 la asíntota vertical x=0.

$\lim\limits_{t\to 1}\left[\dfrac{2t^2}{1-t},\dfrac{1-t^2}{t}\right]=[\infty,0]$, luego la curva presenta en t=1 la asíntota horizontal y=0.

$\lim\limits_{t\to \pm\infty}\left[\dfrac{2t^2}{1-t},\dfrac{1-t^2}{t}\right]=[\pm\infty,\pm\infty]$, luego la curva puede presentar en t→±∞ una asíntota oblicua y=mx+n. Calculamos m y n para t→+∞ y t→-∞

$$m=\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{\dfrac{1-t^2}{t}}{\dfrac{2t^2}{1-t}}\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{t^3-t^2-t+1}{2t^3}\right]=\dfrac{1}{2} \text{ y } m=\lim_{t\to-\infty}\left[\dfrac{\dfrac{1-t^2}{t}}{\dfrac{2t^2}{1-t}}\right]=\lim_{t\to-\infty}\left[\dfrac{t^3-t^2-t+1}{2t^3}\right]=\dfrac{1}{2}$$

$$n=\lim_{t\to\infty}\left[y(t)-mx(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{\left(1-t^2\right)}{t}-\dfrac{1}{2}\dfrac{2t^2}{\left(1-t\right)}\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\dfrac{t^2+t-1}{t^2-t}\right]=1 \text{ y}$$

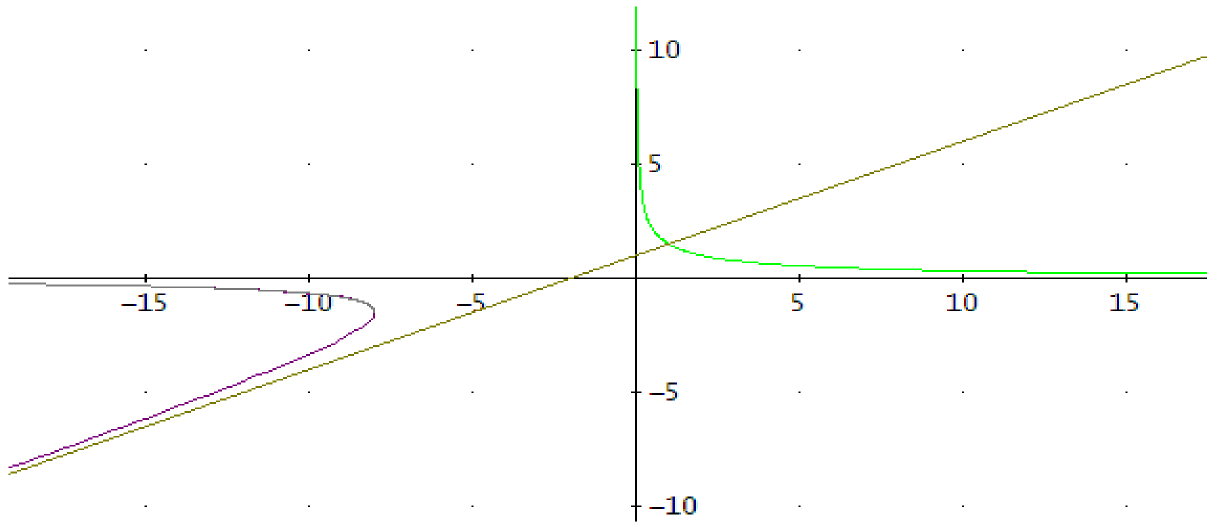
$$n=\lim_{t\to-\infty}\left[\dfrac{\left(1-t^2\right)}{t}-\dfrac{1}{2}\dfrac{2t^2}{\left(1-t\right)}\right]=\lim_{t\to-\infty}\left[\dfrac{t^2+t-1}{t^2-t}\right]=1$$

luego la curva presenta la asíntota oblicua **y=1/2x+1** en t→±∞.

c) Para estudiar el crecimiento por ramas en t≥0, hemos de obtener previamente los puntos críticos en t≥0,

$$[x'(t), y'(t)] = \left[\frac{2t(2-t)}{(t-1)^2}, -\frac{t^2+1}{t^2}\right] \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=0 \Rightarrow t=0,2 \\ x'(t) \text{ no existe en t=1} \\ y'(t) \neq 0 \ \forall t \\ y'(t) \text{ no existe en t=0} \end{cases} \text{, luego son t=0,1,2}$$

t	$P_{inicial} \to P_{final}$	x(t)	y(x)	x'(t)	y'(t)	y'(x)	y(x)
(0,1)	(0, ∞) → (∞,0)	$0 \uparrow \infty$	$\infty \downarrow 0$	+	−	$\frac{-}{+} = -$	$0 \downarrow -\infty$ Decte.
(1,2)	(−∞,0) → (−8,−3/2)	$-\infty \uparrow -8$	$0 \downarrow -3/2$	+	−	$\frac{-}{+} = -$	$\infty \downarrow 1$ Decrte.
(2,∞)	(−8,−3/2) → (−∞,−∞)	$-8 \downarrow -\infty$	$-3/2 \downarrow -\infty$	−	−	$\frac{-}{-} = +$	$-\infty \uparrow -3/2$ Crte.



56.- Dadas las *ecuaciones paramétricas* de una curva: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases}$ Se pide:

a) *Simetrías*.
b) *Asíntotas*.
c) *Puntos críticos*.
d) *Puntos de tangencia vertical y horizontal*.
e) *Crecimiento y decrecimiento* por *ramas*.

Solución:

Dominio R

a) Simetrías

$\begin{cases} x\ (-t) = -x(t) \\ y\ (-t) = y(t) \end{cases}$ **simétrica respecto el eje OY**.

b) Asíntotas

En los puntos que no son del dominio de t:

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} = -\infty$;

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2-1}{1+t^2} = 1$

Por tanto **y=1 es una asíntota horizontal**

c) Puntos críticos

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{t^2+4t-1}{\left(1+t^2\right)^2} = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)} \\ y'(t) = \dfrac{4t}{\left(1+t^2\right)^2} = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}, 0, \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}.$$

d) Puntos de tangencia horizontal y vertical

Puntos de tangencia vertical: son aquellos donde x'(t)=0 e y'(t)≠0

Para t=$-\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)} \Rightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ **punto de tangencia vertical**

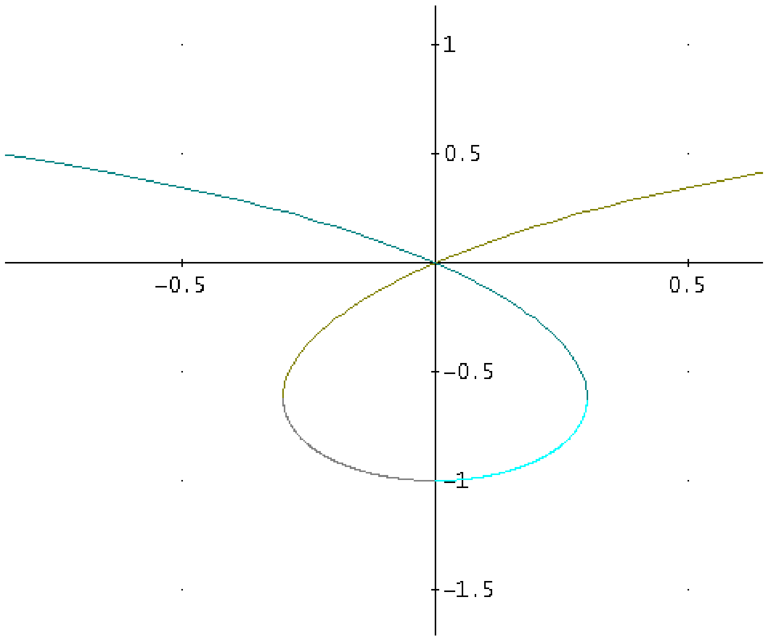
Para t=$\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)} \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ **punto de tangencia vertical**

Puntos de tangencia horizontal: son aquellos donde x'(t) ≠0 e y'(t)= 0

Para t=$0 \Rightarrow (0,-1)$ **punto de tangencia horizontal**

e) Estudio del crecimiento y decrecimiento por ramas

t	$t<-\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}$	$-\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}<t<0$	$0<t<\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}$	$\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)}<t$
x(t)	$x>-\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}$	$-\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}<x<0$	$0<x<\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}$	$\frac{\sqrt{10\sqrt{5}-22}}{2}>x$
y(t)	$1>y>\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}>y>-1$	$-1<y<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<y<1$
x'(t)	-	+	+	-
y'(t)	-	-	+	+
y'(x)=y’(t)/x’(t)	**Crece**	**Decrece**	**Crece**	**Decrece**



57.- Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva: $\begin{cases} x(t) = sen(2t) \\ y(t) = tg(3t) \end{cases}$

a) Hallar el *campo de variación* de t.
b) Calcular su *período*, si lo tiene.
c) Comprobar si tiene *simetrías*.
d) Estudiar la existencia de *asíntotas*.

Solución:

a) El campo de variación de *t* es Dom *x* ∩ Dom *y*= $\boxed{\mathbf{R}-\left\{\frac{(2k+1)\pi}{6}, k\in Z\right\}}$ porque:

Dom*x* = **R,** pues sin(2*t*) es una función continua en **R.**

Dom *y*= $\mathbf{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{3\pi}{6},\pm\frac{5\pi}{6},\pm\frac{7\pi}{6}\cdots\right\} = R-\left\{\frac{(2k+1)\pi}{6}, k\in Z\right\}$.

b) sin(2*t*) es periódica de periodo $\frac{2\pi}{2}=\pi$, y tg (3*t*) es periódica de periodo $\frac{\pi}{3}$, luego la curva [sin (2*t*), tg (3*t*)] es periódica de periodo m.c.m. $\left\{\pi,\frac{\pi}{3}\right\}=\pi$.

c) Estudio de simetrías:

x(-*t*)= sin (-2*t*) = -sin (2*t*)= -*x*(*t*).
y(-*t*)= tg (-3*t*) = -tg (3*t*) = -*y*(*t*).

Es decir,si *t*→(*x*,*y*) ⇒ -*t*→(-*x*,-*y*), luego la curva es **simétrica respecto del origen O**.

d) Se observa que -1≤ *x*≤ 1, por lo que *x* no puede hacerse infinita, en consecuencia la curva no puede tener asíntotas horizontales ni oblicuas.

Sin embargo, -∞ < *y* < ∞ , por lo que puede tener asíntotas verticales para los valores de *t* en que *y* se hace infinita, esto ocurre, si consideramos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, para *t*= $\pm\frac{\pi}{6}$, y $\pm\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{6}}(\text{sen}(2t),\text{tg}(3t)) = \left(\text{sen}\left(2\frac{\pm\pi}{6}\right),\text{tg}\left(3\frac{\pm\pi}{6}\right)\right) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\infty).$$

$$\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}}(\text{sen}(2t),\text{tg}(3t)) = \left(\text{sen}\left(2\frac{\pm\pi}{2}\right),\text{tg}\left(3\frac{\pm\pi}{2}\right)\right) = (0,\pm\infty)$$

Por lo tanto las rectas verticales $\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$ y $\boxed{x=0}$ son **asíntotas verticales** de la curva.

58.- Las curvas paramétricas se utilizan abundantemente en el campo de computación gráfica. En concreto las curvas de Bézier (ingeniero de la casa Renault) se usan para programas de gráficos estándar como Corel Draw y fuentes de escritura como TrueType. Para n=3, las curvas de Bézier se definen de la siguiente manera:

Dados cuatro"puntos de control" P_0 (a_0,b_0), P_1 (a_1,b_1), P_2 (a_2,b_2), P_3 (a_3,b_3), se define la curva de Bézier (x(t), y(t)) para $0 \le t \le 1$, mediante las expresiones

$$\begin{cases} x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3 \\ y(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3 \end{cases}$$

Se pide:

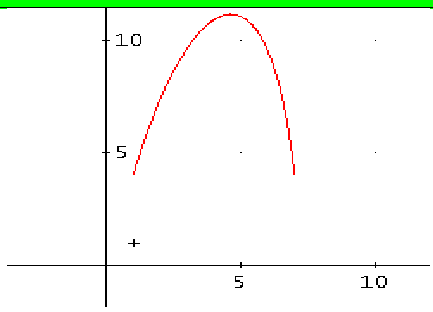
a) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la curva de Bézier cuyos puntos de control son P_0 (1,4), P_1 (3,12), P_2 (6,15), P_3 (7,4).

b) Probar que su pendiente en t=0 es igual a la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la curva de Bézier cuyos puntos de control son P_0 (1,4), P_1 (3,12), P_2 (6,15), P_3 (7,4) son:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 1(1-t)^3 + 3\cdot 3t(1-t)^2 + 3\cdot 6t^2(1-t) + 7t^3 \\ y(t) = 4(1-t)^3 + 3\cdot 12t(1-t)^2 + 3\cdot 15t^2(1-t) + 4t^3 \end{cases}}.$$



b) Probar que su pendiente en t=0 es igual a la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$

La pendiente de la curva en t=0 es su derivada

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)_{t=0} = \left(\frac{-27t^2 - 30t + 24}{-9t^2 - 6t + 6}\right)_{t=0} = 4$$

Por otro lado la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$ es m= $\boxed{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{12-4}{3-1} = \frac{8}{2} = 4}$

59.- Dada la curva $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t)=2\text{sen }(2t) \end{cases}$, se pide:

a) Campo de variación de *t*.

b) Periodicidad.

c) Puntos críticos y estudio de puntos de tangencia horizontal, vertical y singulares en [0, π].

Solución:

a) Campo de variación de *t* = **R**, por ser Dom(cos*t*)=R y Dom(sin(2*t*))=**R.**

b) Periodicidad = 2π, pues $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \text{ tiene periodo } 2\pi \\ y(t)=2\text{sen }(2t) \text{ tiene periodo } \dfrac{2\pi}{2}=\pi \end{cases} \Rightarrow \text{m.c.m } \{2\pi,\pi\}=\boxed{2\pi}$

.

c) Puntos críticos **en [0, π].** Son aquellos valores de *t* donde *x*'(*t*) o *y*'(*t*) se anulan o no existen:

$$x'(t) = -3\text{sen}t \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow \text{sen}t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi \\ x'(t) \text{ existe } \forall \text{t} \end{cases}$$

$$y'(t) = 4\cos(2t) \Rightarrow \begin{cases} y'(t) = 0 \Rightarrow \cos(2t) = 0 \Rightarrow 2t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4} \\ y'(t) \text{ existe } \forall \text{t} \end{cases}$$

Luego los puntos críticos son $t = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi$

En $\boxed{t=0}$, $\begin{cases} y'(t) \neq 0 \\ x'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} \to \infty$, ⇒ es un **punto de tangencia vertical** ($P_1(3,0)$)

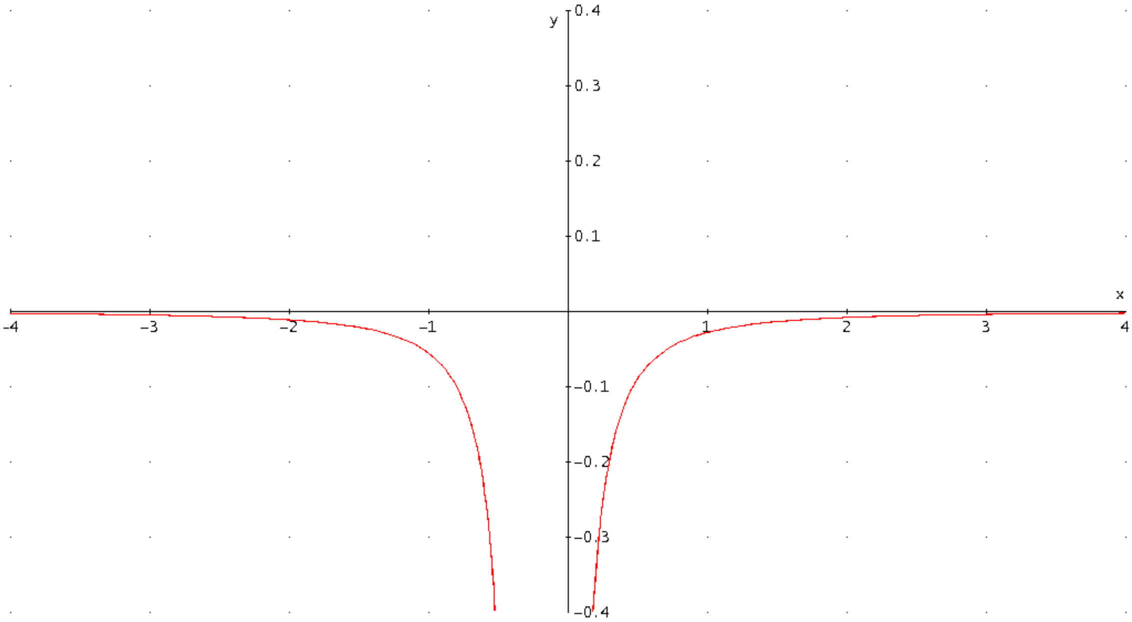
En $\boxed{t=\dfrac{\pi}{4}}$, $\begin{cases} y'(t) = 0 \\ x'(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$, ⇒ es un **punto de tangencia horizontal** $\left(P_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right)\right)$

En $\boxed{t=\dfrac{3\pi}{4}}$, $\begin{cases} y'(t) = 0 \\ x'(t) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$, ⇒ es un **punto de tangencia horizontal** $\left(P_3\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -2\right)\right)$

En $\boxed{t=\pi}$, $\begin{cases} y'(t) \neq 0 \\ x'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} \to \infty$, ⇒ es un **punto de tangencia vertical** ($P_4(-3,0)$)

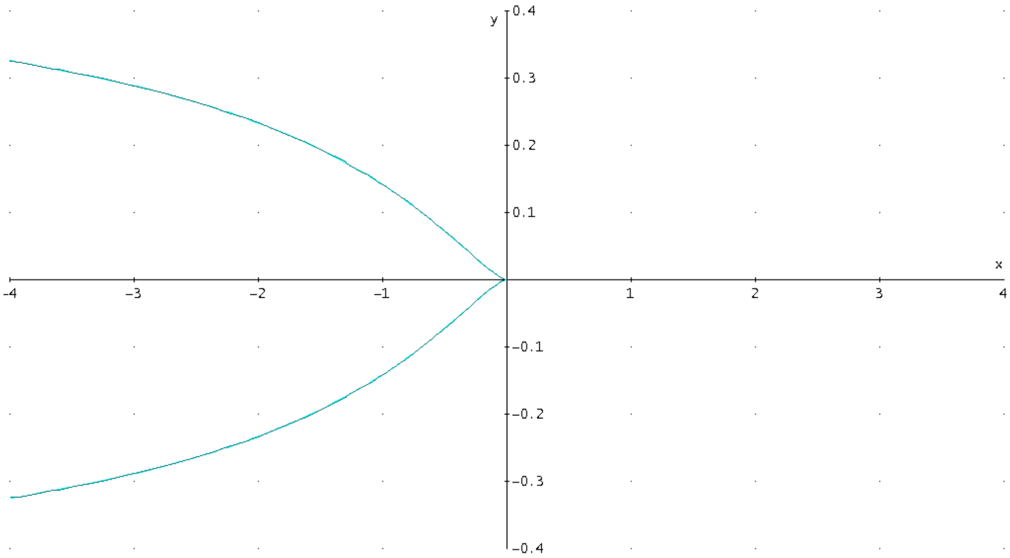
1. Estudiar y representar la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t(t-3)} \\ y = \dfrac{t^2}{t-3} \end{cases}$$

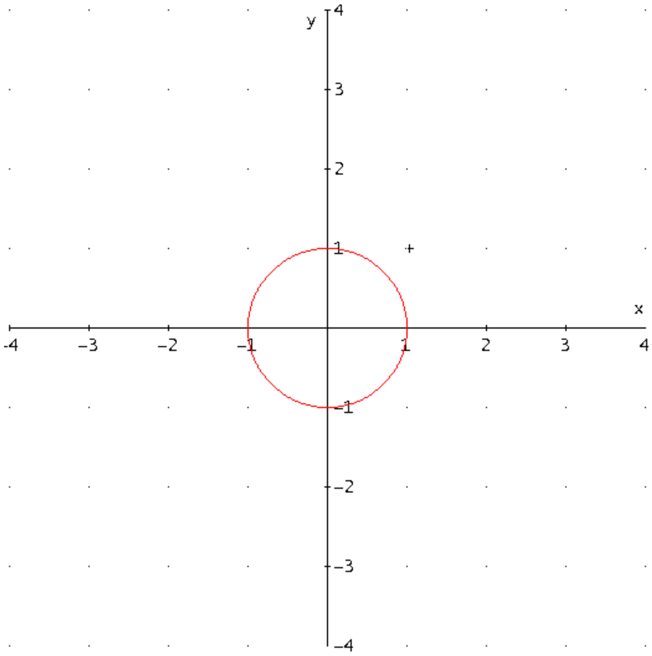


2. Estudiar y representar la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^3}{t^2-3} \end{cases}$$

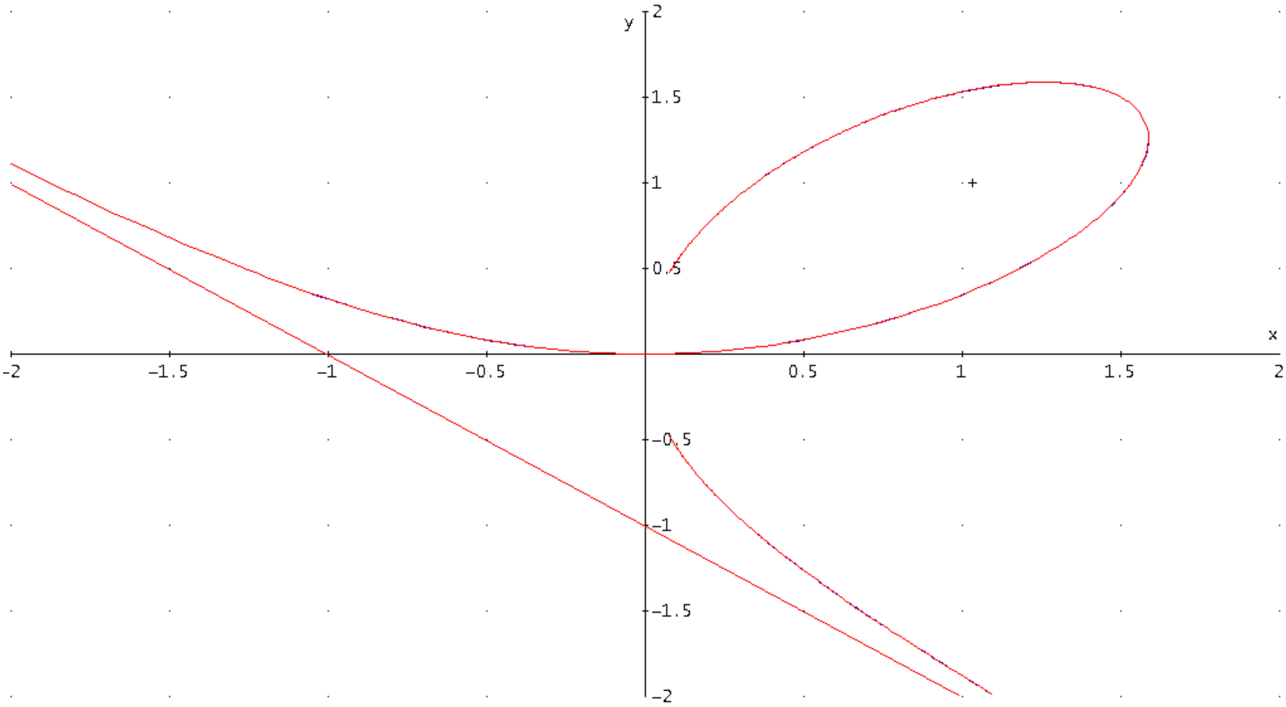


3. Estudiar y representar la curva $\begin{cases} x = sen(t) \\ y = cos(t) \end{cases}$



4. Estudiar y representar la curva (folium de Descartes)

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$ siendo a una constante $a \in \Re$



Simetrías en una curva plana

Estudio de algunos tipos de simetria:

a) Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del origen**.

b) Si $\begin{cases} x(-t)=x(t) \\ y(-t)=-y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OX**.

c) Si $\begin{cases} x(-t)=-x(t) \\ y(-t)=y(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto del eje OY**.

d) Si $\begin{cases} x(-t)=y(t) \\ y(-t)=x(t) \end{cases}$, entonces la curva es **simétrica respecto de la bisectriz del primer cuadrante**.

Asíntotas en una curva plana

En este párrafo, t_0 puede ser un número real ó $\pm\infty$.

a) Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = a$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, entonces: la recta **x = a** es **asíntota vertical**.

b) Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = b$, entonces: la recta **y = b** es **asíntota horizontal**.

c) Si $\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$

c_1) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$, la curva carece de asintota y se dice que tiene una **rama parabólica**.

c_2) Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$

c_{21}) $\lim_{t\to t_0} (y(t) - m\cdot x(t)) = \pm\infty$, entonces no hay asintota; tiene una **rama parabólica**.

c_{22}) $\lim_{t\to t_0} (y(t) - m\cdot x(t)) = b$, entonces la recta **y = mx + b** es **asíntota oblicua**.

Punto crítico

En general son los valores que anulan la derivada o derivadas o simplemente no existen.

- Curva en forma paramétrica: valores del parámetro t que anulan al menos una de las derivadas x'(t) o y'(t), o bien alguna de ellas no está definida en t.
- En una función real de dos variables reales: puntos donde las derivadas parciales valen cero o no existen. Dichos puntos se llaman **puntos críticos o estacionarios de f.**

Puntos de tangencia horizontal

Si para $t = t_0$ es $y'(t_0) = 0$ y $x'(t_0) \neq 0$, la recta **tangente** será **horizontal** en el punto $(x(t_0), y(t_0))$.

Puntos de tangencia vertical

Si para $t = t_0$ es $x'(t_0) = 0$ y $y'(t_0) \neq 0$, la **tangente** en el punto correspondiente a t_0 será **vertical** (pues anulará el denominador de $y'(x)$).

Crecimiento

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica: $x < x + h \Rightarrow f(x) < f(x + h)$

Si $f'(a) > 0$, la función f es creciente en a

Decrecimiento

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando para dos puntos cualesquiera situados en él "x" y "x+h" se verifica:

$x < x + h \Rightarrow f(x) > f(x + h)$.

Si $f'(a)<0$, la función f es decreciente en a

Puntos singulares

Un **punto singular** es aquel en el cual $\vec{F}'(t) = \vec{0}$, es decir: $x'(t)=y'(t)=0$.
Cualquier punto singular es pues un punto critico. El reciproco no es cierto.

Intersección de la curva con los ejes de coordenadas

Estos puntos se obtienen haciendo $x = 0$ e $y = 0$, para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas y de abscisas respectivamente.

Dominio de definición o campo de existencia.

Conjunto de valores para los cuales se pueden efectuar los cálculos que indica la expresión analitica de la función.

$$D = \{ x \in R \text{ tales que, existe } y = f(x) \}$$

Periodicidad en una curva plana

Si x(t) e y(t) son funciones periódicas de periodos p_1 y p_2 respectivamente, la función vectorial $\vec{F}(t) = (x(t), y(t))$ es también periódica de periodo p = mínimo común múltiplo de p_1 y p_2, y sólo hará falta hacer variar t en un intervalo de amplitud p (es decir, $t \in [a, a+p]$).

La gráfica será en este caso cerrada, siempre que x(t) e y(t) y sean funciones continuas.

La elección de a dependerá de consideraciones de simetria aplicables a la curva.

Ramas de la curva

Supongamos que $D = [a, b]$ y que $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ son los puntos criticos.
Estudiaremos la curva en cada intervalo (t_{i-1}, t_i) de forma que $y = (y \circ x^{-1})(x)$
Denotamos esta función por $y = f_i(x)$, y a su gráfica γ_i la denominaremos **rama i-ésima de la curva.**

Máximos locales.

- La función f tiene en el punto x=a un **máximo local o relativo** si existe un entorno (a-h, a+h) de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica:

$$f(x) < f(a) \text{ resulta } f(x-h) < f(a) > f(x+h).$$

Si f '(a)=0 y f ''(a)< 0, entonces (a, f(a)) es un máximo local

También pueden existir **extremos (**máximos y mínimos**)** donde no es derivable la función.

- Se dice que f tiene un **máximo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ $\forall(x,y)$ perteneciente a un entorno de (x_0, y_0).

- **Máximo Absoluto** es el mayor de los máximos locales o relativos.

Mínimos locales

- La función y=f(x) tiene en el punto x=a un **mínimo relativo** si existe un entorno (a-h, a+h) de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica: $f(x) > f(a)$ resulta $f(x-h) > f(a) < f(x+h)$.

  Si f '(a)=0 y f ''(a)> 0, entonces (a, f(a)) es un mínimo local
- Se dice que z=f(x,y) tiene un **mínimo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ $\forall$(x,y) perteneciente a un entorno de (x_0, y_0).

  También pueden existir **extremos (**máximos y mínimos**)** donde no es derivable la función.

Mínimo Absoluto es el menor de los mínimos locales o relativos.

Función derivada

Función que hace corresponder a cada punto la derivada de la función dada en él.
Si la función dada es f(x) su **función derivada f '(x)** será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ecuaciones paramétricas

Ecuaciones en las que intervienen parámetros.
Ecuaciones paramétricas de una curva plana son ecuaciones de la forma x=x(t), y=(t) donde el parámetro t recorre los valores del campo de existencia.

Puntos de inflexión.

Punto de una curva plana en el que la curvatura cambia de sentido de cóncava a convexa o viceversa. La tangente en un punto de inflexión atraviesa la curva.

Si $f''(a)=0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión**

Continua

- Una función y=f(x) es **continua** en x = a si se verifica: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Una función z=f(x,y) es continua en un punto (x_0,y_0) si se verifica:
$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$