

MATEMÁTICAS

INFANTIL Y PRIMARIA

Jaime Martínez Montero, José Miguel de la Rosa Sánchez,
Concepción Sánchez Cortés, Conchi Bonilla Arenas



LO MEJOR DEL MÉTODO ABN

ANAYA

¡BIENVENIDAS Y BIENVENIDOS AL III CONGRESO NACIONAL ABN!

ANAYA os desea un congreso muy provechoso. Tenemos la satisfacción de patrocinarlo desde su primera edición, y es este un compromiso más derivado del ambicioso proyecto de desarrollo del método ABN en el que trabajamos desde hace tres años.

Hemos pensado en esta publicación para que descubráis la enorme riqueza del proyecto ABN, así como el esfuerzo que hemos realizado para poder plasmar en papel y en herramientas digitales algo tan vital y manipulativo como es el método ABN. No ha sido sencillo, pero creemos que se ha hecho un gran trabajo para llevar a todos los interesados una herramienta potentísima para su puesta en marcha en el aula. Para que os hagáis una idea de la magnitud del proyecto, este abarca en estos momentos:

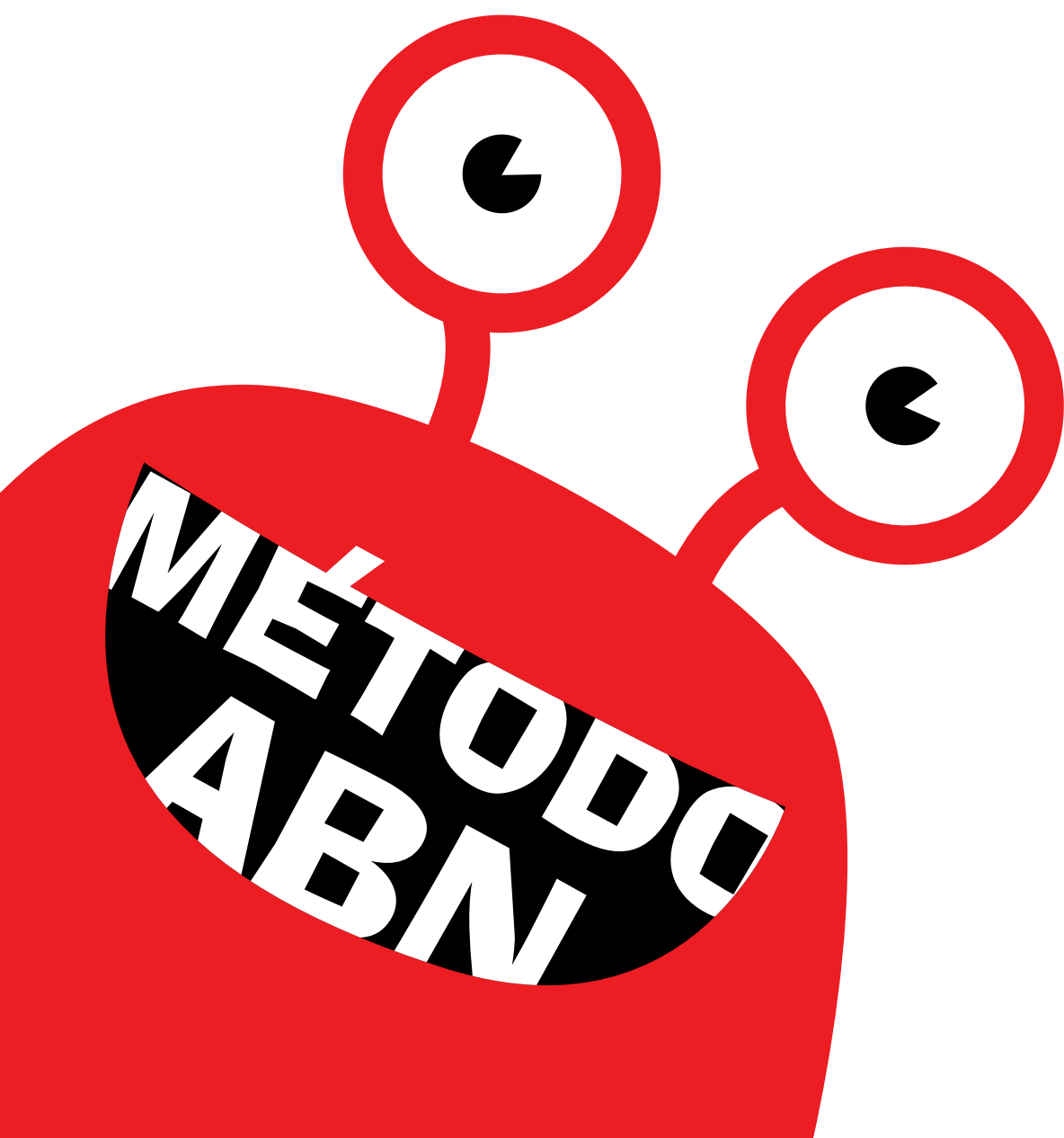
- Libros de texto para los cursos de 1.º a 6.º de Primaria y cuadernos de Infantil para los tres niveles de esta etapa.
- Propuestas didácticas muy minuciosas, en las que se expone con todo detalle el procedimiento a seguir. Pensad que entre las guías de Infantil y Primaria se entregan más de dos mil páginas con todas las explicaciones necesarias para alcanzar una óptima aplicación.
- Colecciones de cuadernos de trabajo: de refuerzo, de tránsito desde el cálculo tradicional al ABN, de resolución de problemas.
- Un numeroso grupo de herramientas digitales para una mejor ejercitación en los contenidos que ha de adquirir el alumnado.
- Y también los elementos para una atención detallada a los aspectos más administrativos, incluyendo, por supuesto, las programaciones y las evaluaciones.

El verdadero y más importante agente de aprendizaje del alumnado es el maestro, el profesor. Conscientes de esa importancia, la apuesta de Anaya es ofrecer el más completo y actualizado conjunto de herramientas y técnicas para ayudar al maestro en su difícil tarea. Si esto es importante en cualquier ámbito de la enseñanza, esa importancia se incrementa cuando se trata de un contenido nuevo, que no tiene precedentes y que mucha de la información sobre él está en páginas especializadas y no siempre de fácil acceso.

Hay muchas formas de aplicar el método ABN. Pero si deseáis conocer cómo se ha concebido por el autor, cómo lo han desarrollado él mismo y un estrecho equipo de colaboradores, contactad con nosotros. No sabéis la gran ayuda que os podemos prestar.

Disfrutad todo lo posible del III Congreso. Con nuestros mejores deseos.

ANAYA



Índice

Infantil

EL MÉTODO ABN EN LA EDUCACIÓN INFANTIL	5
LOS CONTENIDOS DEL PROYECTO Y SU DISTRIBUCIÓN EN LOS TRES NIVELES	6
LA PROPUESTA DIDÁCTICA	8
UN EJEMPLO CONCRETO	9
LOS CUADERNOS DE TRABAJO Y SU MATERIAL ANEXO	13
LOS MATERIALES DE AULA	14
PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE EL PROYECTO ABN EN EDUCACIÓN INFANTIL	15

Primaria

EL MÉTODO ABN EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA	17
NUMERACIÓN. ALGO MÁS QUE SEPARAR UNIDADES, DECENAS Y CENTENAS	18
OPERACIONES. ALGO MÁS QUE SUMAR Y RESTAR	30
MULTIPLICAR... ES OTRA COSA	38
LA DIVISIÓN Y SUS POSIBILIDADES	52
PREPARANDO LA ESO... COMO CORRESPONDE	66
A1. Numeración en cualquier base	66
A2. Números enteros	70
A3. Sucesiones	72
B1. Iniciación al álgebra. Polinomios	75
B2. Ecuaciones	77
C1. Raíz cuadrada	79

El método ABN en la Educación Infantil

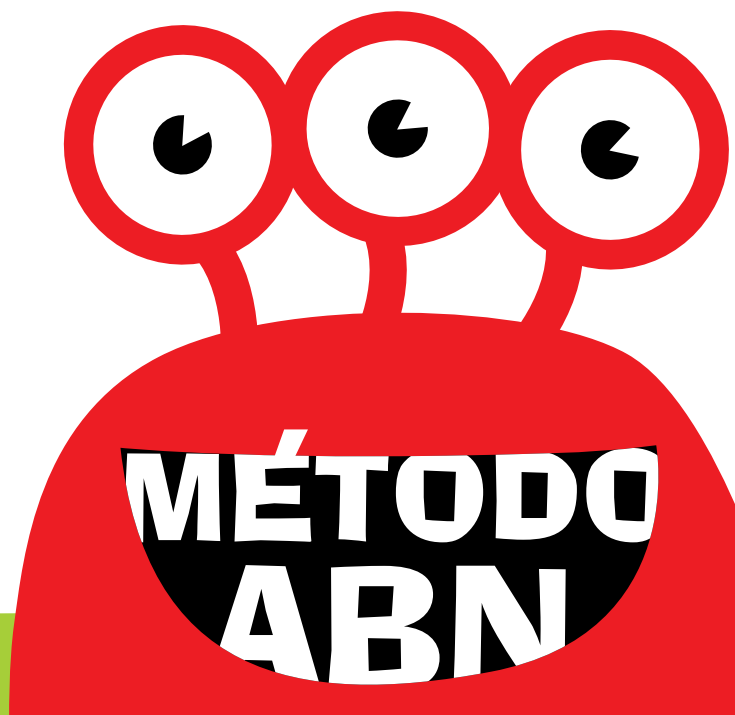
El método ABN en Educación Infantil es, claramente, otra cosa. No existen precedentes ni del nivel de los contenidos ni del tratamiento metodológico de estos. Piénsese que cuando los niños acaban la etapa de Infantil de tres años ya tienen un desarrollo numérico muy superior al que alcanzan los alumnos del método tradicional cuando finalizan el tercer curso de la etapa, o sea, el correspondiente a cinco años.

El método ABN en Educación Infantil es algo más que unas fichas a cumplir por los niños y las niñas. Con un buen material de aula, con material complementario incluido en la carpeta de los niños, y con unas propuestas didácticas que desarrollan, con toda minuciosidad, el proceso de enseñanza-aprendizaje matemático que se va a desarrollar. No existen tampoco precedentes en cuanto a la riqueza didáctica, en cantidad y calidad, de nuestras propuestas. Están hechas para que cualquier docente que se inicie en el método pueda seguirlo paso a paso. Se ocupa tanto de los contenidos para cuyo desarrollo se precisa la realización de fichas por parte del alumnado como de los contenidos que no superan el ámbito manipulativo. Ocupándose también de otros bloques matemáticos (geometría y lógica), la mayor innovación se centra en el desarrollo del sentido numérico de los alumnos.

En relación con lo anterior, parte de los resultados de las últimas investigaciones en neurociencia infantil realizadas por psiconeurólogos cognitivistas de la Universidad de Harvard (Dehaene, Spelke, Cohen, Mehler, etc.) y estructura el contenido de acuerdo con las tres grandes habilidades en las que se despliega la intuición innata del niño por los números: contar, estructura de los números y sus transformaciones. Cada una de estas habilidades se subdivide a su vez en destrezas que abarcan contenidos más específicos.

Los alumnos que siguen el método ABN salen de la etapa de Infantil con un amplio bagaje matemático: cuentan de todas las maneras, superando incluso la primera centena; estructuran, ordenan, relacionan y comparan los cien primeros números; suman y restan cantidades dentro de la primera centena y, de manera informal, llegan a multiplicar y dividir por dos, por cinco y por diez. Además, como es lógico, de cubrir los objetivos de la geometría y la lógica.

En esta publicación, preparada para los asistentes al III Congreso Nacional sobre el Método ABN, mostraremos cómo es el método y cómo se despliega en el proyecto ABN de Anaya.



LOS CONTENIDOS DEL PROYECTO Y SU DISTRIBUCIÓN EN LOS TRES NIVELES

1. Contar	Niveles		
	1	2	3
1.0. Aspectos previos	●		
1.0.1. Aprendizaje oral de la serie numérica	●		
1.0.2. Equivalencias entre conjuntos	●		
1.1. Disposición de los objetos a contar	●	●	
1.2. Fases del conteo	●	●	●
1.2.0. La actividad de contar. Historia y fases de progresión.	●	●	●
1.2.1. Contar hacia delante. Actividades para las fases 1, 2 y 3 del dominio de la numeración	●		
1.2.2. Retrocuenta	●	●	●
1.2.3. Fase 4 del conteo	●	●	●
1.2.3.1. Reconocimiento de la recta numérica	●		
1.2.3.2. Actividades para la iniciación a la fase 4.	●		
1.2.4. Fase 5 del conteo		●	●
1.2.5. Contar con símbolos			●
1.2.6. Sinergias en el conteo			●
1.2.7. Saber lo que se ha contado			●
1.3. Correspondencia grafía-cantidad (primeros números)	●		
1.3.1. Identificación grafía-cantidad y cantidad-grafía	●		
1.3.2. Corrección y ajustes en la identificación grafía-cantidad y cantidad-grafía	●		
1.3.3. El caso especial del cero	●		
1.4. La decena. Obtención, conteo y representación		●	●
1.4.1. Obtención e identificación de decenas		●	
1.4.2. Nombre y escritura de las decenas		●	
1.4.3. Representación simbólica de decenas y unidades		●	●
1.4.4. Contar decenas y unidades con símbolos			●
1.4.5. Equivalencias y conversiones			●
1.5. Secuencias de números		●	●
1.5.1. Contar de dos en dos		●	●
1.5.2. Contar decenas exactas			●
1.5.3. Contar secuencias de cinco			●
1.5.4. Contar en la recta numérica			●
1.5.5. Contar en la tabla del cien			●
1.6. Subitización	●	●	●
1.6.1. Subitización I			●
1.6.2. Subitización II			●

2. Sentido del número	Niveles		
	1	2	3
2.1. Reparto regular	●	●	
2.1.1. Reparto uniforme en dos partes	●	●	
2.1.2. Números anidados. Mitades y dobles		●	
2.1.3. Reparto uniforme en tres partes		●	
2.2. Reparto irregular y libre	●	●	●
2.2.1. Reparto irregular en dos partes	●	●	●
2.2.2. Reparto irregular inverso		●	●
2.2.3. Reparto irregular. Modelo de la casita		●	●
2.2.4. Reparto irregular en tres partes	●		●
2.2.5. Reparto libre		●	●
2.3. Reparto proporcional			●
2.3.1. Reparto proporcional. Dobles			●
2.3.2. Reparto proporcional. Mitades			●
2.3.3. Reparto proporcional. Triples			●
2.3.4. Reparto proporcional. Tercios			●
2.4. Reequilibrio de repartos		●	●
2.4.1. Reequilibrio de dos cantidades		●	
2.4.2. Reequilibrio de repartos por adición		●	●
2.4.3. Reequilibrio de repartos por sustracción		●	●
2.5. Bisección de números		●	●
2.6. Ordenación de conjuntos		●	
2.6.1. Ordenación de conjuntos desordenados		●	
2.6.2. Intercalación de conjuntos		●	
2.7. Comparación de conjuntos		●	●
2.7.1. Comparación entre dos sartas		●	
2.7.2. Comparación con números ocultos		●	●
2.7.3. Juegos de comparación		●	
2.8. Composiciones y descomposiciones con dinero			●
2.8.1. Con céntimos			●
2.8.2. Con euros			●
2.9. Estimación			●
2.9.1. Estimación con unidades			●
2.9.2. Estimación con decenas			●

3. Transformaciones de los números	Niveles		
	1	2	3
3.1. La suma	●	●	●
3.1.1. La tabla de sumar	●	●	●
3.1.1.1. Fase 1 de la tabla de sumar	●	●	
3.1.1.2. Fases 2 y 3 de la tabla de sumar		●	
3.1.1.3. Fase 4 de la tabla de sumar		●	
3.1.1.4. Extensión de la fase 1 de la tabla de sumar		●	●
3.1.2. Composiciones y descomposiciones		●	●
3.1.2.1. Los amigos del 10		●	
3.1.2.2. Los amigos de los números 6, 7, 8 y 9		●	
3.1.2.3. Los amigos del 10 y del 100			●
3.1.2.4. Dobles y mitades		●	
3.1.2.5. Composiciones y descomposiciones en la tabla del 100			●
3.1.3. Secuencia de progresión en la suma		●	●
3.1.3.1. Sumas de tres dígitos. Fases 1 y 2		●	
3.1.3.2. Sumas de decenas incompletas sin rebasamiento		●	
3.1.3.3. Sumas de decenas incompletas más dígitos con rebasamiento			●
3.1.3.4. Sumas de decenas incompletas más decenas incompletas sin rebasamiento			●
3.1.3.5. Decenas incompletas más decenas incompletas con rebasamiento			●
3.1.4. Situaciones de la suma		●	●
3.1.4.1. Cambio 1		●	●
3.1.4.2. Combinación 1		●	●
3.1.4.3. Igualación 5		●	
3.1.4.4. Comparación 3		●	●
3.1.4.5. Cambio 6			●
3.2. La resta		●	●
3.2.1. Secuencia de progreso			●
3.2.1.1. Sustracción de unidades			●
3.2.1.2. Sustracción con decenas			●
3.2.1.3. Sustracción con decenas incompletas			●
3.2.2. Situaciones de la resta		●	●
3.2.2.1. Detraer		●	●
3.2.2.2. Llegar hasta y quitar hasta		●	●
3.2.2.3. Comparar			●
3.3. El producto y la división			●
3.3.1. Multiplicar y dividir por 10			●
3.3.2. Multiplicar y dividir por 2			●
3.3.3. Multiplicar y dividir por 5			●
3.3.4. Situaciones del producto			●
3.3.5. División como reparto y agrupamiento			●

4. Geometría	Niveles		
	1	2	3
4.1. Exploración del espacio	●		●
4.1.1. Encogerse y estirarse dentro de un espacio acotado	●		
4.1.2. Orientación. Trayectorias e itinerarios	●		●
4.1.3. Seguimiento e interiorización de caminos			●
4.2. Orden en el espacio		●	●
4.2.1. Orden lineal abierto		●	
4.2.2. Orden lineal cerrado		●	
4.2.3. Orden bidimensional simple		●	●
4.2.4. Orden bidimensional complejo			●
4.3. Geometría	●	●	●
4.3.1. Estudio de líneas			●
4.3.1.1. Líneas rectas y curvas			●
4.3.1.2. Líneas onduladas y quebradas			●
4.3.2. Figuras planas	●	●	●
4.3.2.1. Identificación de figuras planas	●	●	
4.3.2.2. Reconocimiento estereognóstico de figuras planas		●	
4.3.2.3. Composición y descomposición de figuras planas			●
4.3.2.4. Figuras planas en el mundo real	●	●	
4.3.3. Simetrías			●
4.3.3.1. Simetrías I			●
4.3.3.2. Simetrías II			●

5. Lógica	Niveles		
	1	2	3
5.1. Bloques lógicos	●	●	●
5.1.1. Material lógico. Reconocimiento de atributos dictados	●	●	
5.1.2. Descripción afirmando y negando. Dos y tres atributos		●	●
5.1.3. Reconocimiento estereognóstico de tres atributos			●
5.2. Series	●	●	●
5.2.1. Series AB	●	●	
5.2.2. Series AAB y ABB		●	●
5.2.3. Series ABC. Variantes		●	●

LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Propuesta didáctica

Si bien la propuesta didáctica es un material pedagógico fundamental en cualquier método educativo, en ABN se convierte en imprescindible. Al tratarse de un método eminentemente manipulativo y experiencial, nuestro propósito ha sido ofrecer una guía lo más completa posible en la que trasladar a los docentes la experiencia del método en el día a día de las aulas, explicando cómo llevar a cabo cada una de las sesiones. En ese sentido, contamos lo que los alumnos y las alumnas tienen que aprender, cuándo y con qué secuencia, además de cómo se desarrolla una sesión de clase, qué dificultades se pueden presentar y cómo se subsanan estas, describiendo qué tipo de material se puede emplear en cada momento y, fundamental, el vocabulario básico para desarrollar los contenidos, pues se parte de la idea de que el uso del lenguaje es muy importante para el aprendizaje matemático.

La propuesta didáctica se estructura según los bloques de contenidos explicados anteriormente, que, a su vez, se dividen en habilidades y destrezas más concretas, correspondientes a los distintos epígrafes de la guía.

Como se explica en la introducción, cada uno de dichos epígrafes se estructura en los siguientes apartados:

- **Objetivos** o descripción de los contenidos que el alumnado deben alcanzar.
- **Temporalización** con indicaciones sobre el trimestre en el que se debe abordar los contenidos y, en algún caso, en qué parte del trimestre.
- **Explicación** o razones por las que este contenido debe ser trabajado, así como el contexto y su desarrollo.



■ **¿Cómo lo hacemos?** Describe, a grandes rasgos, el desarrollo del trabajo con el alumnado, la secuencia, las etapas, las líneas de progreso...

■ **Así lo hacemos.** Se entra en detalle en el desarrollo de la clase, precisando el momento, el material, la dinámica, cómo hacerlo... En este apartado se incluye el trabajo de las fichas del cuaderno, cuya explotación se desarrolla aparte.

■ **Dificultades.** Haciendo una previsión de los problemas que pueden aparecer, se intenta determinar su origen y se marca la pauta de tratamiento.

■ **Atención al lenguaje** que debe incorporar el alumnado para un correcto aprendizaje del contenido que se esté trabajando.

■ **Materiales** necesarios o aconsejados para desarrollar las actividades.

■ Al final de esta propuesta didáctica se incluyen varias **fichas fotocopiables** que el docente puede utilizar para trabajar distintos contenidos, adaptándolas a las necesidades concretas de su alumnado.

UN EJEMPLO CONCRETO

CONTAR

Secuencias de números. Contar decenas exactas (1.5.2.)



Objetivos

El alumnado contará con soltura hasta diez decenas, tanto con material manipulativo como con símbolos y en la tabla del cien.

En las tareas de contar decenas el alumno alcanzará las mismas destrezas que ya tiene adquiridas en el conteo de las diez primeras unidades, especialmente la retrocuenta y el conteo de dos en dos.



Temporalización

Primer trimestre



Segundo trimestre



Tercer trimestre



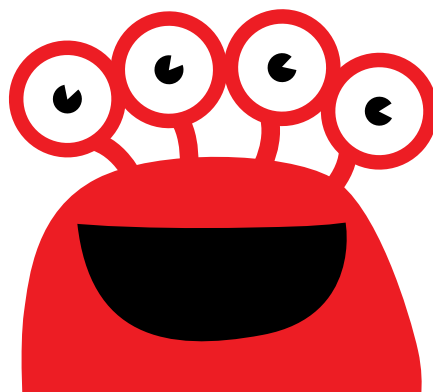
Explicación

En el curso anterior los alumnos contaron decenas. En este curso hay que sistematizar y automatizar el conteo con este orden de magnitud, pues realizarlo con soltura y rapidez es clave para todos los procesos operatorios. El conteo ascendente es uno de los componentes fundamentales en los procesos de suma, y el descendente en los procesos de sustracción.

Recordamos lo que se decía en el nivel anterior: Hay que hacer una importante distinción. Por un lado, está el nombre que identifica el número de decenas que se presentan; por el otro, las diferentes tareas de conteo: fluidez y orden, retrocuenta, conteo de dos en dos... En el primer caso, se procurará que los alumnos aprendan los nombres de las diez decenas. El resto de las actividades se centran en las cinco primeras, aunque, si el nivel de la clase lo permite, se puede ir más allá.

Todo ello sigue teniendo importancia, como también la tiene lo que se ha señalado ya respecto al número cien, del que se aprende su nombre de la misma manera que se aprendió el número diez en el nivel 1: como el nombre que identifica diez decenas, no como una centena,

pues esa agrupación no se va a llevar a cabo. Se trata de que se complete el proceso natural de contar: si cada dedo es una decena, no podemos dejar un dedo sin contar, como no se hacía cuando cada dedo valía uno.





¿CÓMO LO HACEMOS?

Como se trata de un repaso y de la sistematización y automatización de una destreza, siguen teniendo pertinencia las indicaciones que se dieron para el nivel 2:

■ **Palillos.** Los niños ya han aprendido los nombres de las decenas y cuentan con diez decenas, que pueden estar en una caja, por ejemplo. Conforme las van sacando, las van contando: *diez, veinte, treinta, cuarenta*, etc. Para la retrocuenta, tienen cinco decenas fuera de la caja, y las van introduciendo en ella una a una mientras dicen sus nombres: *cincuenta, cuarenta*, etc.

Para contar las decenas de dos en dos obran de la misma manera, lo que ocurre es que alternativamente una de las decenas la dicen en un tono muy bajo o, sencillamente, no la nombran. Así, sacan la primera y dicen el *diez* muy bajito, la segunda y el *veinte* lo dicen en voz alta y clara, omiten el *treinta* cuando sacan la tercera decena, etc. Deben alternar las decenas pares con las impares. La retrocuenta se debe limitar a las cinco primeras decenas (y dejar que lo intenten aquellos niños y niñas que quieran ir más allá).



■ **Símbolos.** Ya no se tienen las decenas delante, sino escritas en la pizarra. Cada decena se representa por un redondelito. Ahora ya es la vista la que establece la relación entre el nombre y el objeto contado. Se sigue la misma progresión que se ha indicado con anterioridad. Los alumnos y las alumnas suelen superar este paso con gran facilidad.

Una «extensión» de estos símbolos es el empleo de los dedos. Ahora cada uno de ellos va a representar una decena: *¿Cómo se cuentan? ¿Cómo se cuentan si cada vez nos saltamos uno de ellos? ¿Cómo los contamos para atrás con los dedos de la primera mano?*, etc.

■ **Tabla numérica.** Ahora ya no solo no se tocan, como con las decenas de palillos, sino que tampoco se ve la numerosidad que transmiten los símbolos. Sencillamente, se han de leer los signos numéricos que representan a las decenas completas. El o la docente hará los mismos recorridos anteriores, pero señalando con el puntero los números correspondientes. También invitará a los niños a que digan los números sin que los señale, e incluso los desafiará a que los digan sin mirar la tabla del cien.

Los procesos de retrocuenta y de conteo saltado no deben ofrecer dificultad si en las etapas anteriores se han trabajado con la suficiente intensidad. En cualquier caso, aquí es más sencillo porque tienen los números a la vista.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

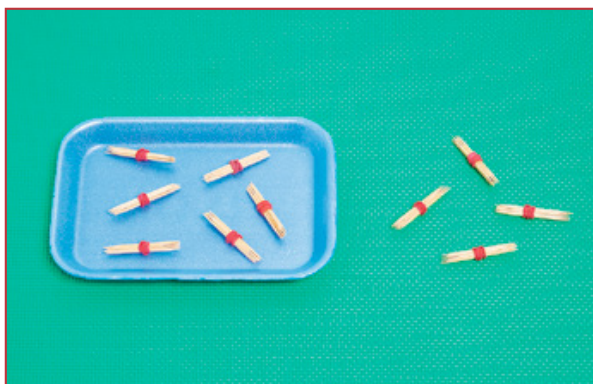
Se recuerda también la última recomendación en cuanto al conteo de diez en diez partiendo de cualquier número. Más adelante, se sistematizará esta actividad.

■ **Tabla numérica y secuencia de diez desde cualquier número.** En este último paso, el docente practicará con los niños la secuencia del conteo de diez en diez a partir de cualquier número de la tabla, señalando el número correspondiente mientras los alumnos y las alumnas lo leen. Insistimos: solo lectura. Señalaremos el tres en la tabla, luego el trece, el veintitrés, etc. El niño lo leerá, y lo único que hará nuevo será iterar los nombres de las decenas dejando fijo el nombre de las unidades. Como es simple lectura, se puede ir hacia adelante o hacia atrás.



ASÍ LO HACEMOS

Dispondremos en la alfombra una bandeja con diez decenas de palillos y llamaremos a un niño o a una niña. Como ya dominan el conteo de diez en diez, les explicaremos que vamos a ir sacando las decenas de la bandeja e iremos diciendo los palillos que tenemos fuera. El alumno comenzará sacando un paquete y dirá: *diez*, otro paquete: *veinte*, otro más: *treinta* y así sucesivamente hasta llegar a los cien palillos. Repetiremos la actividad con varios compañeros más hasta que adquieran bien la técnica.



Otro juego consistirá en entregar a los niños cartelitos en los que aparezca por un lado el número y por el otro el dibujo de las decenas, hecho de manera sencillita. Distribuiremos los carteles entre los alumnos y a una señal nuestra saldrán. Comenzará saliendo el que lleva escrito 10 y al salir dirá *diez*, lo mostrará y le dará la vuelta para que se vea que solo hay un paquete dibujado; saldrá el que lleva el 20, dirá: *veinte* y le dará la vuelta para que se vea que hay dos paquetes dibujados..., así hasta el 100.

Para ir contando decenas de dos en dos, colocaremos igualmente la bandejita con las 10 decenas y ahora les diremos que vamos a ir contando de dos en dos, igual que hicimos antes con los números, e iremos cambiando el tono de voz de forma que se oigan unos más que otros. Vendrá el encargado y ya sabe que deberá iniciar la actividad cogiendo dos decenas pero dirá muy bajito *diez* al coger la primera, luego cogerá la segunda y dirá bien alto *veinte*, y las deja fuera, cogerá la tercera y dirá bajito *treinta*, la cuarta y dirá en alto *cuarenta* y las dejará fuera, así hasta llegar a las diez decenas.

Otra actividad consistirá en sacar a diez niños, cada uno con un cartelito que indique qué decena es: 10-20-30-40-50-60-70-80-90-100. Lo primero que harán será contar ordenadamente y cada vez que a un niño le toque su turno, dará un paso hacia delante; por ejemplo, el primer niño dirá *diez* y dará un paso hacia delante, el segundo dirá *veinte* y dará otro paso hacia delante, así hasta el niño que lleve el letrero del 100. Una vez dominada esta situación, les pediremos que actúen igual, pero en un primer momento solo hablarán las decenas pares y posteriormente lo harán las impares. Cuando superen esta actividad, les podemos proponer una variante, que consistirá en que una niña salga a contar, pero pediremos que algunas decenas permanezcan agachadas, con lo cual la niña que cuenta se deberá saltar esas decenas. Por ejemplo, pediremos que se agachen el 30 y el 40 y la que cuenta deberá pasar del 20 al 60. Iremos variando la posición de las decenas que deben permanecer agachadas.

El conteo de las decenas con símbolos no se suelen presentar problemas y es algo que les gusta mucho. Saldrá un niño y pondremos en la pizarra una cantidad, por ejemplo: O O O. El alumno irá señalando con el dedo el símbolo que va nombrando a la vez que dice: *diez, veinte, treinta*. Aquí también podemos practicar la retrocuenta: mientras va borrando la decena, si tiene O O O O, dirá: *cuarenta, (borra una), treinta, (borra otra), veinte...*

Para contar de 10 en 10 en la tabla numérica, irán cantando a coro según vayamos señalando los números. Después, podemos pedir si algún alumno se atreve a hacer de profe, señalando y diciendo los números a la vez. Aquí también podemos señalar, por ejemplo, el 30 y que ellos sigan contando mientras les vamos señalando. Igualmente empezaremos a contar desde el 100, el 90, el 80... a la vez que señalamos. También podemos llevar a cabo esta actividad de contar de 10 en 10, comenzando desde cualquier número: 1, 11, 21...



Dificultades

Recordamos las que se apuntaron en el nivel anterior:

■ **Los nombres de los números.** Hay tres tipos diferentes, y a dos de ellos hay que prestarles algo más de atención:

- a) Los nombres de *diez*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *ochenta* y *noventa* recuerdan bien su conexión a los nombres de los dígitos. Estos nombres no plantean mayor dificultad.
- b) Los nombres de *veinte* y *cien* rompen la norma de construcción. No son *dosenta* ni *diecenta*. Por ello, se les ha de prestar algo más de atención que a los anteriores.
- c) Los nombres *sesenta* y *setenta* crean confusión y problemas en muchos niños. Hay que detenerse en ellos y asegurarse de que los dominan. Se deben repetir las veces que sean necesarias hasta que los alumnos sepan diferenciarlas y decirlas con exactitud. Se les puede hacer ver la conexión entre *seis* y *sesenta* (*seis* y *seisenta*) y *siete* y *setenta* (*siete* y *sietenta*).

■ **El proceso de contar decenas.** Se ha comprobado que si el alumnado tiene soltura en las actividades de conteo, enseguida la consigue en el conteo de decenas. Si se cuenta de diez en diez a partir de cualquier número (por ejemplo, la secuencia 2-12-22-32), al niño que tenga dificultades le explicaremos que lo único que tiene que hacer es decir la secuencia y, tras cada número, añadir el 2.

■ **Las dos diferenciaciones básicas.** Son conceptuales, y, por tanto, muy importantes. La primera es que el alumno no vea el paquetito de diez como uno, sino como su contenido (diez). Por ello, no puede contarlos igual que si fueran elementos sueltos. La segunda es la referida al valor posicional. El número de decenas ocupa un determinado sitio. La grafía es la misma, por lo que la forma de determinar si esa grafía (el 2) hace referencia a dos paquetes de diez o a dos elementos, es saber el lugar que ocupa.



Atención al lenguaje

Se insiste en que hay que conseguir una buena dicción de los nuevos nombres, y trabajarlos en conexión con las unidades: *treinta y tres*, *sesenta y seis* y *setenta y seis*, *sesenta y siete* y *setenta y siete*, etc. En este punto hay que extremar la atención para conseguir el aprendizaje y la dicción correcta de las nuevas palabras, que van a estar presentes en todos los aspectos numéricos de los cursos siguientes.

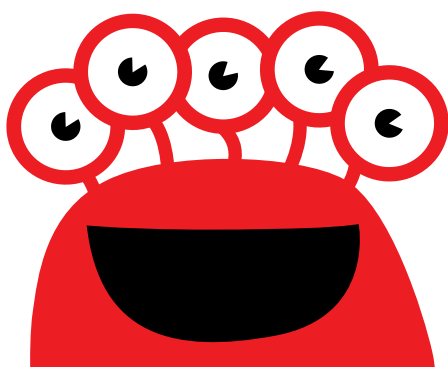
Por otro lado, es pertinente mostrar a los alumnos la diferencia entre diez y decena. Hay dos casos:

- a) **Conjuntos que se están contando.** El diez es el número que le corresponde a un elemento de un conjunto que se está contando, y que sigue al que le ha correspondido el número nueve. Si se cuentan los dedos, el diez es un dedo, el último, pero no es una decena.
- b) **Conjuntos que se han contado.** El diez y la decena se pueden considerar iguales en el siguiente caso: *Dame una decena de aceitunas o Dame diez aceitunas.*



Materiales

Se trata de contar y contar, por lo que además de los propios niños (cada uno es una decena), utilizaremos distintas agrupaciones de diez objetos, los símbolos, la tabla del cien, etc.



LOS CUADERNOS DE TRABAJO Y SU MATERIAL ANEXO

Cuadernos

La distribución de los cuadernos por niveles es la siguiente:

- **Nivel 1:** dos cuadernos (el cuaderno 1 corresponde a los trimestres primero y segundo, y el cuaderno 2, al tercer trimestre).
- **Nivel 2:** tres cuadernos, uno por trimestre.
- **Nivel 3:** tres cuadernos, uno por trimestre.

El objetivo de los cuadernos no es otro que resumir toda la secuencia de actividades desarrollada y servir de evaluación para que el docente compruebe el grado de aprendizaje de su alumnado.

Las fichas son, por tanto, la parte final del proceso, en las que se hace necesario un mayor nivel de abstracción, pues se pide al niño que realice en dos dimensiones lo que antes ha trabajado en tres. Los planteamientos trabajados en el aula se reflejan de una forma atractiva, experiencial y lúdica, con ilustraciones y tipografías adaptadas a la edad del alumnado y teniendo en cuenta su nivel madurativo y sus habilidades psicomotoras (por ejemplo, en el nivel 1, se facilitan adhesivos de números para que los alumnos y alumnas los utilicen para realizar las actividades si no pueden escribirlos).

En la parte superior de cada ficha se incluye la imagen del monstruo que representa cada nivel, con la idea de que, tras la realización de la actividad, cada alumno y cada alumna evalúe su trabajo dibujándole una boca, más o menos sonriente, dependiendo de si el trabajo de la ficha le ha gustado, si le ha resultado fácil o difícil, si le ha parecido divertido, si cree que lo ha hecho bien...



En el reverso de cada ficha:

- Se hace referencia al epígrafe de la propuesta didáctica con el que se corresponde la ficha, en el que se explica cómo desarrollar la sesión previa a su realización.
- Se describe, de forma destacada, la actividad o las actividades que ha de realizar el alumno en la ficha para trabajar directamente el contenido del epígrafe.
- Se incluyen actividades complementarias.
- En su caso, se muestran los adhesivos, gomets, troqueles... necesarios.

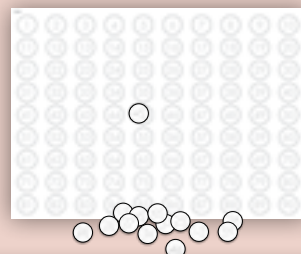


Dichos adhesivos, troqueles, etc., se incluyen al final del cuaderno. Los adhesivos específicos para cada ficha se presentan identificados con el número de dicha ficha. En algunas ocasiones, se incluyen más adhesivos de los necesarios, con el fin de que los niños y las niñas no los peguen automáticamente y sin pensar, sino que tengan que reflexionar, contar, agrupar... dichos adhesivos para realizar la actividad. En otras ocasiones, se dan los adhesivos justos, porque el objetivo de la actividad no es tanto contar como distribuir, agrupar, reequilibrar, etc. Se incluyen, asimismo, adhesivos, números y gomets de libre disposición para realizar otras actividades que el docente considere oportunas: de ampliación, de refuerzo...

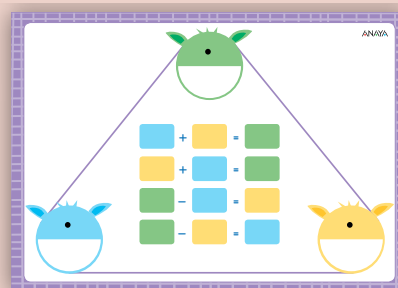
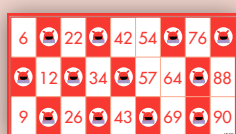
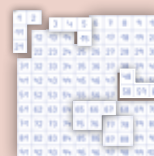
LOS MATERIALES DE AULA

Materiales de aula

- Tabla numérica hasta el 100 y su cruz de operaciones (+1 / -1 / +10 / -10).
- Crucinúmeros de material plastificado que permite escribir con rotulador de pizarra o cera los números que faltan y borrarlos.
- Puzzle de crucinúmeros para formar la tabla numérica.
- Mural de decenas hasta cien.
- Triángulo de operaciones de material plastificado para escribir y borrar.
- Cartones de bingo hasta 50 y hasta 90.
- Números del 1 al 90 para el bingo y panel de comprobación.
- Dinero en cartón (billetes y monedas).
- Dado de operaciones (+1 / -1 / +10 / -10 / +5 / =).



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32		-10		36	37	38	39	40
41	42	-1	44	+1	46	47	48	49	50
51	52		+10		56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



PREGUNTAS Y RESPUESTAS SOBRE EL PROYECTO ABN EN EDUCACIÓN INFANTIL

- Fichas y método manipulativo.
- Dificultad de las fichas.
- Hay muchas fichas.
- El método tiene un nivel demasiado elevado.

⦿ *¿No es un método manipulativo? ¿Qué pintan aquí las fichas?*

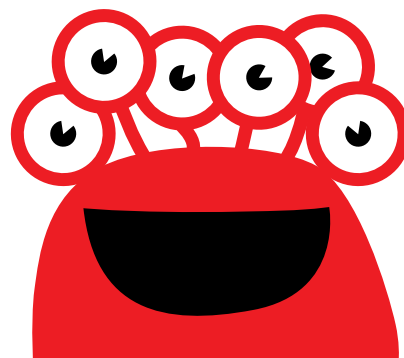
- No solo. Es una parte importante, previa, imprescindible. Pero no es el objetivo en sí. Está al servicio del desarrollo mental, de la creación de modelos formales.
- Las fichas, como paso intermedio entre la manipulación y la abstracción.
- Otros roles de las fichas:
 - Concreción y testimonio de lo hecho.
 - Evaluación.

⦿ *Fichas y método abierto.*

- Las fichas son las mismas, pero no la forma de cumplimentarlas. En ABN, todos hacen una misma suma, pero de formas diferentes.

⦿ *¿No son demasiadas fichas?*

- Son para un año natural. De septiembre a septiembre.
- Es posible que se queden algunas sin hacer, como siempre ha ocurrido.
- Las que se quedan sin hacer se pueden realizar el curso siguiente. Es una buena forma de llevar a cabo la transición desde un curso al otro.
- Hay muchas facilidades en la realización de las fichas.
- Cuando se abordan las fichas, el contenido está muy trabajado, por lo que no se tarda mucho tiempo.



El método ABN en la Educación Primaria

Los libros de texto de Matemáticas ABN en Primaria de nuestra editorial se han convertido en el mejor instrumento para trasladar a todos los docentes, de la forma más eficaz, las herramientas necesarias para poder aplicar en sus clases el método ABN. Apoyados en unas propuestas didácticas que siguen el desarrollo del libro de texto página a página, se convierten en el formador, asesor y guía del maestro o la maestra. Los libros han sido realizados por el creador del método (Jaime Martínez Montero) y sus dos más estrechos colaboradores (José Miguel de la Rosa y Concha Sánchez), por lo que toda la experiencia que estos han acumulado a lo largo de los cursos se pone a disposición de las aulas.

En este momento, el método ABN se ha convertido en el mayor ámbito de innovación en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Esto tiene un reflejo directo en la etapa de Primaria, en la que nuestros libros suponen un cambio radical y un avance sin precedentes. En ningún otro material escolar se encuentra un tratamiento de la numeración como el que aquí se ofrece. Los diversos tipos de sustracciones, sumirrestas, dobles restas, repartos igualatorios, productos posicionales, crecientes, patrones, productos y divisiones por aproximación, etcétera, aparecen por primera vez y suponen un salto de calidad y de modernidad que no tiene parangón.

Otro aspecto importante es la preparación para la entrada en la matemática propia de la ESO. De manera informal, los libros, desde 4.º, introducen conceptos que pertenecen a contenidos en la etapa de Secundaria: polinomios, ecuaciones, potencias y raíces, numeración en cualquier base, sucesiones... Es algo que no tiene ningún precedente en la bibliografía actual, y que supone un sello de identidad específico del método ABN.

Finalmente, queremos hacer mención al aspecto en el que más destacan los alumnos que siguen el método respecto a los que no lo siguen: la resolución de problemas. En las diversas pruebas comparativas que se han aplicado, los formados en ABN más que doblan los resultados de los que siguen el método tradicional. Para los problemas generales, se sigue el modelo de las categorías semánticas (en los problemas de una operación), y el de los esquemas subyacentes, en el caso de los problemas de más de una operación. Además, hay un tratamiento particular en el caso de problemas más específicos: porcentajes, móviles, problemas de grifos, densidades, escalas y proporciones, etc. Las páginas que siguen os van a permitir comprobar todas nuestras afirmaciones.



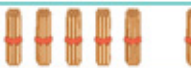









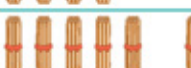




NUMERACIÓN. ALGO MÁS QUE SEPARAR UNIDADES, DECENAS Y CENTENAS

La **B** y la **N** del nombre del método quieren decir que la base del mismo es el conocimiento profundo del sistema de numeración. Por ello, nuestros libros de texto ABN hacen un tratamiento integral de la numeración sin precedentes. Pero es mejor poner ejemplos que emplear muchas palabras.

Primero de Primaria

🕒 *Completa la tabla. ¿Qué número se forma?*

		68
		
		21
		
		
		
		
		

Transición de la manipulación al código numérico. Las composiciones no son rutinarias.

🕒 *Ahora con números.*



Decenas	Unidades	Número
4	3	
2	10	30
5	7	
3	15	
6	20	
1	8	
7	22	
0	23	

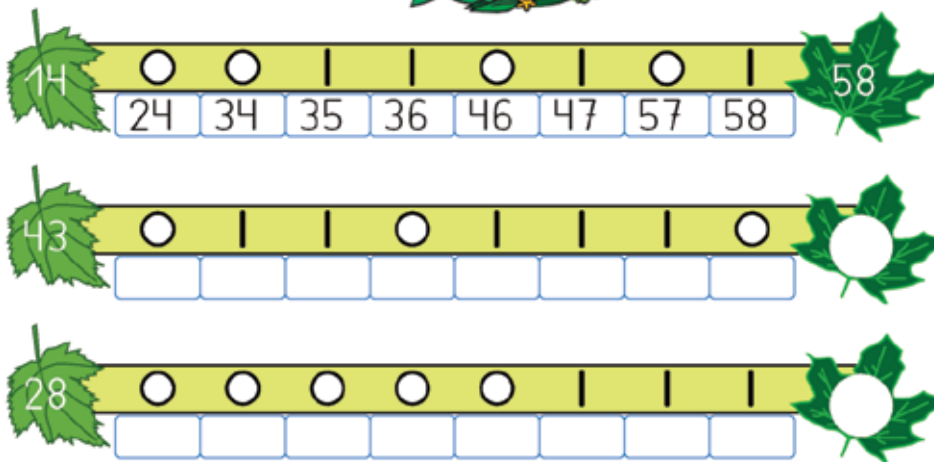
Cuando se sabe hacer con palillos y cifras, ya se puede hacer la composición solo con guarismos.

👁️ ¿A qué número llegas?

Parte del número
de la primera hoja y cuenta
según estas claves.

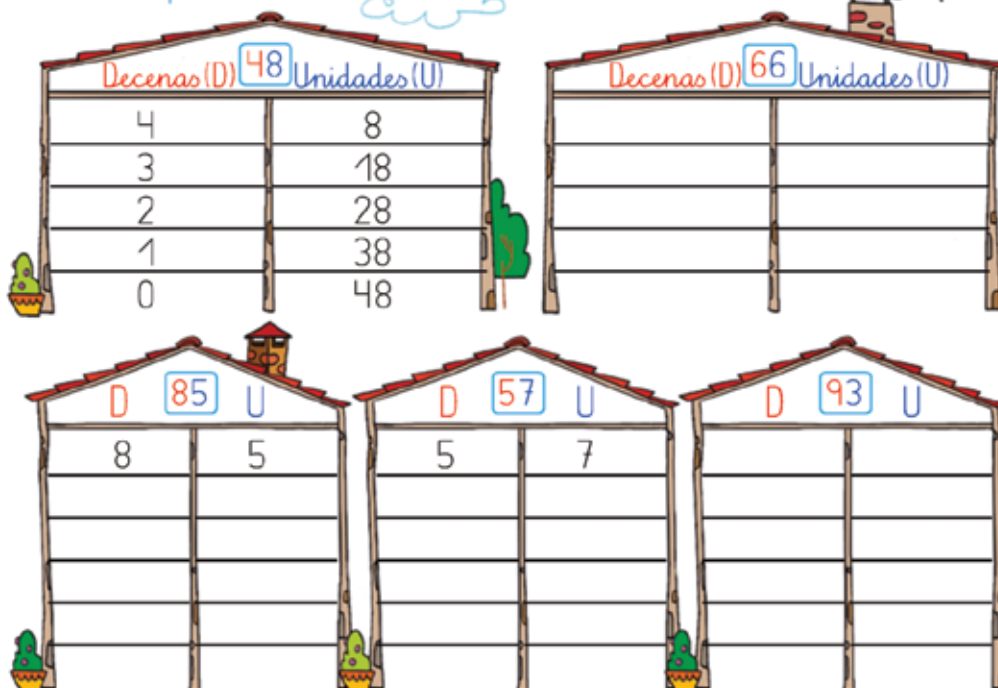


Añado 1 → |
Añado 10 → ○



Para ayudar a contar, nada mejor que adquirir mucha soltura intercalando el conteo de diez y el de uno. Será la base para sumar y restar... y para muchas más cosas.

👁️ Fíjate en el ejemplo y completa cada "casita de la descomposición".

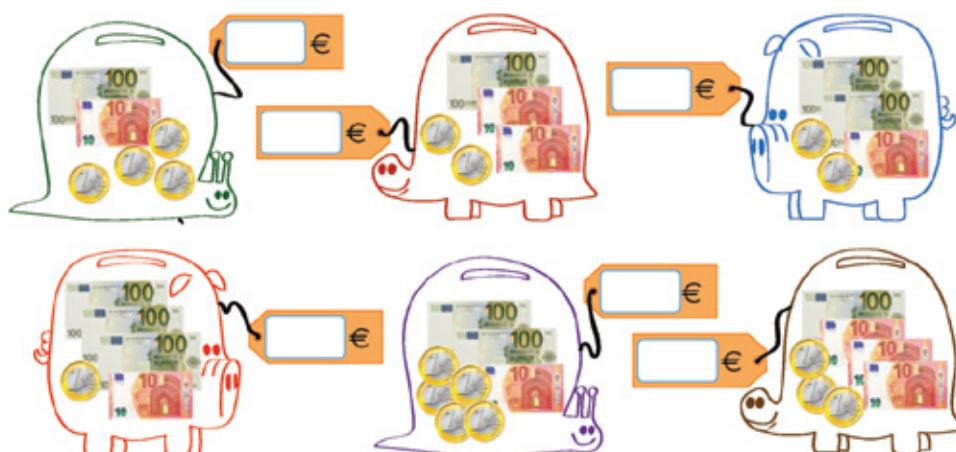


Las casitas de descomposición son ya un emblema del método ABN. Desde 1.º se trabajan para facilitar múltiples descomposiciones.

Segundo de Primaria



¿Cuánto dinero hay en las huchas?



En ABN es muy importante ofrecer a los alumnos y a las alumnas referentes para que tengan así una base sobre la que construir los procesos de abstracción. El dinero ha demostrado su utilidad para componer y descomponer la centena.

Mira lo que se puede decir del número 458:

La cifra de las centenas es 4.	La cifra de las decenas es 5.	La cifra de las unidades es 8.
--------------------------------	-------------------------------	--------------------------------

C	D	U
4	5	8

Tiene 4 centenas completas.
 Tiene 45 decenas completas.
 Tiene 458 unidades.

Desde muy pronto se le hace ver al alumnado distinciones que son claves en el aprendizaje de la numeración. Una de ellas es que aprendan a diferenciar, por ejemplo, entre la cifra que ocupa el lugar de las decenas y el número de decenas que pueda tener un número.

Aplica el código. ¿A qué número llegas?



Conforme el proceso de aprendizaje progresa, los códigos que se emplean para contar también. En este caso, se trabaja la destreza del alumnado en contar de uno en uno, de diez en diez y de cien en cien, hacia adelante y hacia atrás.

¿Quieres traducir algunos números, hasta el 31, a un código misterioso? Nosotros lo llamamos «código binario». Pon tu mano con la palma hacia fuera y asigna a tus dedos los valores que ves a la derecha. ¿Ves que cada uno es el doble del anterior?

PASAR UN NÚMERO A CÓDIGO BINARIO

$7 = 1 + 2 + 4$

Escribe el número como una suma, usando solo los valores que tienes en los dedos. Levanta los dedos que intervienen en la suma y escribe:

Dedo levantado → 1

Dedo sin levantar → 0

$7 \leftrightarrow 111$

TRADUCIR DESDE CÓDIGO BINARIO

Cada número representa un dedo. ¡El orden es importante! Suma los valores de los dedos a los que les corresponde un 1.

10101

↑

$16 + 4 + 1 = 21$

Escribe en «código binario».

$17 = 16 + 1$	$11 = 8 + 2 + 1$	$29 = 16 + 8 + 4 + 1$

Ya al final de 2.º se introduce la numeración binaria, de tanta importancia para el futuro. Se hace como un juego para desarrollar con los dedos, que permite su fácil comprensión y aprendizaje.

Escribimos números de cuatro cifras

Ocho mil ochocientos ochenta y ocho → 8888	Ocho mil ochenta y ocho → 8088
Ocho mil ochocientos ochenta → 8880	Ocho mil ochenta → 8080
Ocho mil ochocientos ocho → 8808	Ocho mil ocho → 8008
Ocho mil ochocientos → 8800	Ocho mil → 8000

- ② Escribe los siguientes números en tu cuaderno:

Fíjate en estos ejemplos:	
Seis mil seiscientos → 6600	Cinco mil cincuenta → 5050
Seis mil sesenta y seis → 6066	Cinco mil cinco → 5005



Seis mil sesenta	Cinco mil quinientos
Seis mil seiscientos sesenta y seis	Cinco mil quinientos cincuenta y cinco
Seis mil	Cinco mil
Seis mil seis	Cinco mil quinientos cincuenta
Seis mil seiscientos sesenta	Cinco mil cincuenta y cinco
Seis mil seiscientos seis	Cinco mil quinientos cinco

El aprendizaje correcto de la escritura de cualquier número se consigue tempranamente gracias a ejercicios de un alto poder discriminador y, a la vez, muy sistemáticos. Un ejemplo de ello se recoge en esta página.

- ② ¿Qué número se forma con estas descomposiciones? Si te hace falta, ayúdate de una tabla como la del ejemplo:



	UM	C	D	U
3 UM	3			
15 C	1	5		
4 D			4	
806 U		8	0	6
	4	13	4	6
	5	3	4	6

- a) 5 UM, 23 D y 21 U
b) 134 D y 12 U
c) 4 C y 1204 U
d) 2 UM, 5 C, 6 D y 234 U

が

- ② De cada pareja de números, ¿cuál es el mayor?

343 D y 16 U | 2 UM, 93 D y 4 U

4 UM | 2 UM, 12 C y 200 D

5487 U | 549 D

64 C y 28 U | 63 C y 98 U

32 C y 32 D | 320 D y 32 U

74 C y 95 U | 7 UM, 4 C, 8 D y 5 U



Con el paso de los cursos se intensifican las descomposiciones y las composiciones no rutinarias, así como comparar números enunciados en sus órdenes de magnitud.

Trabajamos la numeración

Busca números de cuatro cifras. Fíjate en el ejemplo y completa.

- Tiene 14 centenas. → 1400
- La cifra de las unidades es el doble que la de las centenas. → 1408
- La cifra de las decenas es el triple que la de las unidades de millar. → 1438



- Tiene 24 centenas.
- La cifra de las decenas es la mitad que la de las unidades de millar.
- La cifra de las unidades es el doble que la de las centenas.

- Tiene 78 decenas.
- La cifra de las unidades de millar es la mitad que la de las decenas.
- Tiene las mismas unidades que centenas.

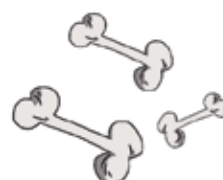
- Tiene 25 decenas.
- Las cifras de las decenas y de las unidades de millar son iguales.
- La cifra de las unidades es el triple que la de las centenas.

- Tiene 33 unidades.
- La cifra de las unidades de millar es el triple que la de las decenas.
- Tiene 9 centenas.

En cualquier niño o niña se esconde un pequeño detective. Por eso, se emplean este tipo de ejercicios, para cuya resolución se requiere reflexión y método.

Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

4 CM = ... U	58264 U = ... D	5 CM = ... D
4 CM = ... C	58264 U = ... CM	2487 U = 0,2487 DM
4 CM = ... D	58264 U = ... DM	124 C = ... U
4 CM = ... DM	58264 U = ... C	64 UM = ... DM



Ahora tú. Fíjate en el ejemplo y completa en tu cuaderno.

Observa cómo convertimos 14258 centésimas en decenas.



14258 c = ¿D?						14258 c = 14,258 D					
UM	C	D	U	d	c	UM	C	D	U	d	c
	1	4	2	5	8		1	4	2	5	8

6 C = ... D	4000 c = ... U	4 UM = ... C
6 C = ... d	4000 c = 0,04 UM	17 C = ... d
6 C = ... UM	4000 c = ... d	2584 c = ... U
6 C = ... U	4000 c = ... D	2584 d = ... D

Las técnicas de composiciones y descomposiciones no rutinarias se aplican también a los números decimales.

Trabajamos con decimales

¿Cómo se escriben los números si cambiamos de unidad?
Mira el ejemplo.

	UM	C	D	U	d	c
El número 5 628,34 U lo escribimos...	5	6	2	8	3	4
... en unidades de millar: 5,62834	5	6	2	8	3	4
... en centenas: 56,2834	5	6	2	8	3	4
... en decenas: 562,834	5	6	2	8	3	4
... en unidades: 5 628,34	5	6	2	8	3	4
... en décimas: 56 283,4	5	6	2	8	3	4

¿Te has fijado que la coma siempre se pone detrás del orden de la unidad que se pide?



- ⦿ Ahora tú. Escribe en tu cuaderno el número que resulta al convertirlo en otro orden de unidad.

NÚMERO	ESCRÍBELO EN...
687	d
1 506	C
100 000	DM
34,28	c



NÚMERO	ESCRÍBELO EN...
600 000	C
4 528,20	UM
708	c
1 000	d

- ⦿ Ahora tú. Observa el ejemplo y completa en tu cuaderno.

	UM	C	D	U	d	c
El número 63,126 D lo escribimos...		6	3	1	2	6
... en unidades de millar: 0,63126	0	6	3	1	2	6
... en unidades: 631,26		6	3	1	2	6
... en décimas: 6 312,6		6	3	1	2	6
... en centésimas: 63 126		6	3	1	2	6



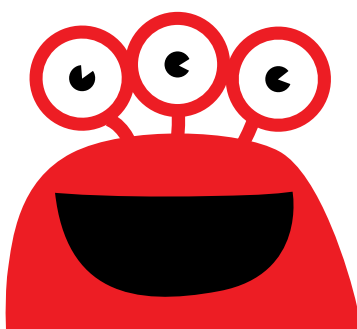
Fíjate bien.
Cambia un poco
el ejercicio.

NÚMERO	PÁSALO A...
4,02 CM	C
536 258 U	DM
4,3 D	d
0,03 C	c

NÚMERO	PÁSALO A...
1 538 d	D
15 380 c	U
684 D	UM
0,2 CM	U



Las equivalencias entre los diversos órdenes de magnitud se generalizan tan pronto se introducen nuevos números. Ello favorece mucho el concepto de complejo e incomplexo aplicado a las unidades de medida, a sus múltiplos y a sus submúltiplos.



Números consecutivos

Los números 31, 32, 33 y 34 son consecutivos porque van seguidos y en orden.



- ¿Cómo encontrar números consecutivos sabiendo solo su suma?

Cantidad **impar** de números consecutivos.



¿Qué cinco números consecutivos suman 30? Divide la suma entre la cantidad de números consecutivos:

$$30 : 5 = 6 \rightarrow \text{número en el centro de los cinco}$$



4 5 6 7 8

Los números 4, 5, 6, 7 y 8 son consecutivos y suman 30.

Cantidad **par** de números consecutivos.



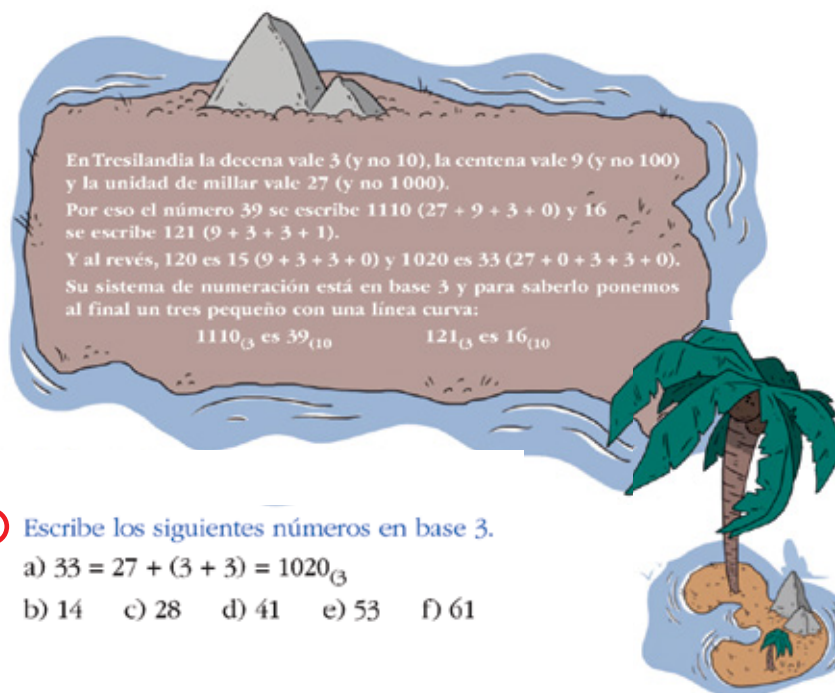
Seis números consecutivos suman 75. ¿Cuáles son? Divide 75 entre 6, el cociente 12 (no se cuenta el resto) y el siguiente, 13, serán los números que ocupen el lugar central:



10 11 12 13 14 15

Los números consecutivos 10, 11, 12, 13, 14 y 15 suman 75.

Normalmente, averiguar números consecutivos cuya suma se conoce suele reservarse para la etapa de la ESO, y suele resolverse por medio de una ecuación de primer grado. En nuestro método, el conocimiento de los números permite adelantar notablemente este contenido y, además, se puede desarrollar de forma muy sencilla y con el mero cálculo mental.



- Ⓢ Escribe los siguientes números en base 3.

- a) $33 = 27 + (3 + 3) = 1020_3$
 b) 14 c) 28 d) 41 e) 53 f) 61

Se continúa avanzando en el conocimiento y el dominio de la numeración en bases distintas de diez. Aquí tenemos un ejemplo de cómo se trabaja la numeración en base tres, y de qué modo se pasan números en base diez a base tres, y viceversa.

- Escribe estos números con letras o con cifras:

A 23 503 200

C Tres millones cuatrocientos tres mil uno

D 2458890

E Dos millones ciento ocho mil setenta y dos



- Copia y completa en tu cuaderno.

NÚMERO	AÑADO	OBTENGO
39	1 unidad	
589	1 decena	
2999	1 centena	

NÚMERO	AÑADO	OBTENGO
9179		9180
9009		9010
9099	1 decena	

- Completa estas tablas en tu cuaderno:

NÚMERO	QUITO	OBTENGO
909	1 decena	
9100	1 unidad	
9000	1 centena	

NÚMERO	QUITO	OBTENGO
6400		6300
7400		7399
9000	1 decena	

- ¿Qué tres números consecutivos suman 27? ¿Y qué cinco números consecutivos suman 35?



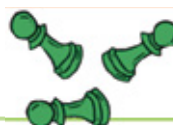
- Copia en tu cuaderno estas tablas y complétalas:

NÚMERO	AÑADO	OBTENGO
7 CM 2 DM 6 U	8 UM	
4 UM 5 D 35 U	35 C	

NÚMERO	AÑADO	OBTENGO
5 UM 7 C 9 D	12 C	
5 C 27 D 1 U	350 U	

- Pasa a base 3 los números 17, 25, 36 y 49.

- Pasa a base 10 estos números en base 3: $11_{(3)}$, $22_{(3)}$, $101_{(3)}$.



EL JUEGO DE LAS 8 DAMAS PACIFISTAS

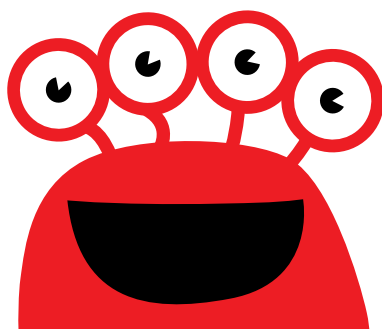
A este juego pueden jugar hasta los que no conocen el ajedrez. Solo necesitas saber que la dama se desplaza en línea recta en todas direcciones (horizontal, vertical y diagonal) y puede avanzar las casillas que quieras.

Consiste en poner 8 damas en un tablero de ajedrez, sin que se puedan cruzar sus caminos (ni en horizontal, ni en vertical, ni en diagonal). Usa los peones como si fuesen damas.



¡Existen 92 soluciones!
¿Cuántas eres capaz de encontrar?

El repaso de la unidad dedicada a la numeración nos hace ver el alto nivel de dominio que se alcanza y lo lejos que queda el tratamiento tradicional del correspondiente al ABN.



Restas con órdenes de magnitud

Para restar

Para restar, también puedes hacerlo mentalmente o con la rejilla. Vamos a verlo con ejemplos:

$$7125 - 3 \text{ UM } 16 \text{ C } 25 \text{ D } 38 \text{ U}$$

Para este primer ejemplo recuerda agrupar los mismos órdenes de magnitud.

7 125 - 3 UM 16 C 25 D 38 U		
4 UM 25 U	3100	6 C 25 D 13 U
8 C	2300	5 D 13 U
6 D	2240	3 U
3 U	2237	0



Resto 4 UM (que formo a partir de 3 UM y de la 1 UM de las 16 C), así como 25 U. Es lo mismo que restar $7125 - 4025$.

Resto 8 C (que formo a partir de las 6 C y las 2 C de las 25 D), que es como restar $3100 - 800$.

Resto 6 D (que formo a partir de 5 D y 1 D de las 13 U), que es como restar $2300 - 60$.

Por último, resto las 3 U que quedaban.

$$6 \text{ UM } 36 \text{ C } 20 \text{ D } 78 \text{ U} - 2384$$

Con el segundo ejemplo vamos a verlo de la otra manera (al revés).

2384 - 6 UM 36 C 20 D 78 U		
2300	84	4 UM 33 C 20 D 78 U
8 D 4 U	0	4 UM 33 C 12 D 74 U
7494		

De los 2384 resto 2300 que son 2 UM y 3 C.

Resto todo lo que queda, 8 D y 4 U, pues hay suficientes D y U para poder quitarlo todo.

Resuelve estas restas:

- a) $17 \text{ UM } 428 \text{ D} - 9921$ b) $11568 - 6 \text{ UM } 28 \text{ C } 550 \text{ U}$ c) $22000 - 100 \text{ C } 100 \text{ D}$

Ahora, las «sumirrestas».

- a) $4546 + 3197 - 60 \text{ C } 104 \text{ D } 8 \text{ U}$ b) $7268 - 3715 + 1 \text{ DM } 134 \text{ U}$

Y por último, resuelve las dobles restas.

- a) $24237 - 7700 - 2 \text{ UM } 54 \text{ C } 234 \text{ U}$ b) $8954 - 78 \text{ D } 1004 \text{ U} - 40 \text{ C } 30 \text{ D}$

Con el sucesivo progreso en el dominio de la numeración, se llega a plantear la resolución de operaciones mixtas, en las que uno de los términos se expresa en sus correspondientes órdenes de magnitud, y el otro, en su escritura ordinaria. Se recoge aquí un ejemplo de sustracción mixta.

Descomposición polinómica (II)

Vamos a descomponer un número creando un cuarto nivel, cambiando la base de la potencia (10) por la letra x . Observa:

8967				
Primer nivel	8000	+ 900	+ 60	+ 7
Segundo nivel	$8 \cdot 1000$	+ $9 \cdot 100$	+ $6 \cdot 10$	+ 7
Tercer nivel	$8 \cdot 10^3$	+ $9 \cdot 10^2$	+ $6 \cdot 10$	+ 7
Cuarto nivel (cambiamos 10 por la x)	$8x^3 + 9x^2 + 6x + 7$			

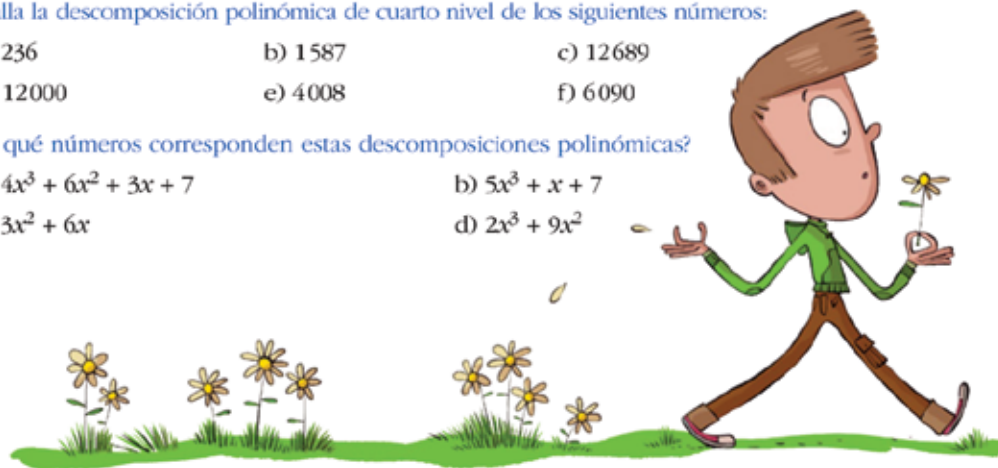
De este modo, el número 8967 se convierte en: $8x^3 + 9x^2 + 6x + 7$

● Halla la descomposición polinómica de cuarto nivel de los siguientes números:

- a) 236 b) 1587 c) 12689
d) 12000 e) 4008 f) 6090

● ¿A qué números corresponden estas descomposiciones polinómicas?

- a) $4x^3 + 6x^2 + 3x + 7$ b) $5x^3 + x + 7$
c) $3x^2 + 6x$ d) $2x^3 + 9x^2$



El dominio de la numeración permite alcanzar niveles distintos de composición y descomposición. En 6.º se llega, en un nivel 4.º, a convertir cualquier número en un polinomio, con el que se podrá operar. Con ello se preparan muchos conceptos algebraicos que son considerados difíciles en la ESO.

Investiga en equipo

En la siguiente descomposición polinómica, a x le damos distintos valores. ¿Qué número representa cada polinomio? Coged la calculadora e intentad resolver los siguientes ejercicios. Observad el ejemplo:

- a) $x = 2$ y $3x^3 + 2x^2 + 6 = 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 6 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 6 = 24 + 8 + 6 = 38$
b) $x = 3$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$
c) $x = 4$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$
d) $x = 5$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$

Una investigación en equipo para averiguar el valor numérico de varios polinomios en función de los sucesivos valores que va tomando la indeterminada.

Descomponemos polinomios

Los polinomios también podemos descomponerlos. Vamos a verlo con un ejemplo:

$$3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$$

Partimos del valor inicial: $3000 + 600 + 50 + 4$

	TRASLADAMOS CANTIDADES	RECOMPONEMOS EL POLINOMIO
De UM a C	$2000 + 1600 + 50 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$
De UM a C	$1000 + 2600 + 50 + 4$	$10^3 + 26 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$
De C a D	$3000 + 400 + 250 + 4$	$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 4$
De UM a C y de C a D	$2000 + 1200 + 450 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 + 45 \cdot 10 + 4$
De UM y C a D	$2000 + 400 + 1250 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 125 \cdot 10 + 4$

Si cambiamos la base 10 por x , es lo mismo. Observa:

	$6x^3 + 6x^2 + 6x + 6$
De UM a C	$5x^3 + 16x^2 + 6x + 6$
De C a D	$6x^3 + 5x^2 + 16x + 6$
De UM a C y de C a D	$5x^3 + 15x^2 + 16x + 6$
De UM y C a D	$5x^3 + 5x^2 + 116x + 6$
De C a U	$6x^3 + 5x^2 + 6x + 106$

Las descomposiciones son muy variadas, al igual que las que haces habitualmente.



- ☉ Haz tres descomposiciones de cada uno de los siguientes polinomios de base 10:

a) $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2$

b) $3 \cdot 10^3 + 10^2 + 4 \cdot 10$

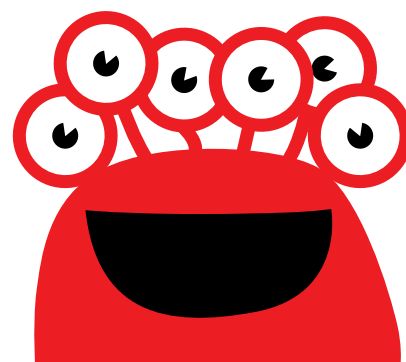
c) $6 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2$

- ☉ Haz tres descomposiciones de cada uno de los siguientes polinomios de base x :

a) $47x^3 + 2x^2 + x + 8$

b) $2x^3 + 2x^2 + 2x$

En la línea ya anunciada en la página anterior, se avanza un paso en cuanto a sucesivas y distintas descomposiciones de un polinomio de cuya indeterminada se conoce el valor. Esto se aplica para iniciar a los niños y a las niñas en sumas y restas de polinomios en este curso: en 6.º de Primaria.



OPERACIONES. ALGO MÁS QUE SUMAR Y RESTAR

La estructura aditiva contiene, en el método ABN, más operaciones que en el tradicional. No es así en el caso de la suma o adición, pero sí en los restantes casos.

Una de las operaciones ABN que más cambia respecto al formato tradicional es la correspondiente a la resta o sustracción. Ello no se debe a un capricho, sino a la necesidad de adaptar los formatos a las transformaciones de las realidades numéricas que recogen.

La sustracción es una operación compleja. Va más allá de ser la inversa de una suma. Son trece tipos distintos de problemas que se resuelven con ella, y fundamentalmente encierra dentro de sí cuatro modelos diferentes. Son estos:

DETRACCIÓN. Es la más clásica y la que más se identifica con el formato tradicional. Se trata de una sustracción en la que se conoce la cantidad inicial y la detracción o parte de la misma que se quita. El resultado es lo que queda de ella.

COMPARACIÓN. Comparte el mismo formato que el modelo de detracción, pero conceptualmente son distintas. Hay dos cantidades desiguales, y se trata de establecer en cuánto es una mayor que la otra, y viceversa.

ESCALERA ASCENDENTE. El modelo responde a las situaciones en las que, desde una cantidad más pequeña, se ha de añadir hasta que se iguale con una cantidad mayor.


ESCALERA DESCENDENTE. Es el proceso contrario al anterior. Se parte de una cantidad, de la que hay que retirar una parte desconocida hasta llegar a otra cantidad menor que sí se conoce.

Y luego están las operaciones completamente nuevas y que solo se trabajan en este método. Son doble resta, sumirresta y reparto igualatorio. En total hay ocho operaciones, cuatro veces más que en el cálculo tradicional.

Os las mostramos a continuación.





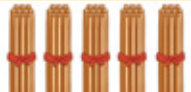



Primero de Primaria

🕒 *Ahora haz restas un poco más difíciles.*



Mira aquí y aprende.

$30 - 10 = 20$ $33 - 10 = 23$ $25 - 20 = 5$
 $20 - 10 = 10$ $26 - 10 = 16$

 $40 - 20 = \square$	 $44 - 20 = \square$	 $30 - 20 = \square$	 $37 - 20 = \square$
 $50 - 30 = \square$	 $54 - 30 = \square$	 $50 - 40 = \square$	 $53 - 30 = \square$

Detracción. Pero aún no se ha introducido la rejilla.

🕒 Fíjate en el patrón y completa las restas.

Y ahora vamos con las restas. Restarás muy rápido si aplicas el patrón.



PATRÓN

$13 - 5 = 8$

$23 - 5 = 18$

$33 - 5 =$

$43 - 5 =$

$53 - 5 =$

$63 - 5 =$

$73 - 5 =$

PATRÓN

$83 - 78 = 5$

$83 - 68 = 15$

$83 - 58 =$

$83 - 48 =$

$83 - 38 =$

$83 - 28 =$

$83 - 18 =$

PATRÓN

$12 - 4 = 8$

$22 - 4 = 18$

$22 - 14 =$

$32 - 14 =$

$32 - 24 =$

$42 - 4 =$

$42 - 14 =$

El trabajo con patrones ayuda mucho a la mejora del cálculo mental.

Así restamos 51 menos 32 con una tabla numérica:

Marca el 51.

$51 - 32$

Sube 3 filas y...

...retrocede 2 casillas.

$51 - 32 = 19$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

🕒 Y ahora tú. Resuelve.

A una excursión hemos ido 85 niños y niñas. Éramos 48 niñas. ¿Cuántos niños iban?

Iban niños.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Otro aspecto importante que se trabaja en primero es la identificación de los procesos de las operaciones con las herramientas (en este caso la tabla del cien) que ya sabe manejar el alumnado.

Estamos en el 56. ¿Cuánto falta para llegar a 100?

- Marca el 56.
 - ¿Con cuántas casillas llegamos a la siguiente decena? $\rightarrow 4$
 - ¿Cuántas decenas hay hasta llegar a 100? $\rightarrow 4 \text{ D} = 40 \text{ U}$
- Desde 56 hasta 100 avanzamos $4 + 40 = 44$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



56 y 44 es una pareja de amigos del 100.

Con la misma herramienta, ahora se trabaja el modelo de escalera ascendente. Es una buena forma de hacer notorias las diferencias entre unos modelos y otros.

¿Cuánto hay que retroceder desde 100 hasta 35?

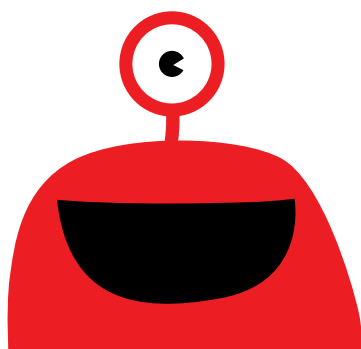
- Marca el 35.
 - Cuenta las decenas completas que hay desde 100 hasta 35. $\rightarrow 6 \text{ D} = 60 \text{ U}$
 - Retrocede las unidades que hay hasta llegar a 35. $\rightarrow 5$
- Desde 100 hasta 35 hay que retroceder $60 + 5 = 65$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



35 y 65 es una pareja de amigos del 100.

Como en el caso anterior, pero ahora con el modelo de escalera descendente.



Resuelve con una doble resta.

1 Tengo 100 euros y compro:

Me ha sobrado:

100 - 30 - 40

2 Tengo:

40 lápices

¿Cuántos lápices negros hay?

Hay lápices negros.

La doble resta es una operación exclusiva del método ABN. Permite realizar a la vez dos o más sustracciones. Se introduce ya en 1.º.

Resuelve.

1 Fíjate en el dibujo. ¿Cuántos puntos ha hecho?

30 + 35 - 15

2 En clase somos 24.
Se van 14 y vienen 3 más.
¿Cuántos somos ahora?
Ahora somos .

Practica la «sumirresta» con números más difíciles.

8 + 25 - 12

24 - 10 + 35

100 - 70 + 4

Otra operación exclusiva. Las sumirrestas. Es decir, la realización simultánea de una operación de sumar y otra de restar.

- ⦿ Haz las siguientes operaciones. Con los resultados, construye el puzle que puedes encontrar al final del libro (página 211).

$48 \leftrightarrow 16$ 	$64 \leftrightarrow 32$
$93 \leftrightarrow 31$ 	$87 \leftrightarrow 47$

La otra operación exclusiva es el reparto igualatorio. Consiste en que la cantidad mayor tiene que ceder a la menor hasta que ambas se igualen.

Segundo de Primaria

- ⦿ Opera y colorea según las claves.

$134 - 78$ 	$178 - 89$ 	$121 - 54$ 	$176 - 98$
$160 - 19$ 	$125 - 16$ 	$140 - 16$ 	$160 - 57$
$165 - 29$ 	$160 - 14$ 	$130 - 48$ 	$154 - 75$
$135 - 58$ 	$137 - 49$ 	$117 - 49$ 	$153 - 28$

En segundo, las rejillas y las cantidades de tres cifras van apareciendo poco a poco.

- ❶ Descubre el patrón en cada caso y colorea los resultados siguiendo el camino hasta llegar al nido.



❶

$$900 - 664 = 236$$

$$800 - \square = 236$$

$$700 - \square = 236$$

$$600 - \square = 236$$

$$500 - \square = 236$$

❷

$$700 - \square = 544$$

$$600 - \square = 544$$

$$800 - \square = 544$$

$$900 - \square = 544$$

$$1000 - \square = 544$$

❸

$$800 - \square = 257$$

$$700 - \square = 257$$

$$600 - \square = 257$$

$$500 - \square = 257$$

$$400 - \square = 257$$

❶

$$779 - 258 = 521$$

$$779 - 358 = \square$$

$$779 - 458 = \square$$

$$779 - 558 = \square$$

$$779 - 658 = \square$$

❷

$$654 - 121 = \square$$

$$754 - 121 = \square$$

$$654 - 221 = \square$$

$$854 - 121 = \square$$

$$854 - 521 = \square$$

❸

$$318 - 227 = \square$$


$$418 - 227 = \square$$

$$518 - 227 = \square$$

$$718 - 327 = \square$$

$$618 - 127 = \square$$

Más patrones, adaptados a las nuevas cantidades.



Tienes 0,38 €. ¿Cuánto te falta para llegar a 1€?

❶ Añade 2 céntimos (0,02 €) para llegar a 40 céntimos (0,40 €).


❷ Añade 60 céntimos (0,60 €) para llegar a 100 céntimos (1 €).

❸ Suma las cantidades añadidas.

Para llegar a 1 € desde 0,38 €, has añadido 0,62 €.

De 0,38 € a 1 €	
❶ 0,02 €	0,40 €
❷ 0,60 €	1,00 €
❸ Total: 0,62 €	

0,38 € y 0,62 € son una pareja de amigos del euro.



- ❷ Y ahora tú. Calcula en escalera ascendente.


De 0,35€ a 1€	
Total: €	

De 0,67€ a 1€	
Total: €	

De 0,18€ a 1€	
Total: €	

De 0,92€ a 1€	
Total: €	

El trabajo con los diferentes modelos de sustracción no es teórico, sino que tiene un enfoque práctico. Como se ve en esta imagen, se aplica el formato de escalera ascendente a situaciones en las que se emplea el dinero y que son asimilables a algo tan habitual como son «las vueltas» en las compras.



¿Cuántas semillas tengo que pasar de una bolsa a la otra si quiero plantar la misma cantidad de semillas en cada jardín?

324 188

Pasamos cantidades del número mayor al menor, teniendo cuidado para que en la columna del mayor siempre haya más que en la del menor.

Si se pasan 68 semillas, cada bolsa tendrá 256.

	324	←	188
12	312	12	200
6	306	6	206
50	256	50	256
68			256

Otro ejemplo de reparto igualatorio con cantidades adecuadas al curso en el que están los niños.

Tercero de Primaria

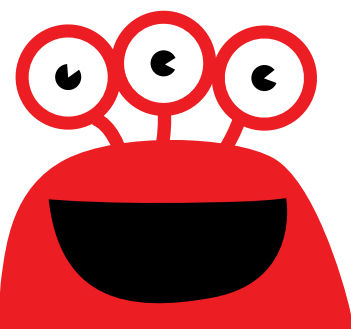
Calcula con centenas, decenas y unidades.

Hazlo así: $2C 4D 1U + 12D 3U = 2C 16D 4U = 3C 6D 4U = 364$



3C 2D 1U + 25D 2U	4C 3D 5U - 2C 2D 2U
5C 3D 15U + 2C 1D 2U	3C 2D 1U - 20D 10U
4C 21D + 4D 6U	5C 5D 5U - 2D 104U
12D 5U + 5D 203U	12C 20D 15U - 3C 15D 6U
1C 10U + 10D 12U	420D 30U - 2C 10U

No solo se aprende a operar con los números, sino a escribir estos en sus órdenes de magnitud.





Observa cómo puedes restar cantidades temporales por *destracción* y por *comparación*.

DETRACCIÓN

Un partido dura 1 h y 30 min. Ya han transcurrido 63 min. ¿Cuántos minutos quedan?

1 h 30 min – 63 min		
30 min	1 h	33 min
30 min	30 min	3 min
3 min	27 min	0 min

1 h = 60 min
1 min = 60 s

Al partido le quedan 27 minutos.

COMPARACIÓN

Una obra de teatro dura 2 h y 12 min, y una película 1 h y 20 min. ¿Cuánto tiempo más dura la obra que la película?

	2 h 12 min	1 h 20 min
1 h 10 min	1 h 2 min	10 min
10 min	1 h	8 min
8 min	52 min	0 min

La obra dura 52 minutos más que la película.

Y también se aplica a las operaciones con unidades de tiempo. La primera operación es de *destracción*, y la segunda, de *comparación*.

Quinto de Primaria

Para restar

Para restar, también puedes hacerlo mentalmente o con la rejilla. Vamos a verlo con ejemplos:

$$7125 - 3 \text{ UM } 16 \text{ C } 25 \text{ D } 38 \text{ U}$$

Para este primer ejemplo recuerda agrupar los mismos órdenes de magnitud.

7125 – 3 UM 16 C 25 D 38 U		
4 UM 25 U	3100	6 C 25 D 13 U
8 C	2300	5 D 13 U
6 D	2240	3 U
3 U	2237	0



$$6 \text{ UM } 36 \text{ C } 20 \text{ D } 78 \text{ U} - 2384$$

Con el segundo ejemplo vamos a verlo de la otra manera (al revés).

2384 – 6 UM 36 C 20 D 78 U		
2300	84	4 UM 33 C 20 D 78 U
8 D 4 U	0	4 UM 33 C 12 D 74 U
7494		

Resto 4 UM (que formo a partir de 3 UM y de la 1 UM de las 16 C), así como 25 U. Es lo mismo que restar $7125 - 4025$.

Resto 8 C (que formo a partir de las 6 C y las 2 C de las 25 D), que es como restar $3100 - 800$.

Resto 6 D (que formo a partir de 5 D y 1 D de las 13 U), que es como restar $2300 - 60$.

Por último, resto las 3 U que quedaban.

De los 2384 resto 2300 que son 2 UM y 3 C.

Resto todo lo que queda, 8 D y 4 U, pues hay suficientes D y U para poder quitarlo todo.

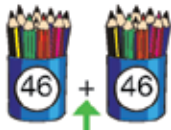
Aquí ya aparecen técnicas más complejas y afinadas. Son operaciones mixtas, en las que un término se expresa en órdenes de magnitud y el otro en cifras.

MULTIPLICAR... ES OTRA COSA

Puesto que no se trata solo de que el formato de la operación sea diferente; sino que es distinto todo lo demás: los conceptos que están detrás, los problemas que resuelve, las preguntas a las que contesta, la expansión y la extensión de los resultados que se obtienen, la conexión con el resto de las operaciones (especialmente, la división), las fórmulas de abreviación. Es otro mundo. No tiene nada que ver.

Primero de Primaria

Si sabes hallar el doble, sabes multiplicar por dos. Observa.



¿Cuántos hay?
Hay el doble de 46.
Hay $46 + 46$.
Hay 46×2 .

1 Descomponemos el número 46.


46×2	
40	80
6	12
	92

2 Hallamos el doble de las decenas y el doble de las unidades.

3 Por último, sumamos los resultados.

Las primeras multiplicaciones ya se formalizan en primero. Normalmente, si los niños que llegan a este curso han trabajado ABN en Infantil, saben multiplicar por dos y por cinco, aunque de manera informal. Saben hallar los dobles y establecer la relación uno a dos, y conocen el número de dedos que tienen cualquier número de manos.

Si sabes sumar un número 5 veces, sabes multiplicar por 5.



¿Cuántos hay?
Hay $12 + 12 + 12 + 12 + 12$.
Hay 12×5 .

1 Descomponemos el número 12.

12×5	
10	50
2	10
	60

2 Sumamos 5 veces las decenas y sumamos 5 veces las unidades.

3 Por último, sumamos los resultados.

La secuencia del cinco es adquirida por los alumnos con gran facilidad. Por ello, la empleamos como hemos hecho con los dobles.

Segundo de Primaria

El curso pasado aprendiste a sumar números con los dedos. Los números 6, 7, 8 y 9 los representabas con los dedos de una sola mano, eliminando los 5 dedos de una de ellas, como ves aquí.

6 seis

7 siete

8 ocho

9 nueve

También puedes usar los dedos para aprender parte de las tablas de multiplicar del 6, del 7, del 8 y del 9. Fíjate bien cómo lo puedes hacer.

¿Cuánto es 8×7 ?

8×7	8×7	8×7
	$3 + 2 = 5 \rightarrow 5 \text{ D}$ $2 \times 3 = 6$ 50	$50 + 6 = 56$ $8 \times 7 = 56$
Represento 8 y 7. Cada dedo extendido representa una decena, y cada dedo oculto, una unidad.	Sumo los extendidos y multiplico los ocultos.	Sumo ambos resultados.

Recuerda que este truco solo sirve cuando los dos factores son 6, 7, 8 o 9. No vale, por ejemplo, para 6×4 o para 9×2 .

Las tablas de multiplicar se abordan de manera sistemática en 2.º. Los alumnos ABN alcanzan un enorme dominio. En el aprendizaje inicial, y para los productos más difíciles, se rescata una forma de averiguarlos con los dedos cuyo origen y práctica se remonta a la Baja Edad Media.



- ⦿ Haz las operaciones y anota la palabra que corresponda según las claves. Descubrirás una frase de un poeta famoso.

34×7	54×7	42×7	53×7
98×7	78×7	69×7	86×7
136×7	128×7	137×7	129×7

Ten cuidado, hay números que no corresponden a ninguna solución.

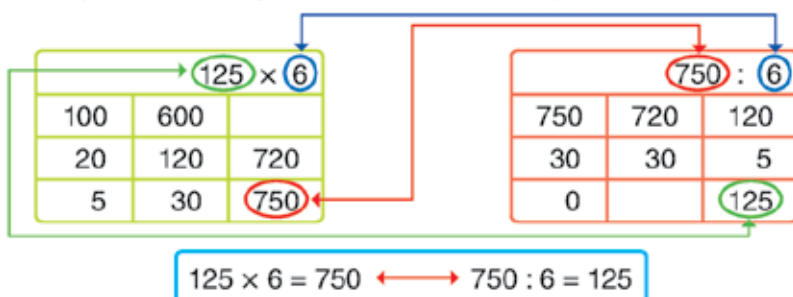
CLAVES

189 Yo	371 las	546 pero	896 la
238 Podrán	378 cortar	602 podrán	903 Pablo Neruda
294 todas	483 no	686 flores,	952 detener
358 rosas	488 Rafael Alberti	848 Manuel Machado	959 primavera.

Una vez aprendida la tabla, se trabaja para ayudar a su memorización, asociando su práctica a juegos y a acertijos.



Observa que la división y la multiplicación son operaciones relacionadas.



⦿ Completa la relación entre la multiplicación y la división en cada caso.

<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> 141×7 <table border="1" style="width: 100%; height: 40px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> \longleftrightarrow $987 : 7 = \square$ </div>										<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> 231×3 <table border="1" style="width: 100%; height: 40px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> \longleftrightarrow $693 : 3 = \square$ </div>									
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $836 : 4$ <table border="1" style="width: 100%; height: 40px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> \longleftrightarrow $209 \times 4 = \square$ </div>										<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> $345 : 5$ <table border="1" style="width: 100%; height: 40px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> </div> <div style="display: flex; align-items: center;"> \longleftrightarrow $69 \times 5 = \square$ </div>									

La conexión entre la multiplicación y la división.

<p>4 $\times 7$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td>700</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>210</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>49</td><td></td></tr> </table>		700			210			49		<p>5 $\times 8$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>160</td><td>960</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>992</td></tr> </table>					160	960			992	<p>6 $\times 9$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>990</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>999</td></tr> </table>						990			999									
	700																																					
	210																																					
	49																																					
	160	960																																				
		992																																				
		990																																				
		999																																				
<p>7 $: 3$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td>300</td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td>30</td><td>10</td></tr> <tr><td></td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>		300	100		30	10		6	2	0			<p>8 $: 4$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td>400</td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td>40</td><td>10</td></tr> <tr><td></td><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>		400	100		40	10		8	2	0			<p>9 $: 6$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td>600</td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td>60</td><td>10</td></tr> <tr><td></td><td>60</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>		600	100		60	10		60	10	0		
	300	100																																				
	30	10																																				
	6	2																																				
0																																						
	400	100																																				
	40	10																																				
	8	2																																				
0																																						
	600	100																																				
	60	10																																				
	60	10																																				
0																																						
<p>10 $: 3$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>			100			100			7	0			<p>11 $: 5$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td>100</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>20</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>7</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>			100			20			7	0			<p>12 $: 4$</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td>200</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>20</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table>			200			20			2	0		
		100																																				
		100																																				
		7																																				
0																																						
		100																																				
		20																																				
		7																																				
0																																						
		200																																				
		20																																				
		2																																				
0																																						

Saber completar estas operaciones implica dominar las equivalencias entre el producto y la división.

Resolvemos problemas con multiplicaciones

Fíjate en el problema de Daniel y en cómo lo ha resuelto:



He plantado 1 483 semillas de cacao en cada huerto. Si tengo 4 huertos, ¿cuántas semillas planté en total?

1 483 × 4		
1 000	4 000	
400	1 600	5 600
80	320	5 920
3	12	5 932

Planté 5 932 semillas en total.



Ahora, lee las preguntas que se le han ocurrido a Daniel. Sus respuestas ya están en la tabla o se deducen fácilmente.

¿Cuántas semillas se habrían plantado en total si se sustituye 1 483 por 1 400?

R: 5 600 semillas

¿Y si se hubieran plantado 1 080 en cada huerto?

R: 4 320 semillas

¿Y si se hubieran plantado 403 en cada huerto?

R: 1 612 semillas

Si el total de semillas plantadas fuese 5 920, ¿cuántas semillas se habrían plantado en cada huerto?

R: 1 480 semillas



Hacer una operación de multiplicar es resolver muchos problemas. He aquí un ejemplo.

Multiplicamos por dos cifras



Fíjate: multiplicar un número por 32 es lo mismo que multiplicar el número por 30, multiplicarlo por 2 y sumar los resultados. ¿Te has dado cuenta de que $32 = 30 + 2$?

$$8 \times 32 \rightarrow 256$$

$$8 \times 30 + 8 \times 2 = 240 + 16 \rightarrow 256$$



Realiza estas multiplicaciones:

6×21	2×33	7×24	3×28
$6 \times 20 + 6 \times 1$	$2 \times 30 + 2 \times 3$	$7 \times 20 + 7 \times 4$	$3 \times 20 + 3 \times 8$

En este curso, los alumnos y las alumnas se inician en la multiplicación por dos cifras en el multiplicador.

Producto «rápido»

Si se te da bien hacer cálculos, puedes hacer multiplicaciones como la de la página anterior sin descomponer el segundo factor.



1

648×23	
\times	23
600	13800
40	
8	

1 Descompón: $648 = 600 + 40 + 8 = 6 \text{ C} + 4 \text{ D} + 8 \text{ U}$
 Multiplica mentalmente 6 C por 20 y por 3, y suma:
 $120 \text{ C} + 18 \text{ C} = 138 \text{ C} = 13800$

2

648×23	
\times	23
600	13800
40	920
8	14720

2 Multiplica 4 D por 20 y por 3, y suma:
 $80 \text{ D} + 12 \text{ D} = 92 \text{ D} = 920$
 Suma este resultado al anterior:
 $13800 + 920 = 14720$



3

648×23	
\times	23
600	13800
40	920
8	184
	14904

3 Multiplica mentalmente 8 U por 20 y por 3, y suma:
 $160 \text{ U} + 24 \text{ U} = 184 \text{ U} = 184$
 Suma este resultado al anterior: $14720 + 184 = 14904$
 Este es el resultado final, 14904.

Multiplicamos sin descomponer el multiplicador

¿Recuerdas cómo hacías el «producto rápido»?

Los términos de una multiplicación son multiplicando, multiplicador y producto.

MULTIPICANDO MULTIPLICADOR
 $3568 \times 32 = 114176$
 PRODUCTO

3568×32			3568×32			3568×32		
\times	32		\times	32		\times	32	
3000	96000		3000	96000		3000	96000	
500			500	16000	112000	500	16000	112000
60			60	1920	113920	60	1920	113920
8			8			8	256	114176

Realiza estas multiplicaciones utilizando el producto rápido:

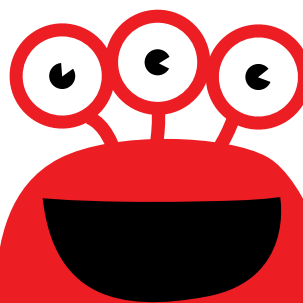
1261×14 • 2314×21 • 5005×13

6874×27 • 2321×37 • 5357×71

5849×79 • 6881×96 • 7869×87



El formato que se termina trabajando es idéntico al del producto por una cifra. Es muy simple y los niños lo asimilarán con rapidez.



Multiplicación al revés

Seguimos trabajando con las multiplicaciones. Ahora vamos a hacerlas al revés. Observa en este ejemplo cómo encontramos el multiplicando.



... × 8		
	48 000	
		50 400
		50 560
		50 624

Partiendo de los productos parciales finales, reconstruiremos la operación ... × 8 paso a paso. Los números de la columna central se obtienen multiplicando un número por 8.

... × 8		
6 000	48 000	
		50 400
		50 560
		50 624

48 000 se obtiene multiplicando 8 por 6 000; $6\,000 \times 8 = 48\,000$. Pon ese dato en su lugar, en la primera columna.

... × 8		
6 000	48 000	
300	2 400	50 400
		50 560
		50 624

Para llegar a 50 400 se han tenido que añadir 2 400 a 48 000. Y 2 400 se obtiene multiplicando 8 por 300: $300 \times 8 = 2\,400$. Pon cada número en su lugar.

... × 8		
6 000	48 000	
300	2 400	50 400
20	160	50 560
		50 624

Para llegar a 50 560 se han tenido que añadir 160 a 50 400. Y 160 se obtiene multiplicando 8 por 20: $20 \times 8 = 160$. Escribe cada número en su lugar.

6 328 × 8		
6 000	48 000	
300	2 400	50 400
20	160	50 560
8	64	50 624

Finalmente, para llegar a 50 624 se han tenido que añadir 64 a 50 560. Y $64 = 8 \times 8$. Sumando todos los factores de la primera columna descubres el multiplicando, 6 328.

- Realiza en tu cuaderno las siguientes multiplicaciones al revés. No tengas prisa, paso a paso, poco a poco y lo lograrás.



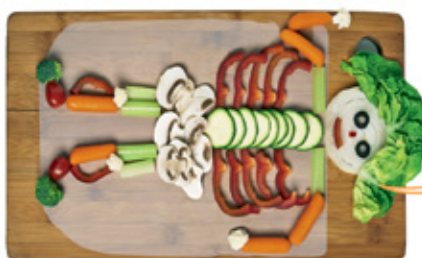
... × 2		
	18 000	
		18 200
		18 320
		18 328

... × 3		
	27 000	
		29 700
		29 970
		29 997

... × 4		
	4 000	
		4 800
		5 000
		5 024

Con la multiplicación al revés, se resuelven divisiones desde el formato del producto. Con ello se favorece el aprendizaje de la estructura multiplicativa como un todo, sin compartimentos estancos.

Multiplicación posicional



Como habrás observado, hay muchas formas de multiplicar. En esta página descubrirás una más. Fíjate en el ejemplo cuando el multiplicador tiene una cifra.

1 Multiplica cada orden de unidad y escribe el resultado en su lugar.

428 × 6				
	C	D	U	
6 ×	4	2	8	
	24	12	48	

2 Agrupa todas las centenas, las decenas y las unidades.

428 × 6				
	C	D	U	
6 ×	4	2	8	
	24	12	48	
	25	6	8	

3 Escribe el resultado final.
 $428 \times 6 = 2568$

428 × 6				
	C	D	U	
6 ×	4	2	8	
	24	12	48	
	25	6	8	
				2568

Aparece un formato nuevo, que simplificará los cálculos y ahorrará mucha escritura.

158,6 × 7					
	C	D	U	d	
7 ×	1	5	8	6	
	7	35	56	42	

158,6 × 7					
	C	D	U	d	
7 ×	1	5	8	6	
	7	35	56	42	
	10	10	10	2	

158,6 × 7					
	C	D	U	d	
7 ×	1	5	8	6	
	7	35	56	42	
	10	10	10	2	
	11	1	0	2	
					1110,2

64,27 × 36					
	D	U	d	c	
36 ×	6	4	2	7	
	216	144	72	252	

64,27 × 36					
	D	U	d	c	
36 ×	6	4	2	7	
	216	144	72	252	
	230	11	27	2	

64,27 × 36					
	D	U	d	c	
36 ×	6	4	2	7	
	216	144	72	252	
	230	10	27	2	
	231	3	7	2	
					2313,72

También el formato es válido para los decimales.

Patrones en la multiplicación

Fíjate en estos patrones especiales cuando alguno de los factores es 10, 100, 1 000...



- Resuelve y observa lo que ocurre con la coma decimal.

$$1\,000 \times 73 = 73\,000 \quad 100 \times 73 \quad 10 \times 73 \quad 1 \times 73 \quad 0,1 \times 73 \quad 0,01 \times 73$$

- Averigua por qué número hemos multiplicado en cada caso.

$$\dots \times 58 = 580 \quad \dots \times 58 = 5\,800 \quad \dots \times 58 = 58\,000 \quad \dots \times 58 = 5,8 \quad \dots \times 58 = 58$$

- Y ahora, al revés. Calcula el multiplicando en tu cuaderno.

$$\dots \times 1\,000 = 34\,000 \quad \dots \times 1\,000 = 340\,000 \quad \dots \times 1\,000 = 3\,400 \quad \dots \times 1\,000 = 340\,000$$

- Multiplica fijándote en el patrón.

A

$$\begin{aligned} 35 \times 6 &= 210 \\ \dots \times 60 &= 210 \\ 3,5 \times \dots &= 210 \\ 0,35 \times \dots &= 210 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} 350 \times 6 &= 2\,100 \\ \dots \times 600 &= 2\,100 \\ 35 \times \dots &= 2\,100 \\ 3,5 \times \dots &= 2\,100 \end{aligned}$$



C

$$\begin{aligned} 3\,500 \times 6 &= 21\,000 \\ \dots \times 600 &= 21\,000 \\ \dots \times 60 &= 21\,000 \\ \dots \times 6\,000 &= 21\,000 \end{aligned}$$

Patrones en la multiplicación.

Dos formas de multiplicar

«CRECIENTE» DEL PRODUCTO DE MENOR A MAYOR



Vamos a multiplicar 452×6 poco a poco, empezando por 2×6 y haciéndolo crecer hasta el resultado final. Fíjate cómo lo hacemos.

$$2 \times 6 = 12$$

Multiplicamos $2 \times 6 = 12$.

$$50 \times 6 = 300$$

Ahora, multiplicamos $50 \times 6 = 300$, y sumamos $300 + 12 = 312$.

$$400 \times 6 = 2\,400$$

Multiplicamos $400 \times 6 = 2\,400$, y sumamos $2\,400 + 312 = 2\,712$.

$$452 \times 6 = 2\,712$$

El resultado de multiplicar 452×6 es 2 712.

- Ahora tú. Practica estos «crecientes» del producto:

A

$$\begin{aligned} 8 \times 3 \\ 48 \times 3 \\ 348 \times 3 \\ 2\,348 \times 3 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} 1 \times 7 \\ 61 \times 7 \\ 261 \times 7 \\ 1\,261 \times 7 \end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned} 4 \times 5 \\ 94 \times 5 \\ 894 \times 5 \\ 2\,894 \times 5 \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} 4 \times 8 \\ 44 \times 8 \\ 444 \times 8 \\ 4\,444 \times 8 \end{aligned}$$

Crecientes. Otra forma de trabajar el cálculo mental.

Multiplicación con decimales (en un factor)

Vamos a multiplicar... ¡con decimales! Y lo vamos a hacer igual que sin ellos.

A En el multiplicando

Formato ABN

$6,34 \times 23$		
$\times 23$		
6	138	
0,30	6,9	144,90
0,04	0,92	145,82

- 1 Descomponemos el multiplicador teniendo en cuenta los decimales, multiplicamos por 23 cada término y hacemos la suma parcial.
- 2 Hacemos la suma total y obtenemos el resultado.

Formato posicional

				822,4 × 35
	8 C	2 D	2 U	4 d
× 35	280	70	70	140

				822,4 x 35
	8 C	2 D	2 U	4 d
x 35	280	70	70	140
	287	8	4	0
28784				

B En el multiplicador

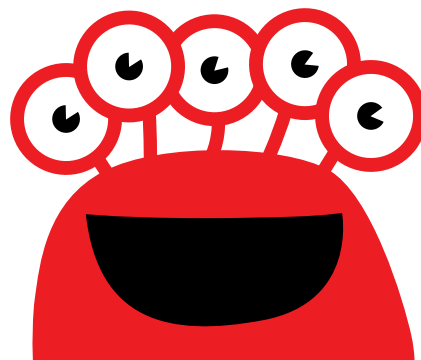
Formato ABN

$3954 \times 0,8$		
$\times 0,8$		
3000	2400	
900	720	3120
50	40	3160
4	3,2	3163,2

Formato posicional

					3954 × 0,8
× 0,8	3 UM	9 C	5 D	4 U	d
	2,4	7,2	4	3,2	
	2	11	6	3,	2
3163,2					

Quinto es ya un curso elevado, y el tratamiento del producto alcanza mayores niveles de formalización. En este caso, se multiplica con decimales en uno u otro factor, y en uno u otro formato.



Patrones en la multiplicación

Observa cómo se comportan los productos con decimales y ceros.

$$5\,000 \times 600 = 3\,000\,000$$

$$5\,000 \times 60 = 300\,000$$

$$5\,000 \times 6 = 30\,000$$

$$5\,000 \times 0,6 = 3\,000$$

● Copia y repite los patrones. Fíjate en el ejemplo.

A

$$\begin{aligned} 7\,000 \times 700 &= 4\,900\,000 \\ 7\,000 \times 70 &= 490\,000 \\ 7\,000 \times 7 &= 49\,000 \\ 7\,000 \times 0,7 &= 4\,900 \\ 7\,000 \times 0,07 &= 490 \\ 700 \times 0,07 &= 49 \\ 70 \times 0,07 &= 4,9 \\ 7 \times 0,07 &= 0,49 \\ 0,7 \times 0,07 &= 0,049 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} 7\,000 \times 800 &= 5\,600\,000 \\ 7\,000 \times 80 &= \dots \\ 7\,000 \times 8 &= \dots \\ 7\,000 \times 0,8 &= \dots \\ 7\,000 \times 0,08 &= \dots \\ 700 \times 0,08 &= \dots \\ 70 \times 0,08 &= \dots \\ 7 \times 0,08 &= \dots \\ 0,7 \times 0,08 &= \dots \end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned} 600 \times 0,3 &= 180 \\ 60 \times 0,3 &= \dots \\ 6 \times 0,3 &= \dots \\ 0,6 \times 0,3 &= \dots \\ 0,06 \times 0,3 &= \dots \\ 600 \times 0,03 &= \dots \\ 60 \times 0,03 &= \dots \\ 6 \times 0,03 &= \dots \\ 0,6 \times 0,03 &= \dots \end{aligned}$$

● Resuelve en tu cuaderno estas multiplicaciones, por la unidad seguida de ceros:

A

$$\begin{aligned} 1\,000 \times 100 &= 100\,000 \\ 1\,000 \times 10 &= 10\,000 \\ 1\,000 \times 1 &= 1\,000 \\ 1\,000 \times 0,1 &= 100 \\ 1\,000 \times 0,01 &= 10 \\ 100 \times 0,01 &= 1 \\ 10 \times 0,01 &= 0,1 \\ 1 \times 0,01 &= 0,01 \\ 0,1 \times 0,01 &= 0,001 \end{aligned}$$

B

$$\begin{aligned} 10\,000 \times 100 &= \dots \\ 10\,000 \times 10 &= \dots \\ 10\,000 \times 1 &= \dots \\ 10\,000 \times 0,1 &= \dots \\ 10\,000 \times 0,01 &= \dots \\ 1\,000 \times 0,1 &= \dots \\ 100 \times 0,1 &= \dots \\ 10 \times 0,1 &= \dots \\ 0,1 \times 0,1 &= \dots \end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned} 0,001 \times 1 &= \dots \\ 0,001 \times 10 &= \dots \\ 0,001 \times 100 &= \dots \\ 0,001 \times 1\,000 &= \dots \\ 0,001 \times 10\,000 &= \dots \\ 0,1 \times 1 &= \dots \\ 0,1 \times 10 &= \dots \\ 0,1 \times 100 &= \dots \\ 0,1 \times 1\,000 &= \dots \end{aligned}$$

Con el uso de patrones se pretende expandir o extender un resultado conocido a otros muchos. Son ejercicios en los que no hay que hacer cálculos, sino deducir el nuevo resultado por los cambios que se producen entre el modelo resuelto y el que se propone.

Multiplicación con decimales

El producto con decimales se hace igual que sin decimales en la cuadrícula ABN. Fíjate cómo la parte decimal ocupa su lugar en la descomposición.

Observa lo que ocurre al multiplicar con ceros y al multiplicar con decimales en ambos productos.

2368,50 × 2,3		
2000	4600	
300	690	5290
60	138	5428
8	18,4	5446,4
0,50	1,15	5447,55

2368,50 × 2,03		
2000	4060	
300	609	4669
60	121,8	4790,8
8	16,24	4807,04
0,50	1,015	4808,055

Casos específicos y de mayor dificultad se tratan de forma que sean fáciles de discriminar. En el ejemplo de arriba, tan solo cambia la cifra de las décimas. Línea a línea se va viendo lo que ocurre al aplicar ese pequeño cambio.

Casos especiales

Caso 1: El multiplicador tiene unidades y centésimas

$$423 \times 6,04$$

- 1 Se colocan los números según sus órdenes de magnitud.
- 2 Se multiplica cada orden de magnitud conforme sabemos.
- 3 Se hacen los reajustes, teniendo en cuenta la parte decimal de cada orden de magnitud.

	C	D	U	d	c
	4	2	3		
$\times 6,04$	24,16	12,08	18,12		
	25	4	14	9	2
	2554,92				

Caso 2: El multiplicando tiene décimas y el multiplicador, unidades y centésimas

$$42,3 \times 2,08$$

- 1 Se colocan los números según sus órdenes de magnitud.
- 2 Se multiplica cada orden de magnitud conforme sabemos.
- 3 Se hacen los reajustes, teniendo en cuenta la parte decimal de cada orden de magnitud.

	D	U	d	c	m
	4	2	3		
$\times 2,08$	8,32	4,16	6,24		
	8	7	9	8	4
	87,984				

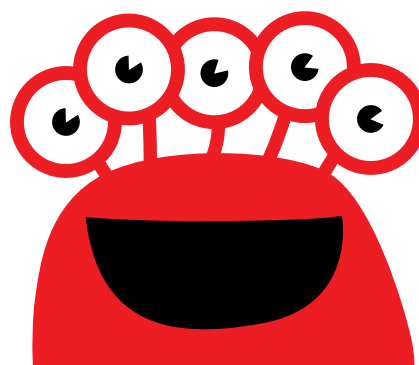
Caso 3: El multiplicador solo tiene parte decimal

$$152,2 \times 0,78$$

- 1 Se colocan los números según sus órdenes de magnitud.
- 2 Se multiplica cada orden de magnitud conforme sabemos.
- 3 Se hacen los reajustes, teniendo en cuenta la parte decimal de cada orden de magnitud.

	C	D	U	d	c	m
	1	5	2	2		
$\times 0,78$	0,78	3,9	1,56	1,56		
		10	18	6	11	6
		118,716				

En el caso del producto posicional se hace un tratamiento específico de cada uno de los casos que se pueden presentar, atendiendo a sus dificultades específicas.



Trucos mágicos para multiplicar (I)

Truco 1: Producto de dos factores cercanos a 100 → 89×94

Se obtiene un producto de cuatro cifras.

- 1 Se hallan las diferencias a cien de ambos factores (11 y 6).
- 2 Al número menor se le resta la diferencia a cien del número mayor ($89 - 6 = 83$). Esas son las dos primeras cifras.
- 3 Se multiplican las diferencias ($11 \times 6 = 66$). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 8366.



Truco 2: Producto de dos factores cercanos a 1000 → 992×996

Se obtiene un producto de seis cifras.

- 1 Se hallan las diferencias a mil de ambos factores (8 y 4).
- 2 Al número menor se le resta la diferencia a mil del número mayor ($992 - 4 = 988$). Esas son las tres primeras cifras.
- 3 Se multiplican las diferencias ($8 \times 4 = 32$). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 988032.



Truco 3: Producto de un factor cercano a 1000 y otro a 100 → 989×98

Se obtiene un producto de cinco cifras.

- 1 Se hallan las diferencias a mil y a cien de ambos factores (11 y 2).
- 2 Al número mayor se le resta la diferencia, a cien, en decenas, del número menor ($989 - 2 \text{ D} = 969$). Esas son las tres primeras cifras.
- 3 Se multiplican las diferencias ($11 \times 2 = 22$). Esas son las dos últimas cifras.

El producto buscado es 96922.



Truco 4: Producto de un factor cercano a 1000 y otro a 10 → 998×8

Se obtiene un producto de cuatro cifras.

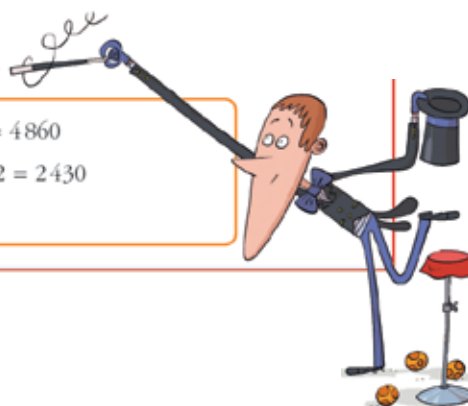
- 1 Se hallan las diferencias a mil y a diez de ambos factores (2 y 2).
- 2 Al número mayor se le resta la diferencia, a diez, en centenas, del número menor ($998 - 2 \text{ C} = 798$). Estas son las tres primeras cifras.
- 3 Se multiplican las diferencias de ambos números ($2 \times 2 = 4$). Esta es la última cifra del producto.

El producto buscado es 7984.



Truco 5: Multiplicar por 5 → 486×5

- 1 El multiplicando se multiplica por 10. $486 \times 10 = 4860$
- 2 Se halla la mitad del producto obtenido. $4860 : 2 = 2430$
El producto buscado es 2430.

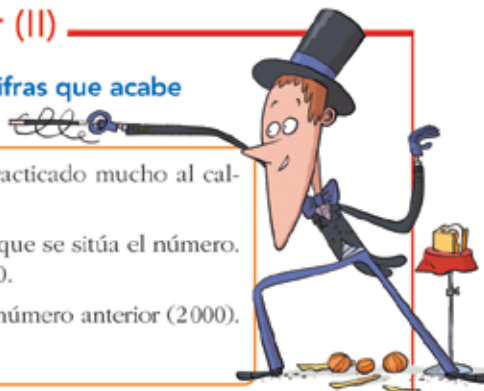


Trucos mágicos para multiplicar (II)

Truco 6: El cuadrado de un número de dos cifras que acabe en cinco → 45^2

Este caso ya lo conoces muy bien, pues lo has practicado mucho al calcular los cuadrados de «semidecenas».

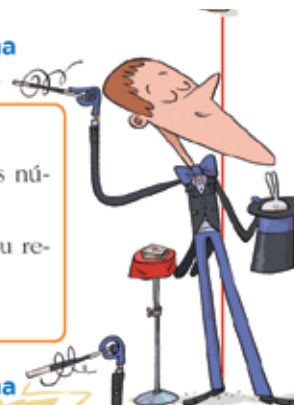
- 1 Se multiplican las decenas completas entre las que se sitúa el número. 45 está entre 40 y 50. Por tanto: $40 \times 50 = 2000$.
- 2 Se halla el cuadrado de 5 (25), que se añade al número anterior (2000).
El resultado es: $45^2 = 2025$



Truco 7: Producto de dos números de dos cifras con la misma decena y cuyas unidades sumen 10 → 44×46

Se obtiene un producto de cuatro cifras.

- 1 Se multiplican las decenas completas entre las que se sitúan los números. 45 y 46 están entre 40 y 50. Por tanto: $40 \times 50 = 2000$.
- 2 Se multiplican las unidades de ambos números ($4 \times 6 = 24$) y su resultado se suma al anterior (2000).
El resultado es: $44 \times 46 = 2024$



Truco 8: Producto de dos números de dos cifras con la misma cifra de unidades y cuyas decenas sumen 10 → 63×43

Se obtiene un producto de cuatro cifras.

- 1 Se multiplican las decenas entre sí: $60 \times 40 = 2400$.
- 2 Se multiplica la cifra de las unidades por cien ($3 \times 100 = 300$), y se suma al número anterior ($2400 + 300 = 2700$).
- 3 Se multiplican las cifras de las unidades ($3 \times 3 = 9$). Se le suma al número anterior y ya tenemos el producto.
El resultado es: $63 \times 43 = 2709$.



Ocho maneras de abreviar el producto, que con el uso de patrones se convierten en... muchísimas.

LA DIVISIÓN Y SUS POSIBILIDADES

La división se ha considerado en el cálculo tradicional una de las operaciones más difíciles. Sin embargo, no nos equivocamos al afirmar que en el cálculo ABN es de las preferidas por los alumnos y las alumnas.

Comienzan su tratamiento ya en Infantil, aunque de manera informal. Y curso a curso van aumentando, en espiral, los contenidos. Parte del éxito tal vez sea que cuando los alumnos abordan una nueva dificultad se han preparado previamente para superarla.

Primero de Primaria

Si sabes hallar la mitad, sabes dividir por dos. Mira cómo se hace.

¿Cuántas hay en cada montón?
La mitad de 28.
Hay $28 : 2$.

1 De 28 cogemos veinte y ponemos diez en cada montón.

28	20	10
8	8	4
0		14

2 De las ocho que quedan, cogemos ocho y ponemos cuatro en cada montón.

3 Ya no quedan gomas. Cada montón tiene catorce gomas.

⊙ Haz las divisiones y escribe el mensaje según las claves.

26 : 2	48 : 2	34 : 2	78 : 2
92 : 2	56 : 2	59 : 2	95 : 2
73 : 2	39 : 2		

El 1 no se puede repartir en dos montones.

CLAVES

13	24	35	46
17	28	39	49
19	29	30	47

13 YA
17 DESPERTADO
19 LLENADO.
24 HE
28 FLORES
29 LOS
35 HE
39 Y
46 DE
47 CAMPOS

Así empiezan en primero: formalizan el concepto de mitades, que han trabajado experiencialmente en Infantil. Muchos de los niños hacen la operación de una vez, escribiendo el resultado directamente.

Segundo de Primaria

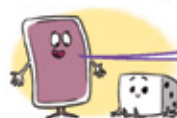
- 🕒 Fíjate en los ejemplos y averigua el número por el que se ha multiplicado en cada caso.



$5 \times 4 = 20$	$30 \times 4 = 120$	$3 \times 5 = 15$	$70 \times 2 = 140$
$4 \times \square = 12$	$50 \times \square = 150$	$\square \times 6 = 30$	$\square \times 4 = 200$
$3 \times \square = 18$	$20 \times \square = 100$	$\square \times 10 = 40$	$\square \times 3 = 210$
$2 \times \square = 18$	$60 \times \square = 240$	$\square \times 9 = 27$	$\square \times 4 = 160$

En los comienzos se aborda también el concepto desde la multiplicación. De acuerdo con la forma de trabajar el método, se trabaja la inversa del producto también con extensiones a decenas completas.

- 🕒 Repartimos cartas entre dos jugadores. ¿Cuántas le tocan a cada uno? Completa.



El número de cartas que se reparten está escrito en verde; y el de jugadores, ya lo ves, en naranja.

$2 \times \square = 18$	$2 \times \square = 22$	$2 \times \square = 26$	$2 \times \square = 36$
$2 \times \square = 180$	$2 \times \square = 220$	$2 \times \square = 260$	$2 \times \square = 360$
$2 \times \square = 40$	$2 \times \square = 44$	$2 \times \square = 46$	$2 \times \square = 48$

- 🕒 Ahora hay que repartir entre distintos números de jugadores. Fíjate bien y completa.



Como antes, el número de jugadores está en naranja y el total de cartas que se reparten, en verde.

$4 \times \square = 24$	$4 \times \square = 36$	$4 \times \square = 48$	$4 \times \square = 120$
$3 \times \square = 15$	$3 \times \square = 21$	$3 \times \square = 27$	$3 \times \square = 120$
$5 \times \square = 35$	$5 \times \square = 50$	$5 \times \square = 90$	$5 \times \square = 100$

Los ejercicios se vuelven cada vez más explícitos. Y no se utiliza un único formato de aproximación.

Vamos a repartir 645 motos para agentes de tráfico entre 3 ciudades.



¿Cuántas motos van a cada ciudad?
A cada ciudad van $645 : 3$ motos.

1 De 645, cogemos seiscientas y damos doscientas a cada ciudad.

	645 : 3		
1	645	→ 600	→ 200
2	45	→ 30	→ 10
3	15	→ 15	→ 5
4	0		→ 215



2 De 45 que quedan, cogemos treinta y damos diez a cada ciudad.

3 De 15 que quedan, cogemos quince y damos cinco a cada ciudad.

4 Ya no quedan motos por repartir. A cada ciudad le han tocado doscientas quince motos.

- Observa que si sumamos los números de la columna central, nos tiene que dar el número total de motos que había que repartir:

$$600 + 30 + 15 = 645 \text{ motos.}$$

Completa las siguientes divisiones:

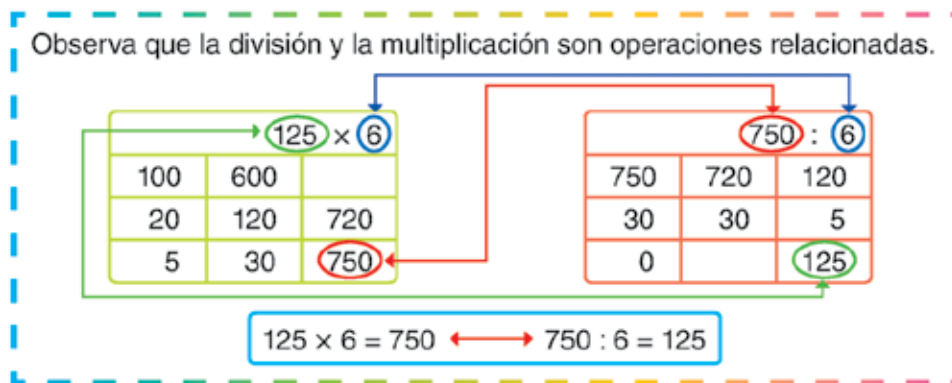
372 : 3		
372	300	
	60	
12		
0		

625 : 5		
625		100
		20
	25	
0		

474 : 2		
	400	
74		30
	14	
0		

Ya en el tercer trimestre se aumenta la formalización y se introducen las divisiones en las que el dividendo tiene tres cifras. Para comprobar, y también ayudar en el dominio del nuevo procedimiento, se utilizan ejercicios de completar.





⦿ Completa la relación entre la multiplicación y la división en cada caso.

141×7		

$\longleftrightarrow 987 : 7 = \square$

231×3		

$\longleftrightarrow 693 : 3 = \square$

$836 : 4$		

$\longleftrightarrow 209 \times 4 = \square$

$345 : 5$		

$\longleftrightarrow 69 \times 5 = \square$

⦿ Invéntate un problema de multiplicar y otro de dividir relacionados.

$42 \times 3 = 126 \longleftrightarrow 126 : 3 = 42$

PROBLEMA DE MULTIPLICAR	
R $\rightarrow 42 \times 3 = 126$	

\longleftrightarrow

PROBLEMA DE DIVIDIR	
R $\rightarrow 126 : 3 = 42$	

Como vimos en la multiplicación, se atiende con especial cuidado a la relación existente entre el producto y la división. En la ilustración se muestran dos tipos de ejercicios.

Dividimos números de cuatro cifras

- ⦿ Observa el ejemplo y haz las divisiones en una rejilla.

$8684 : 2$			
8	6	8	4
8	0	0	0
6	8	4	
8	4		
r = 0			4342

- a) $884 : 2$ e) $3012 : 3$
 b) $2508 : 4$ f) $1555 : 5$
 c) $5972 : 2$ g) $1263 : 3$
 d) $5400 : 4$ h) $7090 : 5$



- ⦿ La familia de Nuria va a pasar unos días en un hotel de la playa. ¿Puedes ayudarla con estos problemas?

A Si por 9 noches de hotel hemos pagado 1 215 €, ¿a cuánto nos sale cada noche?

B El hotel cambia 3 780 toallas en una semana. ¿Cuántas toallas cambiará hoy si todos los días cambia las mismas?

C El hotel gasta 2 268 litros de agua para regar 4 jardines iguales. ¿Cuánta agua utiliza en cada uno?

D Si en ir y volver de mi casa al hotel voy a recorrer 1 298 kilómetros, ¿qué distancia hay entre mi casa y el hotel?

- ⦿ Fíjate en el ejemplo y resuelve mentalmente.



$1200 : 3 = 400$ • $1230 : 3 = 410$ • $1203 : 3 = 401$ • $123 : 3 = 41$

$8800 : 2$ • $8880 : 2$ • $8808 : 2$ • $888 : 2$

$4400 : 4$ • $4040 : 4$ • $4004 : 4$ • $4404 : 4$


$5500 : 5$ • $5550 : 5$ • $5555 : 5$ • $555 : 5$

$1212 : 6$ • $1206 : 6$ • $6012 : 6$ • $120 : 6$

En tercero se comienza a trabajar con dividendos de cuatro cifras. No se olvidan ni la resolución de problemas ni el uso de patrones o series con el fin de facilitar la averiguación del cociente por medio del cálculo mental.

Comprendemos el proceso de la división


Cuatro furgonetas trajeron 864 cajas de fruta al colegio. ¿Cuántas cajas transportó cada una si todas llevaban las mismas?



864 : 4		
864	→ 800	→ 200
64	→ 40	→ 10
24	→ 20	→ 5
4	→ 4	→ 1
r = 0		216

Cada furgoneta transportó 216 cajas.

Observa las preguntas que se nos han ocurrido cuyas respuestas o ya están en la rejilla, o se deducen fácilmente:



Si cada furgoneta hubiera transportado 210 cajas, ¿cuántas cajas habrían traído al colegio en total?

840 cajas

Si hubieran traído 800 cajas en total, ¿cuántas habría transportado cada furgoneta?

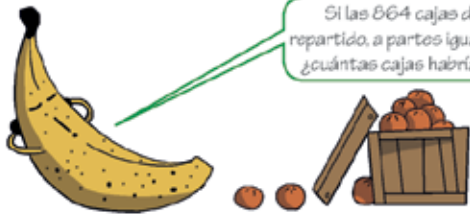
200 cajas

Si entre todas hubieran traído 24 cajas menos, ¿cuántas cajas habría transportado cada furgoneta?

210 cajas

⦿ Ahora tú. Responde a las preguntas fijándote en la rejilla:

Si las 864 cajas de fruta se hubieran repartido, a partes iguales, entre dos colegios, ¿cuántas cajas habrían llegado a cada uno?




864 : 2		
864	→ 800	→ 400
64	→ 60	→ 30
4	→ 4	→ 2
r = 0		432

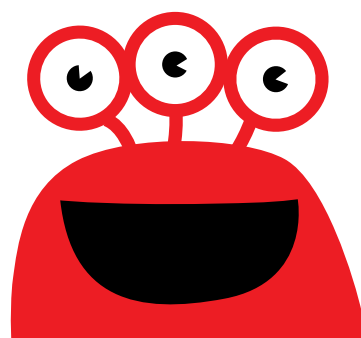
a) Si quedasen por repartir 64 cajas, ¿cuántas cajas tendría cada colegio?

b) ¿Cuántas cajas son necesarias para enviar a cada colegio 402 cajas?

c) Si se hubiesen repartido 402 cajas a cada colegio, ¿cuántas cajas quedarían por repartir?



La mejor forma de verificar la comprensión de los procesos implicados en la división es... preguntando. En la ilustración se muestra el ejemplo y el ejercicio que le sigue.



Hacemos divisiones



DIVIDIMOS CON DECIMALES EN EL DIVIDENDO

Quieres repartir 4,60 € entre 4 amigos. ¿Cuánto le toca a cada uno?

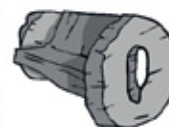
- ① De 4,60 € coges 4 € y das 1 € a cada amigo.
- ② De 0,60 € que quedan por repartir, coges 0,40 € y das 0,10 € a cada uno.
- ③ De 0,20 € que quedan, coges 0,20 € y das 0,05 € a cada amigo.
- ④ Ya no quedan euros por repartir. A cada amigo le tocan 1,15 €.

4,60 : 4		
①	4,60 → 4	→ 1
②	0,60 → 0,40	→ 0,10
③	0,20 → 0,20	→ 0,05
④	r = 0	1,15

- ⊙ Ahora tú. Haz en tu cuaderno las siguientes divisiones:

8,20 : 4 120,12 : 6 12,90 : 3 15,90 : 3 64,16 : 8 70,16 : 8

75,55 : 5 200,20 : 4 24,90 : 3 18,90 : 3 66,16 : 8 72,16 : 8



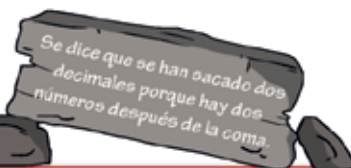
Más que con decimales en el dividendo sería un ejercicio de reparto de dinero. En este caso se pone un ejemplo cercano al niño y que puede llevar a cabo en paralelo con las monedas. Evidentemente, si el alumnado es capaz de dividir, por ejemplo, 346 euros entre 5, sabrá dividir 60 céntimos entre cuatro.

DIVIDIMOS SACANDO DECIMALES

Quieres repartir 19 m de tela en 4 trozos iguales.

- ① Con 16 m se sacan 4 trozos de 4 m cada uno.
- ② Sobran 3 m, que ya no puedes repartir a 1 m para cada trozo. Sabes que 3 m = 300 cm, y coges 280 cm = 2,80 m para dar 0,70 m a cada trozo.
- ③ Con los 20 cm = 0,20 m que quedan se pueden hacer 4 trozos de 5 cm = 0,05 m cada uno.
- ④ Ya no hay más tela. Cada trozo tiene 4,75 m.

19 : 4		
①	19 → 16	→ 4
②	3 → 2,80	→ 0,70
③	0,20 → 0,20	→ 0,05
④	r = 0	4,75



- ⊙ Ahora tú. Divide y saca dos decimales como mucho.

14 : 4 22 : 4 25 : 4 41 : 5 43 : 5 57 : 7 61 : 7

15 : 4 23 : 4 27 : 4 42 : 5 44 : 5 59 : 7 64 : 7



Se sacan decimales, pero en realidad se continúa la división convirtiendo una unidad de medida en el submúltiplo inferior, o los euros en monedas de diez céntimos. Este tipo de operaciones siempre se ofrecen en un contexto significativo para el alumnado. Se trata de que en todo momento sepan lo que están haciendo.

Resuelve siguiendo el patrón en cada caso.

A $8000 : 2 = 4000$
 $8800 : 2$
 $8880 : 2$
 $8888 : 2$
 $8888,8 : 2$
 $8888,88 : 2$

B $6000 : 2 = 3000$
 $6600 : 2$
 $6660 : 2$
 $6666 : 2$
 $6666,6 : 2$
 $6666,66 : 2$

C $4000 : 4 = 1000$
 $4400 : 4$
 $4440 : 4$
 $4444 : 4$
 $4444,4 : 4$
 $4444,44 : 4$


D $0,06 : 3 = 0,02$
 $0,66 : 3$
 $6,66 : 3$
 $66,66 : 3$
 $666,66 : 3$
 $6666,66 : 3$

Los patrones. ¡Que no se olviden!

Dividimos entre decenas y centenas completas

En un viaje de 6438 personas, queremos saber cuántos medios de transporte serán necesarios para realizar distintas excursiones.


En cada taxi caben 4 personas.



6438 : 4		
6438	→ 4000	→ 1000
2438	→ 2400	→ 600
38	→ 36	→ 9
r = 2		1609

Se necesitan 1610 taxis: 1609 taxis completos y 1 taxi más para las 2 personas que quedan.


En cada autobús caben 40 personas.



6438 : 40		
6438	→ 4000	→ 100
2438	→ 2400	→ 60
r = 38		160

Se necesitan 161 autobuses: 160 autobuses completos y 1 más para las 38 personas que quedan.

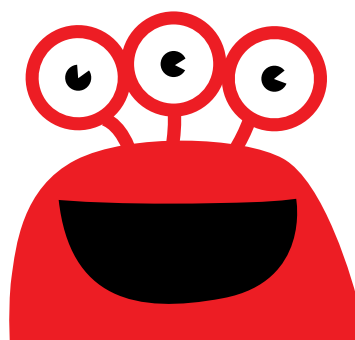
En cada barco caben 400 personas.



6438 : 400		
6438	→ 4000	→ 10
2438	→ 2400	→ 6
r = 38		16

Se necesitan 17 barcos: 16 barcos completos y 1 más con 38 personas.

Ya al final del curso se comienza a preparar la división por dos cifras. El tipo de ejercicio que se muestra ayuda a discriminar los diferentes procesos y cálculos que se dan según la división sea entre unidades, decenas completas o centenas también completas. Permiten observar el «salto» que se da en el cociente con relación a los órdenes de magnitud de este.



Iniciación a la división utilizando la escala

Tenemos 8879 pegatinas con el símbolo de la paz y vamos a repartirlas entre 14 colegios. ¿Cuántas pegatinas habrá para cada uno?

Sigue esta división, paso a paso, con ayuda de la escala.



PRIMER PASO

$14 \times 100 = 1400$	suelo
$14 \times 500 = 7000$	mitad del techo
$14 \times 1000 = 14000$	techo

8879 : 14		
8879		

Construye la escala y escribe la división en una rejilla.

SEGUNDO PASO

$14 \times 100 = 1400$
$14 \times 500 = 7000$
$14 \times 1000 = 14000$

8879 : 14		
8879		600

Observa que 7000 está cerca de 8879, y $7000 = 14 \times 500$.
Para acercarnos más al dividendo, multiplica por 600 ($500 + 100$).
Con los datos de la escala, suma \rightarrow
 $\rightarrow 14 \times 600 = 7000 + 1400 = 8400$.

TERCER PASO

$14 \times 100 = 1400$
$14 \times 500 = 7000$
$14 \times 1000 = 14000$

8879 : 14		
8879	$\rightarrow 8400$	$\rightarrow 600$
479		

$600 \times 14 = 8400$. Escríbelo en la rejilla.
Resta a 8879 los 8400. Quedan 479.

CUARTO PASO

$14 \times 100 = 1400$
$14 \times 500 = 7000$
$14 \times 1000 = 14000$

8879 : 14		
8879	$\rightarrow 8400$	$\rightarrow 600$
479		

479 se queda fuera de la escala porque es más pequeño que 1400.
Reajusta la escala dividiendo todo entre 10 (basta con tachar un cero en cada una de las cantidades que ya tenías).

En 4.º se aborda, como plato fuerte, la división por dos cifras. Se hace a través de un modelo que utiliza referentes (escala) y lo hace en un proceso que se subdivide en ocho pasos. Aquí están los cuatro primeros.



QUINTO PASO

14×10	\times	$= 1400$
14×50	\times	$= 7000$
14×100	\times	$= 14000$

8879 : 14		
8879	\rightarrow	8400 \rightarrow 600
479	\rightarrow	420 \rightarrow 30
59		

En la nueva escala, 700 está mas cerca de 479 que 140, por lo que tienes que pensar en repartir menos de 50.

- $40 \rightarrow 14 \times (50 - 10) = 700 - 140 = 560$. Se pasa.
- $30 \rightarrow 14 \times (50 - 20) = 700 - 280 = 420$. Muy cerca.

Resta el producto de $30 \times 14 = 420$ a 479. Quedan por repartir 59.



SEXTO PASO

14×1	\times	$= 14$
14×5	\times	$= 70$
14×10	\times	$= 140$

8879 : 14		
8879	\rightarrow	8400 \rightarrow 600
479	\rightarrow	420 \rightarrow 30
59		

59 se sale de la escala, porque es menor que 140.

Reajusta la escala quitando un cero a cada número.

Ahora puedes utilizar las tablas de multiplicar.



SÉPTIMO PASO

14×1	\times	$= 14$
14×5	\times	$= 70$
14×10	\times	$= 140$

8879 : 14		
8879	\rightarrow	8400 \rightarrow 600
479	\rightarrow	420 \rightarrow 30
59	\rightarrow	56 \rightarrow 4
3		

59 se puede repartir directamente:

$$4 \times 14 = 56$$

O si lo quieres hacer con la escala...

- $5 \rightarrow 14 \times 5 = 70$. Se pasa.
- $4 \rightarrow 14 \times (5 - 1) = 70 - 14 = 56$. Muy cerca.



ÚLTIMO PASO

14×1	\times	$= 14$
14×5	\times	$= 70$
14×10	\times	$= 140$

8879 : 14		
8879	\rightarrow	8400 \rightarrow 600
479	\rightarrow	420 \rightarrow 30
59	\rightarrow	56 \rightarrow 4
r = 3		634

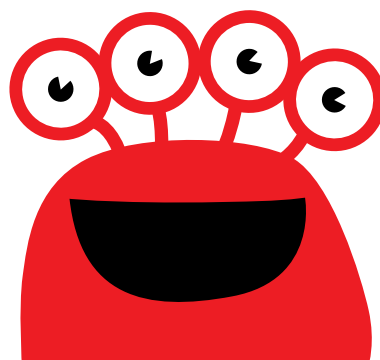
Como 3 es menor que 14, ya has terminado.

Suma la última columna. Has repartido 634 pegatinas y han sobrado 3.

Para comprobar que la división está bien, suma la columna central y el resto. Debes obtener el dividendo:

$$8400 + 420 + 56 + 3 = 8879$$

Y aquí están los cuatro pasos que faltaban.



Creciente de la división de menor a mayor



Vamos a resolver $9234 : 5$ poco a poco, empezando por $9 : 5$ y haciendo crecer el dividendo hasta el resultado final. Mira cómo lo hacemos.

D	d	c	r
9	:	5	=
		1	r = 4
$\times 10$		$\times 10$	$\times 10$
+2			
92		10	40
		8	$40 : 5 = 8$
		18	2



D	d	c	r
92	:	5	=
		18	r = 2
$\times 10$		$\times 10$	$\times 10$
+3			
923		180	20
		4	$20 : 5 = 4$
		184	3

D	d	c	r
923	:	5	=
		184	r = 3
$\times 10$		$\times 10$	$\times 10$
+4			
9234		1840	30
		6	$30 : 5 = 6$
		1846	4

Dividimos 9 entre 5. Escribimos el cociente 1, y el resto, 4.

Ahora dividimos $92 : 5$.

Observa que para pasar de 9 a 92 hay que **multipl-**
car por 10 y añadir 2.

Por tanto, el cociente y el resto anterior quedan multi-
plicados por 10:

$$c = 1 \times 10 = 10 \quad r = 4 \times 10 = 40$$

Ese resto, 40, lo podemos dividir entre 5:

$$40 : 5 = 8, \text{ que pasa al cociente.}$$

El **cociente** es $c = 18$.

Y el 2 que añadimos en el dividendo nos sobra, es el
resto. $r = 2$.

Añadimos al dividendo la tercera cifra, 3.

Tenemos $923 : 5$.

Para pasar de 92 a 923 hemos multiplicado por 10 y
añadido 3.

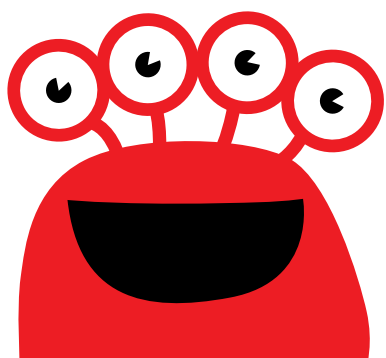
Repetimos, exactamente, el proceso anterior.

Añadimos la última cifra, 4, y repetimos el proceso.

El resultado es

$$9234 : 5 = 1846; r = 4$$

El «creciente» de la división bien sistematizado.



Dividir aproximando

Aprende a dividir con divisores de dos cifras, aproximando.
Veamos, como ejemplo, $2464 : 25$.



- ① Aproximamos el dividendo a 2500 $\rightarrow 2500 : 25 = 100$
- ② Hallamos la diferencia entre el dividendo real y el aproximado: $2500 - 2464 = 36$. Hemos repartido 36 más.
- ③ A cada uno de los 25 del divisor le quitamos 1. Ahora, en lugar de 100, a cada uno le tocan 99.
- ④ Aun así, hemos repartido $36 - 25 = 11$ más.
Volvemos a quitar 1 a cada uno de los 25. Tocaban a 98.
- ⑤ Y ahora quedan $25 - 11 = 14$ por repartir. El resto es 14.

⦿ Ahora tú. Divide aproximando:

A $65538 : 66$



B $66660 : 66$



C $1296 : 13$



D $1430 : 13$



E $2109 : 22$



F $5013 : 51$



G $51300 : 51$



H $87664 : 88$



I $88432 : 88$



J $6754 : 68$



Una técnica que se ha revelado muy útil para abreviar los cálculos y facilitar el cálculo mental es la aproximación del dividendo a otros de cociente exacto. No es más que la aplicación de la propiedad distributiva de la división respecto a la suma.

Patrones



Partiendo de un problema que tengas resuelto, puedes resolver muchos más.

Para empaquetar 48000 bolsitas de té en cajas de 24 bolsitas cada una, se necesitan 2000 cajas. Observa esta tabla:

BOLSITAS DE TÉ EN TOTAL	48000	480000	4800	9600	48000	48000
BOLSITAS EN CADA CAJA	24	24	24	24	12	48
N.º DE CAJAS	2000	20000	200	400	4000	1000



Los patrones tampoco podían faltar en la división. Reflejamos aquí un ejemplo solucionado para que sirva de referencia a otros ejercicios.

División con decimales en el divisor

La división con decimales en el divisor es tan sencilla como si no los tuviera. Vamos a verlo con un ejemplo.

En una envasadora de agua mineral quieren saber cuántas botellas de agua de litro y medio se pueden llenar con 9162 litros de agua.

Primer paso

Colocamos la división y escribimos la escala debajo.

		: 1,5
9 162		

Escala

1 000 → 1 500
5 000 → 7 500
10 000 → 15 000

Segundo paso

Se pueden llenar 6000 botellas. Tras ello quedan 162 litros por embotellar.

		: 1,5
9 162	9000	6000
162		

Escala

1 000 → 1 500
5 000 → 7 500
10 000 → 15 000

Tercer paso

Se reajusta la escala. Se pueden llenar 100 botellas. Quedan 12 litros por embotellar.

		: 1,5
9 162	9000	6000
162	150	100
12		

Escala

~~1 000~~ → 150
~~5 000~~ → 750
~~10 000~~ → 1500

Cuarto paso

Se reajusta la escala. Se llenan 8 botellas y no sobra ninguna. En total se han embotellado 6108 botellas.

		: 1,5
9 162	9000	6000
162	150	100
12	12	8
0		6 108

Escala

~~1 000~~ → 1,5
~~5 000~~ → 7,5
~~10 000~~ → 15

Resuelve en tu cuaderno las siguientes divisiones:

a) $2820 : 2,5$

b) $5181 : 3,3$

c) $15796 : 5,5$

d) $5325 : 7,1$

El caso que se puede ver más complicado y que representa una ruptura más abrupta con el procedimiento tradicional es el de la división con decimales en el divisor. Aquí se ve el modelo de resolución, desglosado en cuatro pasos y con la utilización de la escala.

División de unidades de tiempo

Vamos a explicarlo con un problema:

Se han rodado nuevos capítulos de la serie para televisión «Juego de sillas». La serie tiene una duración total de 12 horas, 48 minutos y 18 segundos (12 h 48 min 18 s). La van a dividir en 9 capítulos, todos ellos con la misma duración. ¿Cuánto durará cada capítulo?

		: 9
12 h 48 min 18 s	9 h 45 min 18 s	1 h 5 min 2 s
3 h 3 min		

Dividimos horas

Realizamos de manera independiente el reparto de las horas, minutos y segundos. Se resta lo repartido y quedan 3 h y 3 min.

		: 9
12 h 48 min 18 s	9 h 45 min 18 s	1 h 5 min 2 s
3 h 3 min		
183 min	180 min	20 min
3 min		

Dividimos minutos

Las 3 h se convierten en 180 min y se le añaden los 3 min que teníamos. Volvemos a dividir y obtenemos que se añaden 20 min a cada episodio y sobran 3 min.

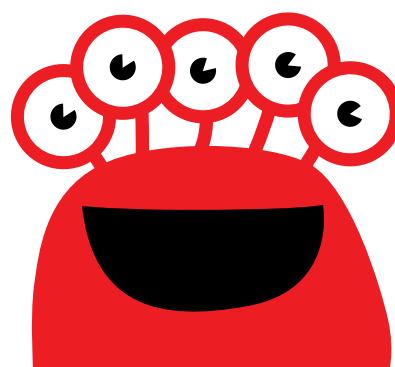
		: 9
12 h 48 min 18 s	9 h 45 min 18 s	1 h 5 min 2 s
3 h 3 min		
183 min	180 min	20 min
3 min		
180 s	180 s	20 s
0		
		1 h 25 min 22 s

Dividimos segundos

Se convierten los 3 min en 180 s. Se hace la división y ya no sobra nada, el resto es 0.

Para obtener el resultado, se suman las horas, los minutos y los segundos que hay en el cociente. Cada episodio durará 1 hora, 25 min y 22 s.

El formato del algoritmo de la división es muy flexible. Un ejemplo de ello es su adaptación al cociente de unidades de tiempo.



PREPARANDO LA ESO... COMO CORRESPONDE

Es casi una obviedad y una obligación señalar la brecha que se produce entre los aprendizajes matemáticos de la Educación Primaria y los de la Educación Secundaria. Parece que fueran como dos mundos separados que no tuvieran mucho que ver entre ellos.

El método ABN intenta remediar este estado de cosas abordando de manera explícita contenidos propios de la etapa secundaria, si bien con un enfoque más informal y conectando tales contenidos con las experiencias de los alumnos y las alumnas y con los conceptos matemáticos que ya dominan. No se pretende ni sustituir unos contenidos por otros ni enmendar, invalidar o proponer el trabajo didáctico a desarrollar por los profesores de Secundaria. Se trata de que el alumnado llegue a esta nueva etapa con una mayor preparación, con unos conocimientos previos que le permitan abordar los nuevos conceptos con una mayor base comprensiva.

Los contenidos que explícitamente se trabajan en Primaria son:

A En el ámbito de la numeración:

- 1 Numeración en cualquier base.
- 2 Números enteros.
- 3 Sucesiones.

B En el ámbito del álgebra.

- 1 Polinomios. Primeras operaciones con polinomios.
- 2 Ecuaciones de primer grado y problemas relacionados con ellas.

C Potencias y radicales.

- 1 Raíces cuadradas.

Los contenidos están repartidos entre los cursos 4.º, 5.º y 6.º, y del modo que se explica a continuación.

A1. Numeración en cualquier base

Hemos comprobado que la numeración en cualquier base es un aprendizaje que no presenta dificultad para los niños si se hace con una adecuada metodología. Consideramos que su conocimiento ayuda mucho a los niños y a las niñas en la formación del pensamiento matemático y en un mejor entendimiento del sentido del número. ¿Por qué?

- Permite comprender mejor el sistema de numeración, pues trabaja los aspectos generales y no solo una de sus posibilidades.
- Amplifica el uso de referentes, por cuanto la expresión de cualquier cantidad va a depender de los criterios aplicados, y estos pueden ser muchos.
- En el caso de la base dos, es muy importante por ser esta la base sobre la que se construye el lenguaje de los ordenadores y se mide la información. Por otro lado, el manejo de bases diversas es una herramienta potente en los procesos de encriptación.
- Las diversas bases de numeración ofrecen un modelo muy explícito para la iniciación del estudio de las progresiones geométricas.

Otra forma de contar



«Tresilandia» es una isla muy curiosa. Su unidad monetaria es el «teuro». Estas son sus monedas y billetes:



Fíjate en la serie que forman: 1, 3, 9, 27... ¿A qué te recuerda?

Seguro que te has dado cuenta de que cada una es la anterior multiplicada por 3. Es igual que lo que hacemos nosotros con nuestro 10. Fíjate:



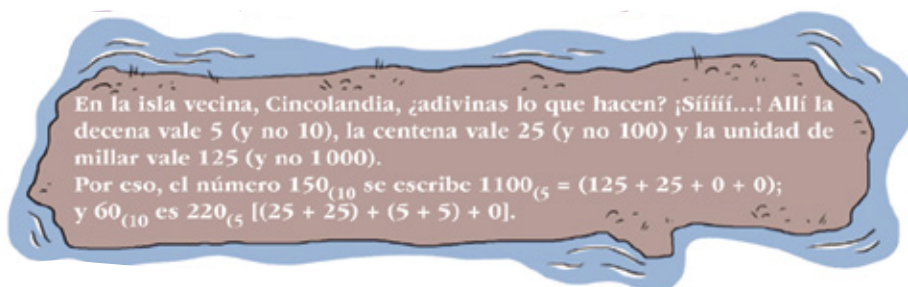
María irá de viaje a Tresilandia con euros y tiene que cambiarlos a teuros. Ella sabe que por cada 3 € le dan una moneda de 3 T€, y por cada 3 monedas de 3 € le dan un billete de 9 T€.

- Fíjate en el ejemplo cómo cambia 21 € y 64 €.

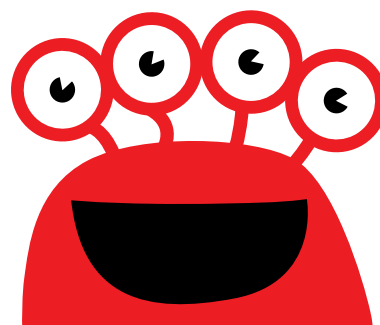
Euros \ Teuros	27 T€	9 T€	3 T€	1 T€
21 €		2	1	
64 €	2	1		1

Con 21 € le dan estos teuros: 9 T€, 9 T€, 3 T€

Con 64 € le dan estos teuros: 27 T€, 27 T€, 9 T€, 1 T€



Con el ejemplo del sistema monetario de las islas de Tresilandia y Cincolandia se introducen los cambios de base.



Aprendemos a sumar en cualquier base de numeración

- 1 Empezamos en base 4. Solo existen las cifras 0, 1, 2 y 3.
- 2 Cuatro unidades de un orden inferior forman una unidad de orden superior.
- 3 El valor de las unidades de orden superior es: $64 - 16 - 4 - 1$
- 4 Para indicar que estamos calculando en base 4, lo indicamos con un subíndice 3_4 .

Para sumar dos números en base 4, realizamos la suma normalmente, y luego transformamos las unidades al orden que les corresponde.

$3c_4 + 2c_4 = 1c_4$, porque hay 4 unidades de primer orden que pasan a ser 1 unidad de segundo orden. En el primer orden nos queda 1 unidad.

$12_{\zeta_4} + 12_{\zeta_4} = \mathbf{30}_{\zeta_4}$, porque hay **4** unidades de primer orden que pasan a ser **1** unidad de segundo orden. Las añadimos a las **2** unidades de segundo orden que ya había, y obtenemos $\mathbf{30}_{\zeta_4}$.



Aprendemos a restar en cualquier base de numeración

Cambiamos a base 5. Recuerda:

- 1 Solo existen las cifras 0, 1, 2, 3 y 4.
- 2 Cinco unidades de un orden inferior forman una unidad del orden superior, y una unidad del orden superior se convierte en cinco unidades de un orden inferior.
- 3 El valor de las unidades de orden superior es: $125 - 25 - 5 - 1$

Vamos a hacer sustracciones en base 5 con el ábaco.

Calculamos: $311_{(5)} - 123_{(5)}$.



<p>1.º Escribimos en el ábaco el minuendo.</p> <p>Nos fijamos en las unidades de segundo orden. Como $1 < 2$, no podemos restar directamente.</p>	<p>2.º Convertimos una unidad de tercer orden en cinco de segundo orden. Ya se pueden sustraer dos unidades de segundo orden.</p> <p>Nos fijamos en las unidades de primer orden. Como $1 < 3$, no podemos restar directamente.</p>	<p>3.º Convertimos una unidad de segundo orden en cinco de primer orden. Con ello ya se puede hacer la operación.</p>	<p>4.º Realizamos la resta y ya tenemos el resultado final: 133.</p> <p>$331_{(5)} - 123_{(5)} = 133_{(5)}$</p>
---	---	---	--

Algunos aspectos de la iniciación a las operaciones de sumar y restar en cualquier base.

Numeración con bases distintas a la decimal

Esta es la secuencia de números de un sistema de numeración de base cuatro (cuatro unidades de orden inferior forman una de orden superior).

1 - 2 - 3 - 10 - 11 - 12 - 13 - 20 - 21 - 22 - 23 - 30 - ...

El $4_{(10)}$ no existe en base 4, correspondería a 10 (con una unidad de orden superior).

El $8_{(10)}$ correspondería a 20 en base 4 (con dos unidades de orden superior).

El $12_{(10)}$ correspondería a 30 en base 4 (con tres unidades de orden superior).



- Añade cuatro términos a la serie anterior del cuadro.

- Añade en tu cuaderno ocho términos a la secuencia de números de un sistema de numeración en base cinco:

1 - 2 - 3 - 4 - 10 - 11 - ... - ... - ... - ... - ... - ... - ... - ...

- El $5_{(10)}$ no existe en base 5, correspondería a 10, con una unidad de orden superior.

- ¿Qué base de numeración tienen las secuencias siguientes?

a) 1 - 10 - 11 - 100 - 101 - 111 - ...

b) 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - ...

Esta serie va de mayor a menor:

c) 100 - 22 - 21 - 20 - 12 - 11 - 10 - 2 - 1.

Y esta, no empieza por 1:

d) 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 40 - 41 - 42 - ...



- En las siguientes secuencias numéricas hay un error. ¿Dónde está? ¿Qué sería lo correcto?

a) En base 6:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - ...

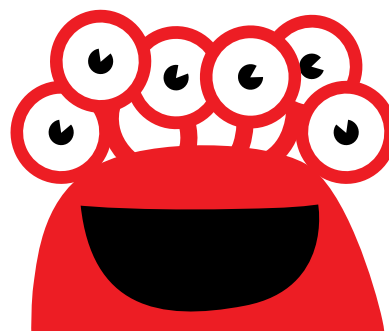
b) En base 7:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - ...

- Continúa en tu cuaderno las series anteriores con cuatro números más.



En este curso se hace ya un tratamiento más general. He aquí un ejemplo de las actividades que se proponen.



A2. Números enteros

Al tratamiento de los números enteros, que se concentra en 6.º de Primaria, se le dedica prácticamente una unidad. En esta página y en la siguiente se ofrece una muestra de las propuestas del texto de este curso.

Sexto de Primaria

Números enteros (I)

Hasta ahora hemos empezado siempre a contar desde el uno en adelante. ¿Pero qué ocurre cuando hay algo que contar antes del 1?

Observa estos ejemplos.

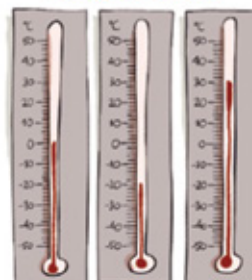
La línea del tiempo



Superficie y profundidad



Temperaturas



Sótanos y ascensores



Cartilla bancaria

Saldo anterior	1.228,33
Carga compra	-3,17
Extracción cajero	-150,00
Ingreso	7.800,00
Carga redita	8,80
Carga traspaso	4.57,22
Pago cheque	-5.171,81
Carga compra	-195,01
	2.858,42

Los números enteros se introducen a partir de situaciones diferentes que responden a un mismo modelo formal, que favorece el proceso de abstracción: la línea del tiempo, la temperatura, el nivel del mar, ascensores, deudas, comparaciones, etc.

Producto de enteros

Observa las siguientes situaciones:

- Si te dan ocho veces ocho euros, es como si te dan 64 €:
 $(+8) \times (+8) = 64$
- Si tienes deudas de ocho euros ocho veces, es como deber 64 € (-64 €):
 $(-8) \times 8 = -64$
- Si ocho veces te gastas ocho euros, es como gastar 64 € (-64 €):
 $8 \times (-8) = -64$
- Si te quitan una deuda de ocho euros ocho veces, es lo mismo que quedarte con 64 euros que ya no debes:
 $(-8) \times (-8) = 64$

Posiblemente te cueste entender el último caso, pero imagina que hubieras tenido que pagar esos 64 €: ahora no los tendrías. Sé positivo y piensa al revés, que si no tienes que pagar esos 64 €, siguen siendo tuyos.

Estos casos se simplifican en la regla de los signos:

$$+ \times + = + \quad + \times - = - \quad - \times + = - \quad - \times - = +$$

Para que sea más fácil de recordar, piensa en los personajes de una película y que: + sea un **amigo** y - un **enemigo**.

$$\text{😊} \times \text{😊} = \text{😊} \quad \text{El amigo de mi amigo es mi amigo} \quad + \times + = +$$

$$\text{😊} \times \text{😞} = \text{😞} \quad \text{El amigo de mi enemigo es mi enemigo} \quad + \times - = -$$

$$\text{😞} \times \text{😊} = \text{😞} \quad \text{El enemigo de mi amigo es mi enemigo} \quad - \times + = -$$

$$\text{😞} \times \text{😞} = \text{😊} \quad \text{El enemigo de mi enemigo es mi amigo} \quad - \times - = +$$



División de enteros

Como la división es la operación inversa del producto, las reglas de los signos que aplicamos en el producto se aplican también en la división. Para hallar el cociente exacto de dos números enteros, se dividen sus valores absolutos y se pone el signo según la regla.



$$+ : + = + \quad + : - = - \quad - : + = - \quad - : - = +$$

¿Por qué en el producto de enteros menos por menos es más? Se explica acudiendo a dos modelos fácilmente interiorizables por los niños: situaciones de tener o deber, o razonamientos con una carga semántica fácil de recordar.

A3. Sucesiones

Este contenido se despliega en dos cursos diferentes. En 4.º se trabaja la suma de números consecutivos. En 6.º se repasa lo anterior y se trabaja específicamente la suma de paquetes de números, partiendo en esta etapa desde el número 1.

Cuarto de Primaria

Números consecutivos

Los números 31, 32, 33 y 34 son consecutivos porque van seguidos y en orden.

- ¿Cómo encontrar números consecutivos sabiendo solo su suma?

Cantidad **impar** de números consecutivos.



¿Qué cinco números consecutivos suman 30? Divide la suma entre la cantidad de números consecutivos:

$$30 : 5 = 6 \rightarrow \text{número en el centro de los cinco}$$



4 5 6 7 8

Los números 4, 5, 6, 7 y 8 son consecutivos y suman 30.

Cantidad **par** de números consecutivos.



Seis números consecutivos suman 75. ¿Cuáles son? Divide 75 entre 6, el cociente 12 (no se cuenta el resto) y el siguiente, 13, serán los números que ocupen el lugar central:



10 11 12 13 14 15

Los números consecutivos 10, 11, 12, 13, 14 y 15 suman 75.

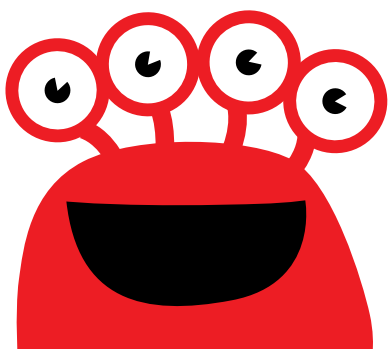
- ⓐ Busca tres números consecutivos que sumen la cantidad de cada pieza.



- ⓑ Busca cinco números consecutivos que sumen la cantidad de cada pieza.



La forma de abordar la solución es mucho más simple y lógica que la clásica de utilizar una ecuación de primer grado ($x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 30$). Además, no hay que esperar a la ESO.



Suma de paquetes de números

Si el número es par

Cuando tenemos un grupo de números consecutivos y queremos saber su suma, no es necesario sumarlos uno a uno. Observa cómo hacerlo:

¿Cuánto vale la suma de los diez primeros números?

1 Buscamos el número que está en la mitad de 1 y 10. Este número es el 5.

2 Se forman cinco parejas de números cuya suma es 10:

$$(6 + 4) + (7 + 3) + (8 + 2) + (9 + 1) + (10 + 0)$$



3 Como la suma de todas las parejas es 10, se multiplica por el número de parejas (5): $10 \times 5 = 50$

4 Le sumamos 5 (la mitad entre el 1 y el 10). El resultado es: $50 + 5 = 55$

¿Cuánto vale la suma de los veinte primeros números?

1 Buscamos el número que está en la mitad, el 10.

2 Se forman diez parejas de números cuya suma es 20:

$$(20 + 0) + (11 + 9) + (12 + 8) + \dots$$

3 Como la suma de todas las parejas es 20, se multiplica por el número de parejas (10): $20 \times 10 = 200$

4 Le sumamos 10. El resultado es: $200 + 10 = 210$



- Con este método podemos calcular la suma de cualquier paquete de números. Prácticalo en tu cuaderno, fijándote en el ejemplo.

SUMA DE LOS PRIMEROS 140 NÚMEROS
1.º Calculamos la mitad: 70
2.º Se forman 70 parejas de números cuya suma es 140.
3.º Multiplicamos $70 \times 140 = 9800$
4.º Sumamos la mitad de 140: $9800 + 70 = 9870$

SUMA DE LOS PRIMEROS 120 NÚMEROS
1.º Calculamos la mitad: ...
2.º Se forman ... parejas de números cuya suma es ...
3.º Multiplicamos $\dots \times \dots = \dots$
4.º Sumamos la mitad de ...: $\dots + \dots = \dots$

Una explicación sencilla para averiguar sumas de paquetes de números que forman una sucesión. Es en lo que desembocan las prácticas realizadas desde Infantil con «los amigos del 10».

Si el número es impar

¿Cuánto vale la suma de los quince primeros números?

- 1 Apartamos el número 15.
- 2 Se forman 7 parejas que suman 15:

$$(14 + 1) + (13 + 2) + (12 + 3) + \dots$$
- 3 Como la suma de todas las parejas es 15, se multiplica por el número de parejas (7): $15 \times 7 = 105$
- 4 Por último, sumamos 15 y obtenemos el resultado: $105 + 15 = 120$.

⊙ Usa la calculadora para hallar la suma de los primeros...

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| a) ... cuarenta números. | b) ... ochenta números. |
| c) ... cien números. | d) ... setenta y cuatro números. |
| e) ... nueve números. | f) ... diecisiete números. |
| g) ... treinta y tres números. | h) ... doscientos un números. |

Cómo averiguar la suma de un paquete de números conociendo las sumas correspondientes a un número anterior o posterior.

Si sabemos que la suma de los 6 primeros números es 21, para la suma de los 7 primeros números habría que sumar 7 a 21.

Y para saber la suma de los cinco primeros números, habría que restarle 6 a 21.

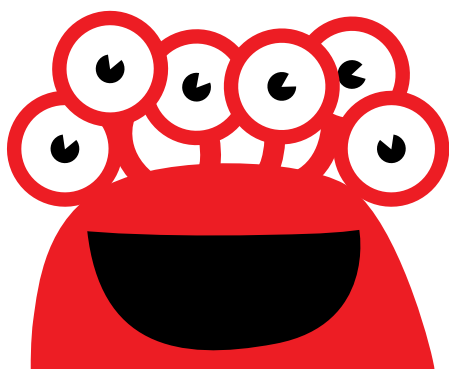


⊙ Observa la siguiente tabla y comprueba que la regla anterior se cumple. A continuación, responde en tu cuaderno:

- a) ¿Cuál es la suma de los once primeros números?
- b) ¿Cuál es la suma de los doce primeros números?
- c) ¿Cuál es la suma de los catorce primeros números?
- d) Sabiendo que la suma de los 22 primeros números es 253, ¿cuál será la suma de los 23 primeros números? ¿Y la de los 21 primeros?

PAQUETE DE LOS PRIMEROS...	SUMA DE TODOS LOS NÚMEROS DEL PAQUETE
2 números	3
3 números	6
4 números	10
5 números	15
6 números	21
7 números	28
8 números	36
9 números	45
10 números	55

Una muestra más de cómo se aborda este contenido en 6.º curso.



B1. Iniciación al álgebra. Polinomios

Sexto de Primaria

Descomposición polinómica (II)

Vamos a descomponer un número creando un cuarto nivel, cambiando la base de la potencia (10) por la letra x . Observa:

8967				
Primer nivel	8000	+ 900	+ 60	+ 7
Segundo nivel	$8 \cdot 1000$	$+ 9 \cdot 100$	$+ 6 \cdot 10$	$+ 7$
Tercer nivel	$8 \cdot 10^3$	$+ 9 \cdot 10^2$	$+ 6 \cdot 10$	$+ 7$
Cuarto nivel (cambiamos 10 por la x)	$8x^3 + 9x^2 + 6x + 7$			

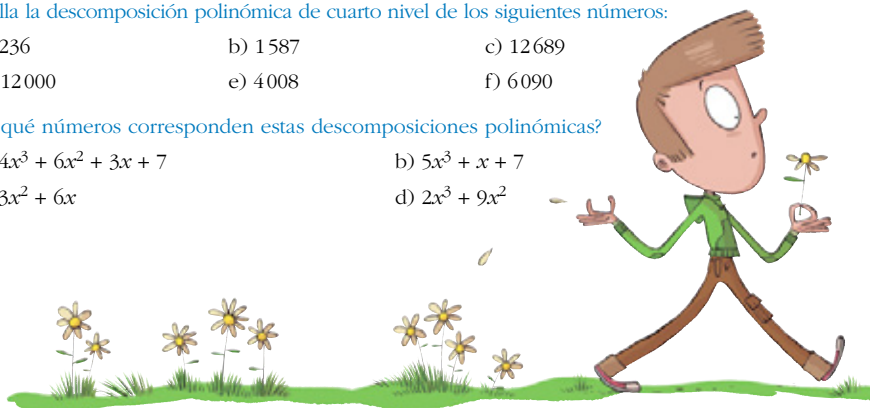
De este modo, el número 8967 se convierte en: $8x^3 + 9x^2 + 6x + 7$

● Halla la descomposición polinómica de cuarto nivel de los siguientes números:

- a) 236 b) 1587 c) 12689
d) 12000 e) 4008 f) 6090

● ¿A qué números corresponden estas descomposiciones polinómicas?

- a) $4x^3 + 6x^2 + 3x + 7$ b) $5x^3 + x + 7$
c) $3x^2 + 6x$ d) $2x^3 + 9x^2$



Se parte del exhaustivo conocimiento que tiene el alumnado sobre las descomposiciones numéricas para llegar a este contenido. Hay varios aspectos positivos: expresar una cantidad en códigos diferentes, saber diferenciar la constante del coeficiente, tener una primera referencia clara y significativa para el alumnado en el momento de la iniciación y primeros cálculos con los polinomios.

Investiga en equipo



En la siguiente descomposición polinómica, a x le damos distintos valores. ¿Qué número representa cada polinomio? Coged la calculadora e intentad resolver los siguientes ejercicios. Observad el ejemplo:

- a) $x = 2$ y $3x^3 + 2x^2 + 6 = 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 6 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 6 = 24 + 8 + 6 = 38$
b) $x = 3$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$
c) $x = 4$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$
d) $x = 5$ y $3x^3 + 2x^2 + 6$

Una investigación en equipo que abre la puerta del contenido propio de funciones.

Descomponemos polinomios

Los polinomios también podemos descomponerlos. Vamos a verlo con un ejemplo:

$$3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$$

Partimos del valor inicial: $3000 + 600 + 50 + 4$

	TRASLADAMOS CANTIDADES	RECOMPONEMOS EL POLINOMIO
De UM a C	$2000 + 1600 + 50 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 16 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$
De UM a C	$1000 + 2600 + 50 + 4$	$10^3 + 26 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$
De C a D	$3000 + 400 + 250 + 4$	$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 4$
De UM a C y de C a D	$2000 + 1200 + 450 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 + 45 \cdot 10 + 4$
De UM y C a D	$2000 + 400 + 1250 + 4$	$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 125 \cdot 10 + 4$

Si cambiamos la base 10 por x , es lo mismo. Observa:

	$6x^3 + 6x^2 + 6x + 6$
De UM a C	$5x^3 + 16x^2 + 6x + 6$
De C a D	$6x^3 + 5x^2 + 16x + 6$
De UM a C y de C a D	$5x^3 + 15x^2 + 16x + 6$
De UM y C a D	$5x^3 + 5x^2 + 116x + 6$
De C a U	$6x^3 + 5x^2 + 6x + 106$

Las descomposiciones son muy variadas, al igual que las que haces habitualmente.



- ⦿ Haz tres descomposiciones de cada uno de los siguientes polinomios de base 10:

a) $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2$

b) $3 \cdot 10^3 + 10^2 + 4 \cdot 10$

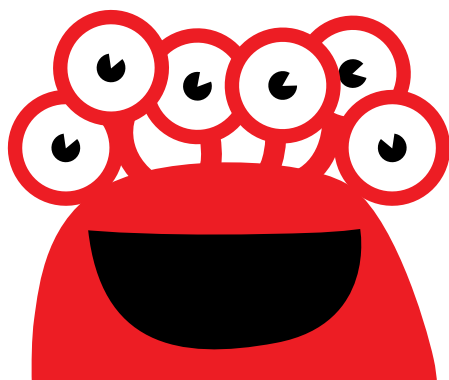
c) $6 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^2$

- ⦿ Haz tres descomposiciones de cada uno de los siguientes polinomios de base x :

a) $47x^3 + 2x^2 + x + 8$

b) $2x^3 + 2x^2 + 2x$

La descomposición se va a utilizar para iniciar los cálculos de sumas y de restas de polinomios.



B2. Ecuaciones

Cuarto de Primaria

TIPO A

¿Cuántos bombones hay dentro de una caja sabiendo que si añades 8 bombones más habrá en total 33?

$x \rightarrow$ Número de bombones que tiene la caja.
Es lo que queremos saber.

Ecuación $\rightarrow x + 8 = 33$

Utiliza una rejilla para resolverlo.

1		$x + 8 =$	33
2	-8	$x =$	25

- 1 Escribe cada miembro de la ecuación en una columna.
- 2 Quita 8 bombones a cada miembro.
- 3 Como $x = 25$, la caja tiene 25 bombones.
¡Ya has resuelto tu primera ecuación!



TIPO B

¿Cuántos caramelos tenía una bolsa si después de comernos 12 caramelos quedan todavía 38?

$x \rightarrow$ Número de caramelos de la bolsa.

Ecuación $\rightarrow x - 12 = 38$

1		$x - 12 =$	38
2	+12	$x =$	50

- 1 Coloca cada miembro en su lugar.
- 2 Añade 12 a los dos miembros.
- 3 ¡Ya has terminado! $x = 50$.
La bolsa tenía 50 caramelos.



TIPO C

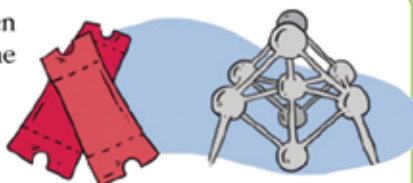
He comprado 4 entradas para el Atomium en Bruselas, y una audioguía por 8 €. En total he pagado 44 €. ¿Cuánto cuesta cada entrada?

$x \rightarrow$ Precio de una entrada

Ecuación $\rightarrow 4x + 8 = 44$

		$4x + 8 =$	44
1	-8	$4x =$	36
2	: 4	$x =$	9

- 1 Resta 8 € a los dos miembros. Queda lo que cuestan 4 entradas.
- 2 Divide ambos miembros entre 4 para saber el precio de una entrada.
- 3 Como $x = 9$, el precio de una entrada es 9 €.



TIPO D

De mi hucha cogí un tercio de lo que había y con 7 € que me ha dado mi abuelo, reúno los 11 € que cuesta la entrada a la Alhambra. ¿Cuánto dinero tenía en mi hucha?

$x \rightarrow$ Dinero que tenía en la hucha.

Ecuación $\rightarrow \frac{1}{3}x + 7 = 11$

		$\frac{1}{3}x + 7 =$	11
1	-7	$\frac{1}{3}x =$	4
2	$\times 3$	$x =$	12

- 1 Resta 7 € a los dos miembros. Ya sabes lo que sacaste de la hucha.
- 2 Multiplica por 3 para saber el dinero que había en la hucha.
- 3 Como $x = 12$, en la hucha había 12 €.



TIPO E

¿Cuántas canicas hay en una bolsa si dos bolsas tienen las mismas canicas que las que hay en una bolsa más 22?

$x \rightarrow$ Número de canicas en una bolsa.

Ecuación $\rightarrow 2x = x + 22$



	$2x$	$=$	$x + 22$
① $-x$	x	$=$	22

① Resta la cantidad de canicas que hay en una bolsa.

② Como $x = 22$, cada bolsa tiene 22 canicas.

En 4.º ya se trabajan los casos más sencillos de ecuaciones.

Quinto de Primaria

Ecuaciones tipo 5

Ecuación tipo 5 $\rightarrow 2x + 4 = 3x - 6$

En una joyería guardan los anillos en cajas. Si a los que guardan en dos cajas les añadimos 4 anillos, tenemos los mismos anillos que si a tres cajas le quitamos 6 anillos. ¿Cuántos anillos guardan en cada caja?

Llamaremos x a los anillos que desconocemos que hay en las cajas.

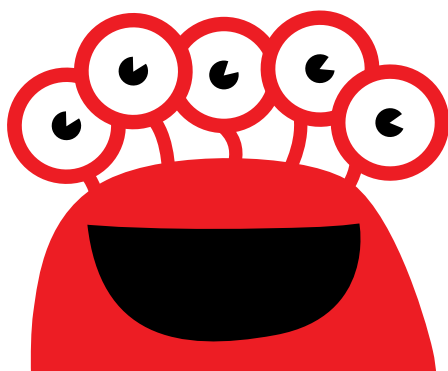
① Restamos dos cajas de anillos. En el primer miembro quedan cuatro anillos, y en el segundo una caja a la que le faltan 6 anillos.

② Añadimos 6 anillos a la caja, para que no falte nada. Si a una caja a la que le faltan 6 anillos (tiene 4), le añadimos 6 anillos, completamos la caja. Por tanto, cada caja tiene 10 anillos.



	$2x + 4$	$=$	$3x - 6$
$- 2x$	4	$=$	$x - 6$
$+ 6$	10	$=$	x

En 5.º, además de repasar los modelos trabajados en 4.º, se completan con los dos tipos que faltan.



Ecuación tipo 6 $\rightarrow \frac{x}{2} + 7 = 3x - 33$

La mitad de las chocolatinas que hay en un envase más 7 chocolatinas son las mismas que las que hay en 3 envases menos 33 chocolatinas.

	$\frac{x}{2} + 7$	$= 3x - 33$
- 7	$\frac{x}{2}$	$= 3x - 40$
$\times 2$	x	$= 6x - 80$
+ 80	$x + 80$	$= 6x$
- x	80	$= 5x$
: 5	16	$= x$



Quitamos 7. Un miembro de la ecuación tiene medio envase y el otro, 3 envases a los que les faltan 40 chocolatinas.

Multiplicamos por 2. El medio envase se convierte en uno, y en el otro miembro hay seis envases a los que les faltan 80 chocolatinas.

Añado 80 chocolatinas. En el primer miembro tengo un envase más las 80 chocolatinas y en el segundo miembro no les falta ninguna.

Quito un envase. Me quedan solo las 80 chocolatinas en un miembro y cinco envases en otro.

Divido entre 5 y ya tengo la solución: 16 chocolatinas por envase.

Igualmente, se incluye otra forma de resolver las ecuaciones: por estimación o tanteo.

C1. Raíz cuadrada

Cuarto de Primaria

Y ahora aprenderás cómo se resuelven las raíces cuadradas exactas cuyo radicando sea el cuadrado de cualquier número más pequeño que 100. Es muy sencillo.

Quieres averiguar $\sqrt{1849}$. Es decir, quieres buscar un número que multiplicado por sí mismo dé 1849.



$$30^2 = 900$$

$$35^2 = 1225$$

$$40^2 = 1600$$

$$45^2 = 2025$$

$$50^2 = 2500$$

① Ten presente la «tabla de cuadrados perfectos».

② ¿Entre qué dos resultados está el radicando 1849? Entre 1600 y 2025, que corresponden a los cuadrados de 40 y 45.

③ Así, $\sqrt{1849}$, tendrá que ser 41, 42, 43 o 44.

④ Fíjate en la cifra de las unidades de 1849 y de sus posibles raíces:

41 42 43 44 \rightarrow El único número que al multiplicarlo por sí mismo da 9 es 3.

⑤ $43^2 = 43 \times 43 = 1849$, por lo que $\sqrt{1849} = 43$.



En 4.º, los alumnos aprenden, además del concepto de raíz, su resolución cuando estas son exactas. Se valen para ello de una escala formada por los cuadrados de los números de dos cifras que terminan en cero o en cinco, y que también les será útil para los cálculos de sucesiones.

Se introduce el procedimiento para resolver las raíces cuadradas de números de hasta cuatro cifras utilizando un proceso de aproximación. Así se explica.

Raíces cuadradas inexactas

¿Cuántas baldosas tendrá el lado de la mayor superficie cuadrada que se puede cubrir con 2700 baldosas? ¿Sobrarán algunas baldosas?

Vamos a hallar la raíz cuadrada de 2700: $\sqrt{2700}$.

Observa los pasos:

- 1 Situamos la raíz en el intervalo, de nuestra tabla de potencias, entre las dos más próximas que conocemos:

$$\left. \begin{array}{l} 50^2 = 2500 \\ 55^2 = 3025 \end{array} \right\} \text{ Los resultados posibles son 51, 52, 53 o 54.}$$

- 2 Hacemos una primera extracción. Para que el lado tenga 50 baldosas, usamos 2500 (en rojo).

Como ya hemos empleado 2500 baldosas, y hay 2700, nos sobran todavía 200:
 $2700 - 2500 = 200$

- 3 Hacemos una segunda extracción. Con 200 baldosas, ¿en cuánto podemos incrementar el lado?

- Para que se incremente en uno más, necesitaremos 101 baldosas (en azul y amarillo).

$$50 \times 2 + 1$$

- Para que se incremente en dos más, necesitaremos 204 baldosas.

$$50 \times 2 \times 2 + 2^2 = 204. \text{ ¡Nos pasamos!}$$

Como nos quedan 200 baldosas, es evidente que solo se puede aumentar el lado en una fila y en una columna más.

- 4 Hemos puesto 51 baldosas y nos sobran 99.

$$200 - 101 \text{ (que hemos añadido)} = 99.$$

Solución:

$$\sqrt{2700} = 51, \text{ resto} = 99$$

El cuadrado que más se aproxima a 2700 es $51^2 = 2601$

