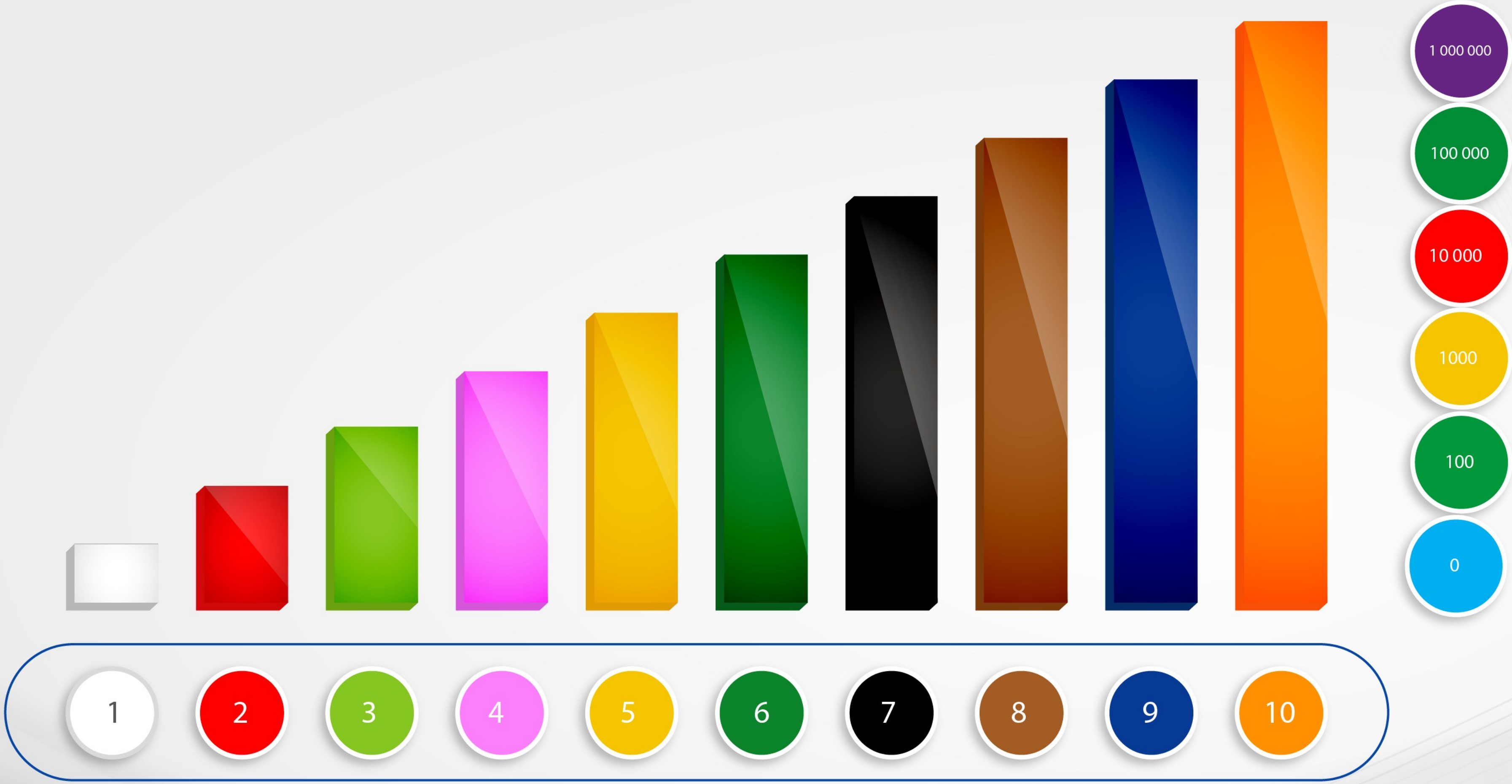
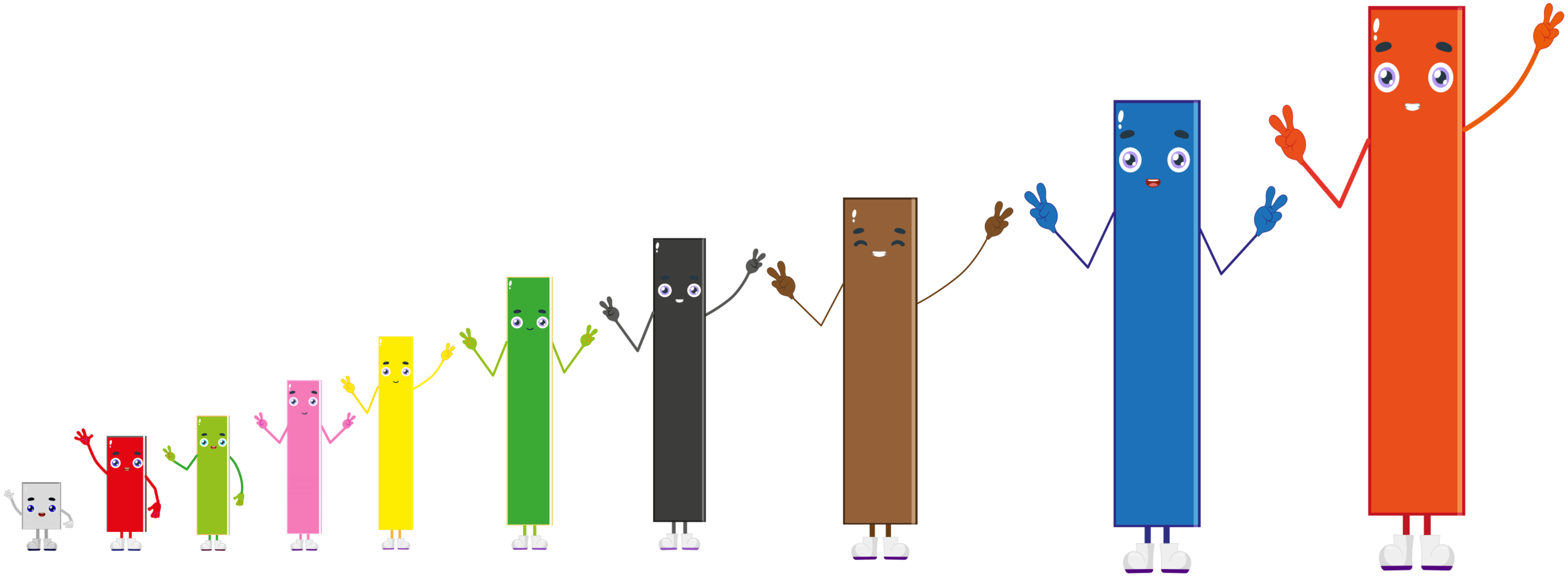
REGLETAS CUISENAIRE



Autor: Juan Carlos Soto Fernández



TOCANDO
LOS NÚMEROS

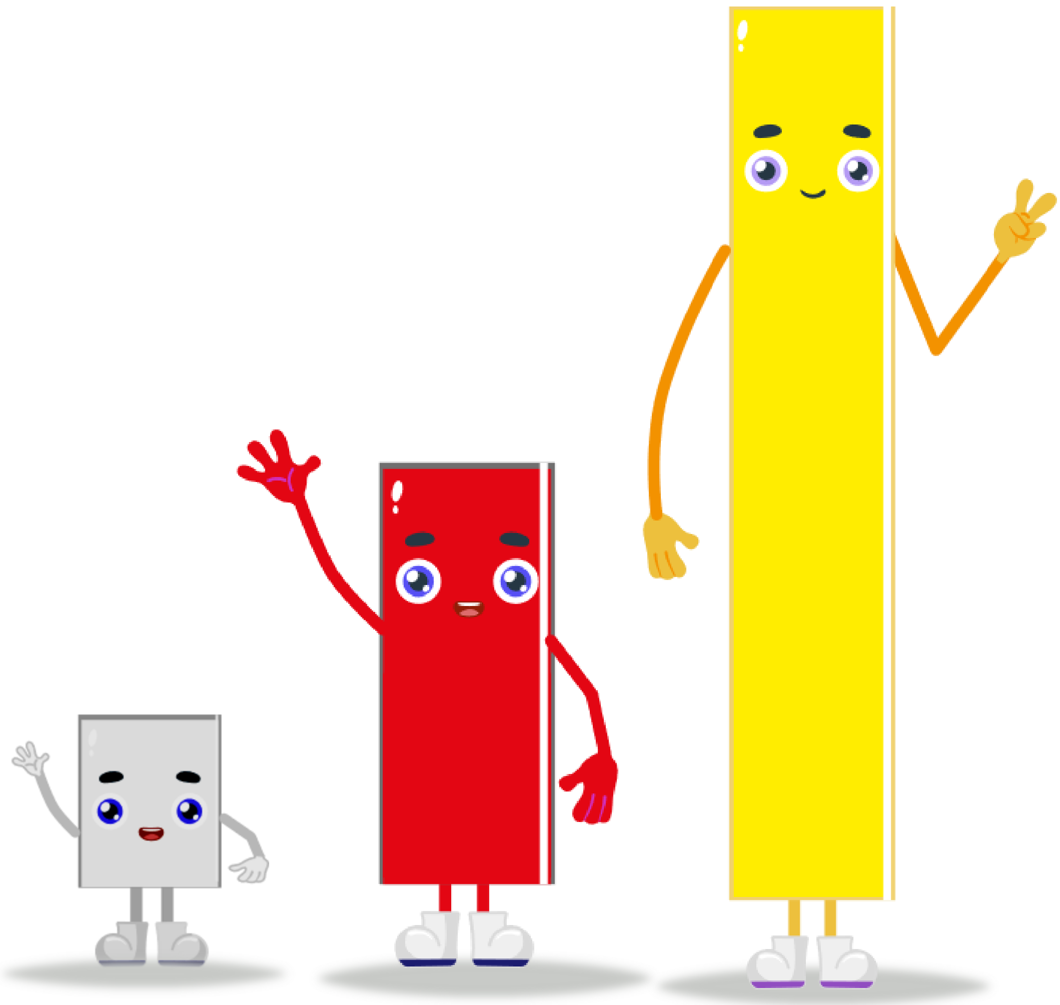
LIBRO PEDAGÓGICO PARA EL USO DE REGLETAS CUISENAIRE

Autor: Juan Carlos Soto Fernández

ÍNDICE

CAPÍTULO I

LAS REGLETAS CUISENAIRE



REGLETAS CUISENAIRE

Es un material concreto estructurado compuesto por diez bloques de diferentes colores. Cada uno de ellos adquiere un valor en relación a los demás. Para uso estándar son de colores blanco, rojo, verde claro, rosado, amarillo, verde oscuro, negro, marrón, azul, naranja representando los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 respectivamente. Fue creado por el profesor Belga Emile-Georges Cuisenaire en el año 1945. Su uso se ha difundido a nivel mundial por la versatilidad y trascendencia del material.

El siguiente libro es manual para el uso de las regletas Cuisenaire del investigador Juan Carlos Soto Fernández, donde recopila y sugiere algunos nuevos usos y materiales que potencian las regletas Cuisenaire. El uso de las regletas responde a un enfoque multisensorial del aprendizaje de las matemáticas: es un material que permite que los niños puedan tocar, escuchar y visualizar mientras construyen sus ideas.

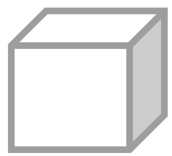
Las regletas Cuisenaire se pueden utilizar desde el nivel inicial hasta primaria y secundaria. También se ha utilizado en educación básica alternativa con jóvenes y adultos que se incorporaron tarde a la educación en su proceso de alfabetización. Asimismo, en la educación básica especial, con niños con discalculia, autismo, entre otros. Por otro lado, a los niños con alto rendimiento les ayuda a potenciar y visualizar sus ideas.

Para entender la utilidad de su uso es importante comprender dos cosas: la naturaleza de las matemáticas (que es abstracta) y que el cerebro de los niños aprende con experiencias sensoriales.

No vamos a empezar las matemáticas con los signos (numeral).

Vamos a empezar primero con las regletas Cuisenaire que permitan construir un concepto matemático.

1

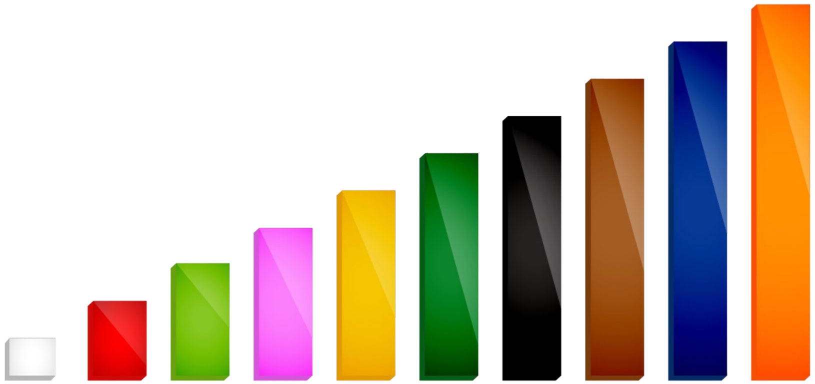


Protocolo del Programa Tocando los Números

Aunque pueden usarse diversos materiales para la enseñanza de las matemáticas, este libro tendrá como protagonistas a las regletas. En ocasiones se complementará con alguna plantilla o carta pedagógica que los especialistas pueden elaborar o un material de fácil acceso (vaso, plato) que potencie su uso. Los regletas Cuisenaire son los protagonistas de este libro, nos invitan, metafóricamente, a tocar los números.

HISTORIA DE LAS REGLETAS CUISENAIRE

Fue creado por el profesor Belga Emile Georges Cuisenaire en el año 1945. Su uso se ha difundido a nivel mundial por la versatilidad y trascendencia del material.. En 1951 se publicó la primera edición del folleto “ Los colores de los números” en Bélgica. Desde esa fecha, en adelante, ha sido muy bien recibida la propuesta por diferentes países; así como también ha sido incorporado por diferentes modelos didácticos que ha encontrado en este material un recurso imprescindible para la enseñanza de las matemáticas. En 1973 la Unesco recomienda el uso de equipos de Cuisenaire y sugiere la reforma de los programas de cálculo basados en su método.



El gran aporte de las regletas es que como material, que representa los números, a través de sus relaciones con las otras regletas, facilita un aprendizaje intuitivo y muy práctico de las matemáticas. Permite no solo explorar los números, si no las nociones pre numéricas y relaciones más complejas como la adición, sustracción, multiplicación y división. También explorar los números Enteros, Racionales, expresiones algebraicas y otras relaciones matemáticas. Lo visual y tangible del material, representa una contribución significativa a la educación y mejora de los procedimientos didácticos, en pro de las futuras generaciones.

1 Cuisenaire con sus famosas cañas (regletas), ca. 1965. Imagen tomada de ResearchGate.net.

MATERIAL CONCRETO Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En pedagogía suelen utilizarse diversos términos para nombrar a los materiales que acompañan el proceso de la enseñanza de las matemáticas: materiales didácticos, recursos educativos, juguetes didácticos, manipulativos, material concreto. Estos conceptos van adquiriendo distintos significados de acuerdo al enfoque, área, nivel y contexto. En consecuencia, no es sencillo estructurar todos estos conceptos en un mismo andamiaje conceptual.

Respecto a esta situación conceptual, Coriat sostiene : “*Un buen material didáctico trasciende la intención de su uso original y admite varias aplicaciones ; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso*”(Coriat, 1997, p.159).

Sin embargo , para fines pedagógicos, es importante la precisión en los conceptos. Vamos a utilizar el concepto material concreto para aquellos materiales que permitan representar, cuantificar y su nivel de abstracción sea básico.

Jerome postuló tres formas de representación que operan durante el desarrollo de la inteligencia humana : la representación enactiva, icónica y simbólica(Bruner,1984, p.122). En pedagogía también se le conoce como concreto, pictórico y abstracto (CPA), cada uno de ellos es un proceso y en el proceso concreto utilizaremos las regletas Cuisenaire con ese fin. Veremos también, más adelante, que las regletas pueden cumplir otras funciones que son de mayor abstracción (proceso abstracto) como expresiones algebraicas, representar números de muchas cifras. Empezaremos con su uso en el proceso concreto donde cumple el rol de material concreto.

El material concreto nos facilita la construcción de nociones y conceptos matemáticos. Toda enseñanza de las matemáticas empieza por la manipulación de material concreto , ya sea para realizar un juego libre o para explorar las características y relaciones que se pueden descubrir a partir de ellos. Las características del material concreto son:

- *Permiten representar*: puedo representar con ellos personas, animales, objetos de forma discontinua (de uno en uno).
- *Permiten cuantificar:* luego de representar algo, puedo contarlos.
- *Presentan un nivel básico de abstracción:* me es sencillo percibir lo representado y contado, más si soy niño.

La regleta Cuisenaire es un material concreto, ya que cumple las características para utilizarlo en esta primera etapa, luego los estudiantes realizan dibujos o gráficos de sus construcciones y finalmente se les enseña el símbolo matemático para representar dichas construcciones (numerales y algoritmos).

DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

Número: Propiedad cardinal de un conjunto que cumple la función de cardinalidad, ordinalidad y nominalidad.

Tocando los Números: Programa para trabajar las matemáticas desde una experiencia multisensorial utilizando materiales como regletas Cuisenaire, policubos, cartas matemáticas, metaplanos, entre otros.

Tren numérico: El término se utiliza para las construcciones que se realizan con las regletas, tienen una orientación horizontal.

Torre numérica: El término se utiliza para las construcciones que se realizan con las regletas y tienen una orientación vertical.

Regleta Cuisenaire: Material concreto que permite representar los números y sus relaciones matemáticas a través de sus barras y código de colores.

Material concreto: Es todo material que permite representar, cuantificar y requiere un nivel básico de abstracción para su uso.

CPA: Son un conjunto de tres procesos: concreto, pictórico y abstracto. Propuestos por Jerome Bruner en su *Teoría del desarrollo de la inteligencia*, él los llamó enactivo, icónico y simbólico. En el método Singapur se le llama CPA.

Cantidad: Es la característica de un objeto, que sugiere tamaño o porción. Es la noción de que hay un número de unidades, pero no se sabe cuantas.

Números conectados: Llamado también esquema de círculos o *number bonds*. Es un esquema que permite componer y descomponer números.

Proceso concreto: Incluye todas aquellas actividades (juego, uso de material) que tienen por objetivo principal crear una situación significativa para que el niño construya la noción de algo nuevo utilizando material concreto.

Proceso pictórico: Incluye todas aquellas actividades (juego, uso de material) que tienen por objetivo principal que el niño dibuje o grafique las experiencias que ha tenido en su proceso concreto.

Proceso abstracto: Incluye todas aquellas actividades (juego, uso de material) que tienen por objetivo principal que el niño formalice en el lenguaje o en la escritura formal (frase matemática) todas las experiencias que ha tenido en el proceso concreto y pictórico.

CLASIFICACIÓN DE MATERIAL CONCRETO

Existen diversos criterios para realizar la clasificación de material concreto. Realizaremos la clasificación del material concreto de acuerdo con su elaboración y naturaleza cuantificable.

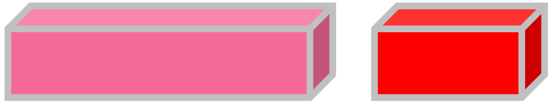
A. De acuerdo a su elaboración:

- **Material concreto no estructurado**

Son material concreto no estructurado aquellos que no fueron diseñados con un fin pedagógico pero cumplen un rol pedagógico, ya que han sido adaptados o se les ha otorgado un valor simbólico para representar un modelo matemático. Además, cumplen con las característi-cas de material concreto. Por ejemplo: semillas, piedritas, palitos de madera, paliglobos, botones de colores, hojas de papel, dados, entre otros.

- **Material concreto estructurado**

Son material concreto estructurado aquellos que han sido elaborados con un fin pedagógico, cumple las características de material concre-to y expresan explícitamente un modelo matemático. Por ejemplo: regletas Cuisenaire, policubos , base 10, tan gram, fracciones circu-lares, entre otros.



B. De acuerdo a la naturaleza del objeto cuantificable:

- **Material concreto discontinuo**

Cuando lo que mide tiene características discontinuas; es decir, se pueden distinguir sus elementos unitarios del conjunto a simple percepción. Gracias a este material puedo representar cada elemento con una regleta Cuisenaire . Por ejemplo, una regleta blanca, me permite representar la cantidad de abejas. En todos los casos represento los animales, objetos o frutas de uno en uno con las regletas. (Figura 1)

- **Material concreto continuo**

Cuando lo que mide tiene características continuas, es decir, no se pueden distinguir sus elementos o unidades que lo conforman a simple percepción. Estos materiales hacen de unidades no convencionales. Por ejemplo, la regleta me permite medir el largo de un lápiz o una mesa. La longitud es una propiedad continua. Las regletas Cusinaire permiten medir esas cualidades continuas de los objetos como: volumen, áreas, perímetro. (Figura 2).

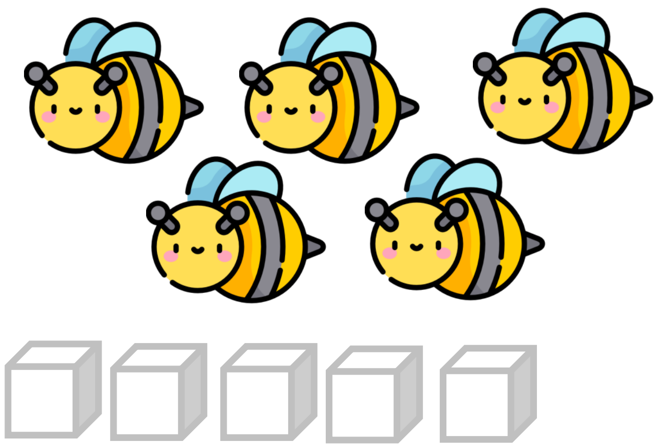


FIGURA 1

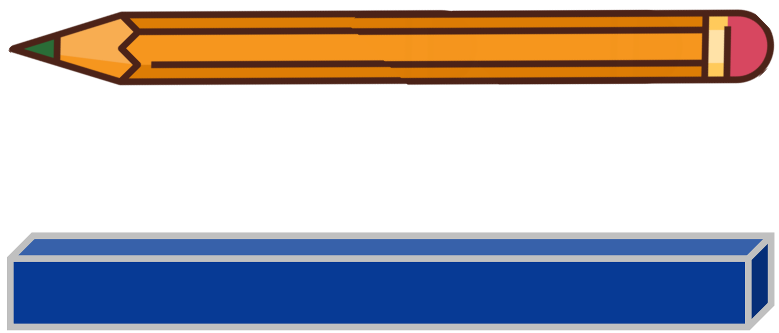
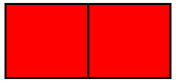


FIGURA 2

RECOMENDACIONES DE USO

En este libro encontraremos cómo usar las regletas Cuisenaire como material concreto, lo cual nos permitirá crear situaciones significativas de aprendizaje. Debemos considerar también los otros procesos: el proceso pictórico y el abstracto. Crear situaciones significativas de los tres procesos permitirá que nuestros niños construyan adecuadamente los conceptos matemáticos.

Concreto



Pictórico

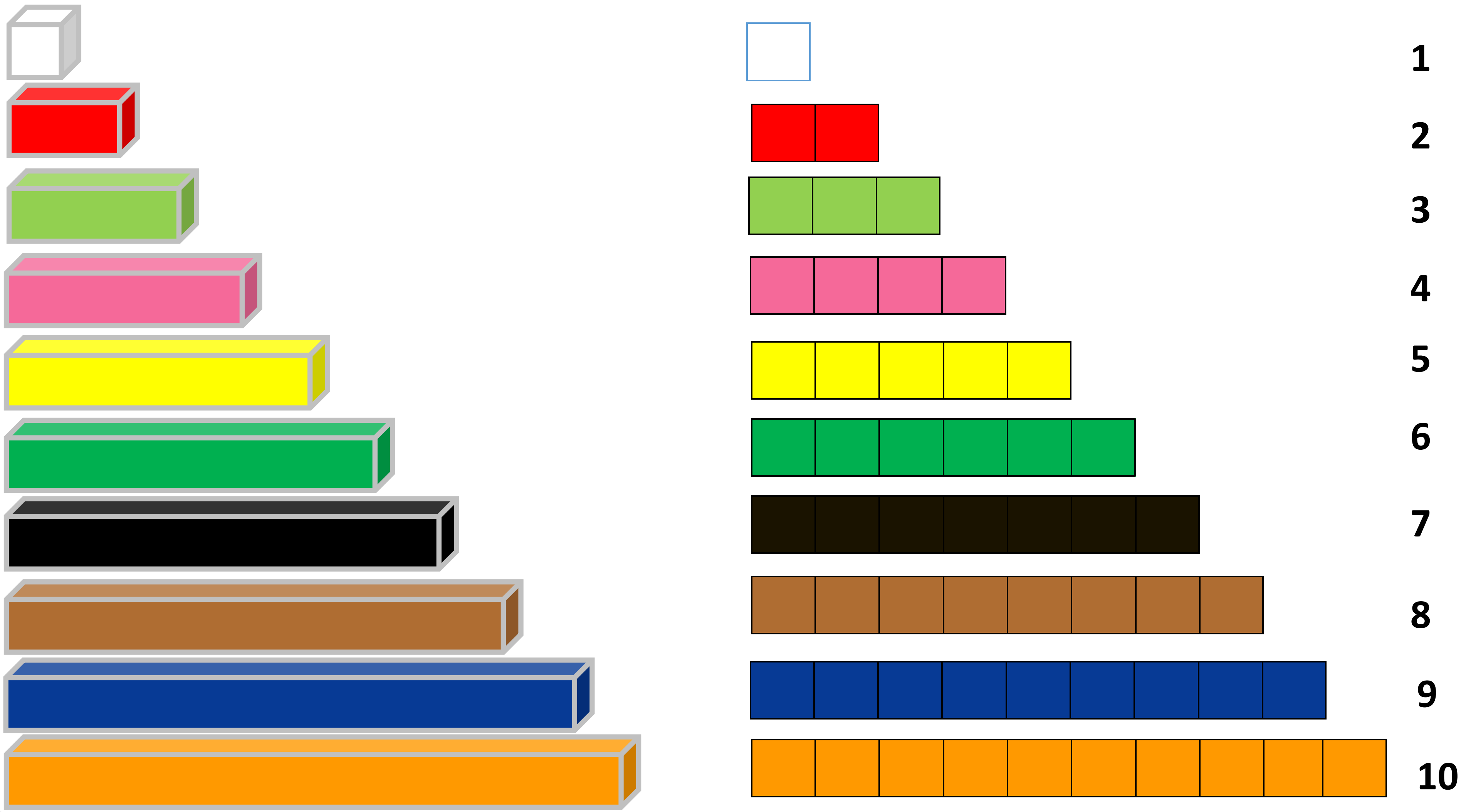
2

Abstracto

En la forma más sencilla de exploración, la regleta blanca representa una unidad y en función de esto, las otras regletas adquieren un valor del 1 hasta el 10. En ese contexto, la regleta blanca tiene una función de material discontinuo, es decir, representa a objetos de uno en uno. En ese mismo contexto las demás regletas tienen una naturaleza continua. Esta característica, de acuerdo, a la definición conceptual de este libro, hace que su uso requiera una metodología muy clara y precisa sobre su uso, ya que podría generar confusión en los niños, pero si se trabaja magistralmente tiene un potencial enorme como material concreto. Los colores son referenciales ya que la regleta roja, de acuerdo , con qué otra regleta se relacione o compare puede adquirir diferentes valores, incluso representar a la unidad o la mitad.

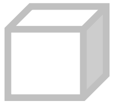
NÚMEROS DE COLORES

Tomando como referencia la regleta blanca que representa una unidad o el “1”, las demás regletas representan los números consecutivos hasta 10. En la imagen también se representa el proceso CPA, donde la experiencia sensorial se realiza con las regletas, luego se puede realizar el dibujo de las mismas para luego asociarlo al proceso de representación abstracta, llamada simbólico.

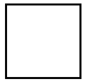


REPRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

Las regletas Cuisenaire son versátiles en su uso y a permiten el desarrollo del pensamiento lógico. Podemos representar la unidad con la regleta blanca, así las demás regletas representan los diferentes cardinales hasta diez o con representando números más grandes cuando se agrupan. Observa el proceso concreto, pictórico y abstracto para representar cada número.



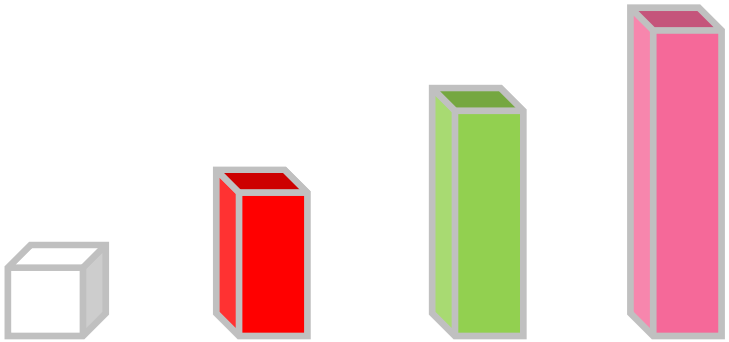
Concreto



Pictórico

1

Abstracto

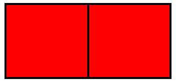


1 2 3 4

REPRESENTACIÓN DE LA UNIDAD

Las regletas Cuisenaire son versátiles en su uso y a permiten el desarrollo del pensamiento lógico. Podemos representar la unidad con la regleta blanca, como en la página anterior, sin embargo, qué sucedería si la regleta roja ahora nos representa la unidad ¿De qué color sería la regleta que representa al 2?¿Cómo podría armar sus consecutivos?

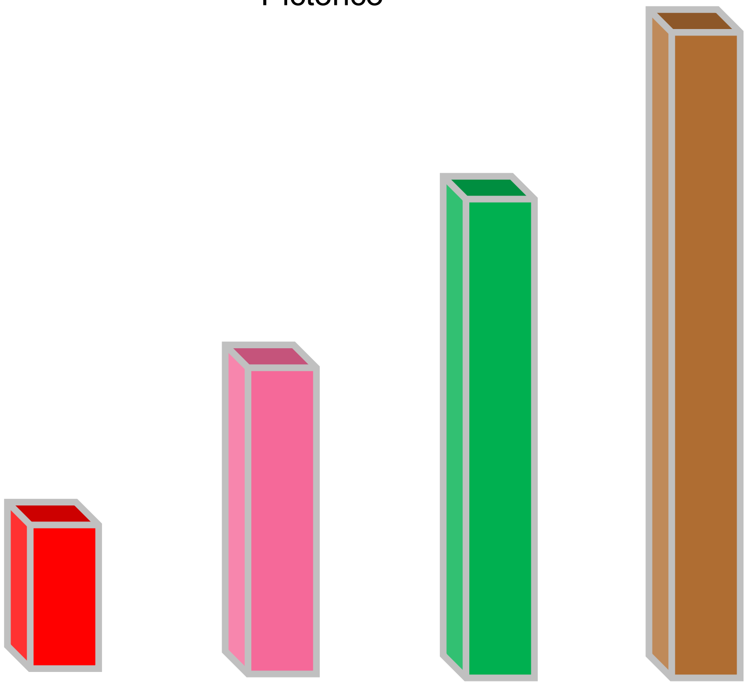
Concreto



Pictórico

1

Abstracto



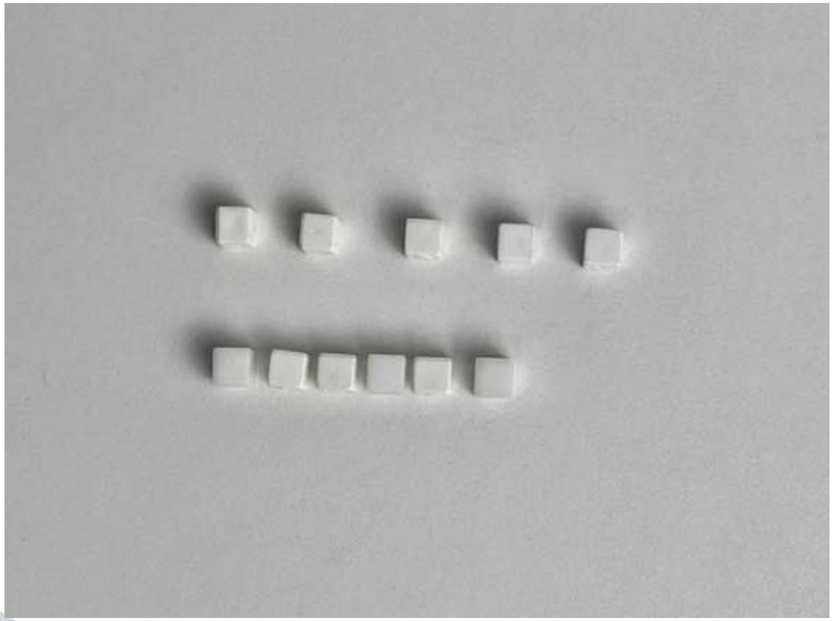
1 2 3 4

MARCO ESTRUCTURAL PARA EL USO DE REGLETAS CUISENAIRE

VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DIMENSIONES	INDICADORES	EJEMPLO
Programa Tocando los Números	Conjunto de procedimientos, técnicas, principios para utilizar de forma eficiente las regletas Cuisenaire.	Enfoque CPA	• Comienza todo proceso de enseñanza utilizando material concreto • Representa, dibuja, grafica lo que hayas explorado con tus materiales. • Representa con números, algoritmos formales lo que hayas descubierto en tu exploración concreta o pictórica.	Utilizaré tres regletas blancas para formar una torre. Realizaré un dibujo de la torre de tres. Representaré el número tres: “3” con las fichas circulares de regletas.
		Protocolo de comunicación	• En el libro regletas Cuisenaire, se te recomendará utilizar palabras o frase que han sido elaboradas para comunicar de una forma clara a los niños el uso de materiales.	Cada vez que agreguemos una regleta blanca a una torre diremos: “*uno más*”; cuando quitemos: “*uno menos”.*
		Protocolo de tamaño	• Se recomienda el tamaño estándar de las regletas donde la regleta blanca sea de dimensiones 1x1x1 cm3 , ya que permitirán luego vincular esta relación con las unidades estándar de medida.	No mezclaré regletas que no tengan estándar de colores, si utilizo las grandes para docentes utilizo, el mismo criterio.
		Protocolo de color	• Los colores sirven como soporte visual para establecer relaciones y asociaciones matemáticas, sin embargo, ninguna número tiene un color absoluto para su representación. Se deberá tener precaución que todas las regletas a utilizar tengan el mismo código de colores respecto a sus dimensiones.	En algunos países las regletas más pequeñas son blancas, en otros azules. En algunos países la regleta rosada es remplazada por una morada. Tener en cuenta estas consideraciones.
Regletas Cuisenaire	Material concreto para la enseñanza de las cuatro competencias matemáticas del Currículo Nacional de Educación Básica.	Inicial	• Trabajaremos nociones como: agrupación, conservación, correspondencia, secuencia, comparación de grupos.	Contenido en el libro.
		Primaria	• Trabajaremos conceptos como: contar, el número, sistema numérico decimal, cuatro operaciones, fracciones, decimales, área, perímetro, promedios, volumen.	Contenido en el libro.
		Secundaria	• Trabajaremos conceptos como: expresiones algebraicas.	Contenido en el libro.

CONSTRUIR A PARTIR DE UNA MATEMÁTICA INTUITIVA

Cuando a un infante se le pone una situación similar a la siguiente figura y se le pregunta ¿Dónde hay más regletas (palitos)? ¿En cuál de las líneas (filas)? es probable que responda que en la más larga porque asocian la idea de cantidad a lo que ocupa un mayor espacio o longitud. Esto es también porque aún no han construido el concepto del número y otros conceptos que están antes del número que son esenciales para su construcción, por ejemplo: las nociones pre numéricas. Cuando nacemos, nuestro cerebro tiene incorporado una matemática intuitiva, que es la que nos permite intuir desde la antigüedad si debíamos enfrentar o no una jauría de acuerdo a su cantidad o saber quién es más alto. Esto sin saber contar y medir. A partir de esa matemática intuitiva vamos a construir una matemática hipotética—deductiva.



NOCIONES PRE NUMÉRICAS

Para construir una matemática deductiva y conceptos más complejos como la construcción del concepto del número (que es diferente que saber contar números), primero se debe construir unas ideas lógicas que se encuentran antes que el número, estas son llamadas nociones pre numéricas o de preoperatoria. En la misma línea metódica de este libro vamos a utilizar material concreto para que nuestros niños puedan construir estas nociones.
Las nociones que trabajaremos serán las siguientes: agrupación, conservación de cantidad, secuencia, correspondencia.
El material que utilizaremos, como protagonistas, en este libro son las regletas Cuisenaire.

LA AGRUPACIÓN

Comencemos la agrupación mostrándoles a los niños dos grupos de regletas de colores diferentes (rojo y azul). Coloque mezcladas las regletas rojas y azules encima de la mesa. Podemos mostrarle un táper donde deban colocar los regletas solo del color rojo. Muéstreles usted cómo hacerlo, escoja solo una regleta roja cada vez: de uno en uno. Para que el niño lo imite. Al principio, es posible, el niño querrá llevar todo lo que atrape con la mano, pero poco a poco diferenciará el color y la cantidad. Haga sonar cada vez que coloque una regleta roja sobre el táper. Coloque una cantidad de 5 regletas rojas y 5 azules, no coloque muchos al principio porque el niño se cansa. A medida que progrese en su percepción y manejo manual puede agregar más regletas de colores para agrupar.

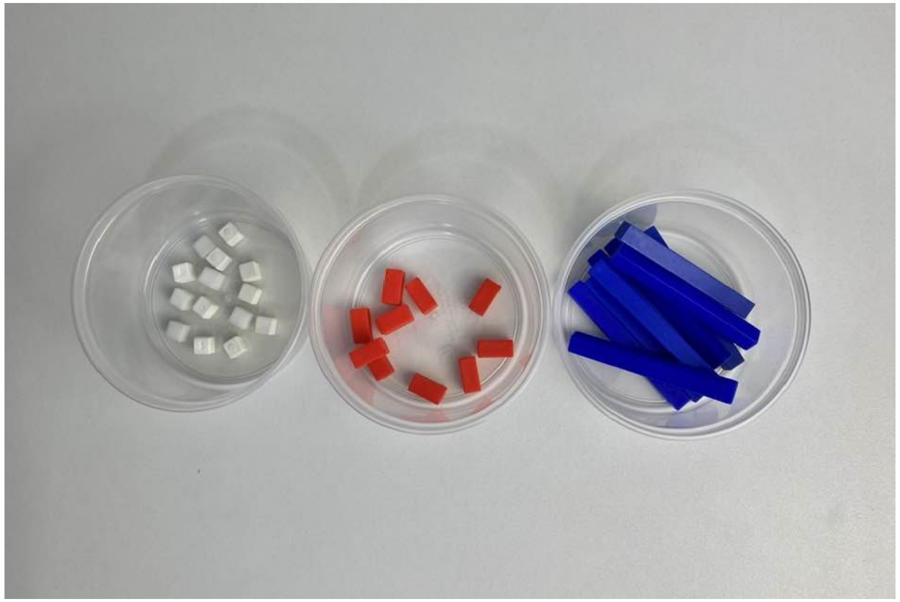
LA CLASIFICACIÓN

A medida que el niño comience a observar las cualidades de los objetos: color, peso, tamaño, forma, sonido podrá diferenciar las diferenciar dentro de una clase; por ejemplo, color: se dará cuenta que hay de color rojo como también de verde y amarillo.

Esto les permitirá formar grupos y cada grupo dentro de una clase. Las regletas permiten en su estado más sencillo realizar una clasificación por colores.

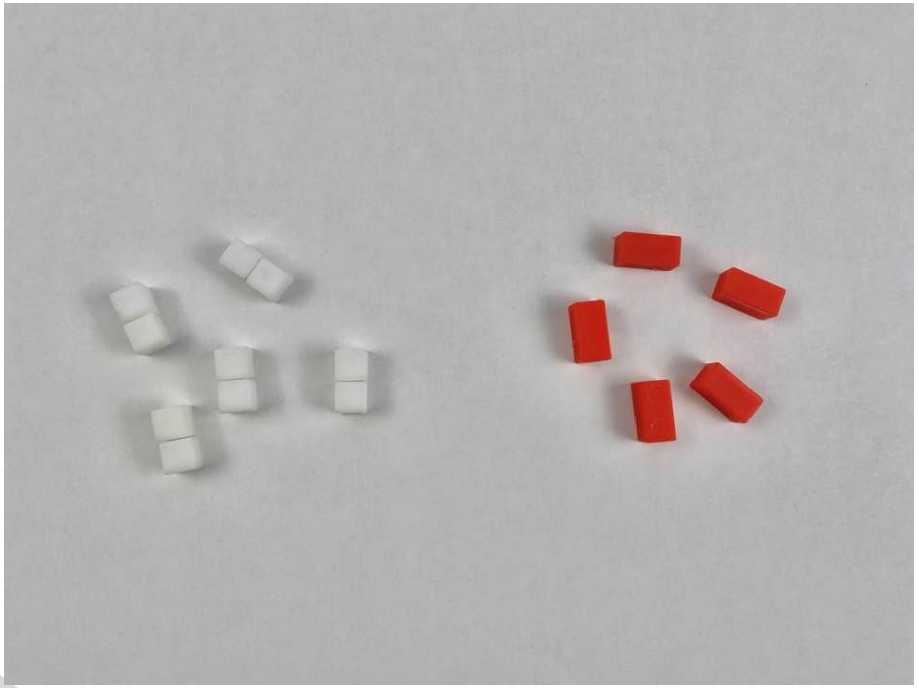
Aquí el proceso mental es percibir, además de que todos los elementos de un grupo sean semejantes; también percibir las diferencias que tienen los objetos para no formar parte del grupo.

Quienes formen parte del grupo tiene que tener por lo menos una característica en común con el grupo.



EL NÚMERO Y LA CLASIFICACIÓN

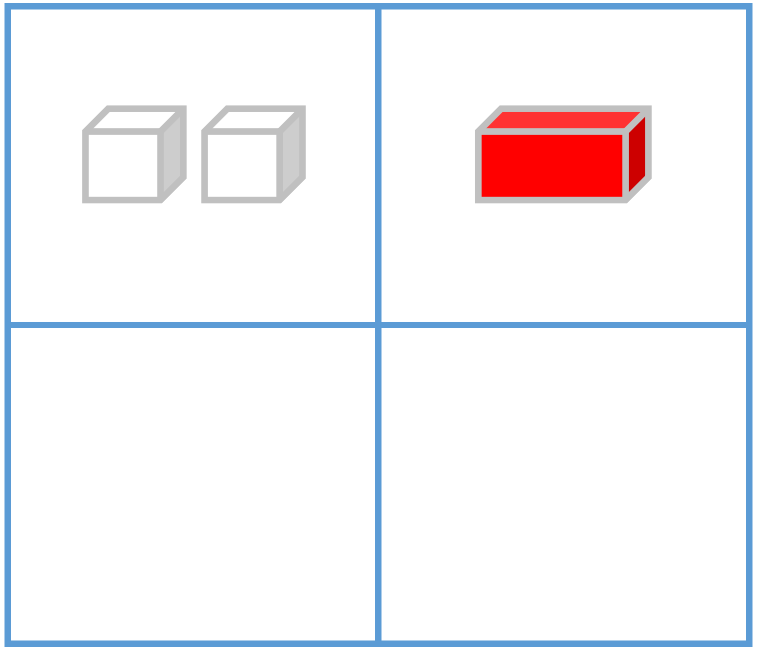
La clasificación es una noción pre numérica, esto significa que es necesario comprenderla antes de construir el número. ¿Por qué es importante clasificar como requisito para construir el número? Pues solo luego de formar muchos conjuntos que tengan dos elementos –por ejemplo- se llega a construir la idea de lo que significa el número dos. En la siguiente figura podemos ver dos conjuntos: el primero del 2 que representadas por regletas rojas y el conjunto del número tres representadas por regletas verde claras. El número es la propiedad cardinal de un conjunto.



JUEGO DE CLASIFICACIÓN

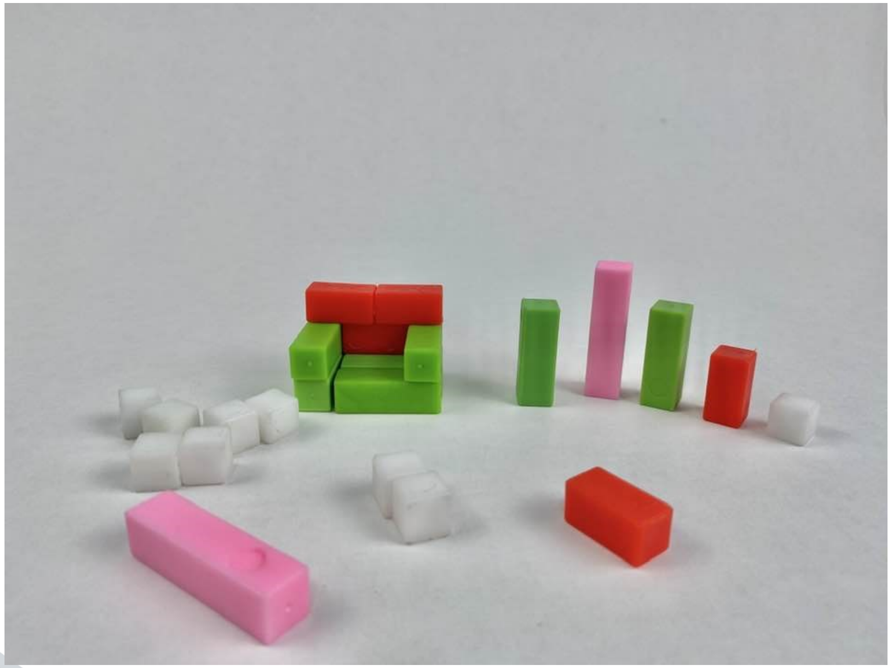
Juego "*Igual, pero diferente*"

Observa la plantilla que se encuentra debajo. Puedes elaborar una igual con una hoja A4 o cartulina. En el primer cuadro coloca una regleta blanca, ahora en los demás coloca también otros objetos que sean uno (una llave, un lapicero, una piedra). Podemos realizar esta misma actividad, ahora con la regleta roja que representa el dos y así sucesivamente. Se recomienda en esta actividad solo explorar hasta el tres, en una primera exploración, en inicial.



CONSTRUCCIÓN LIBRE CON REGLETAS

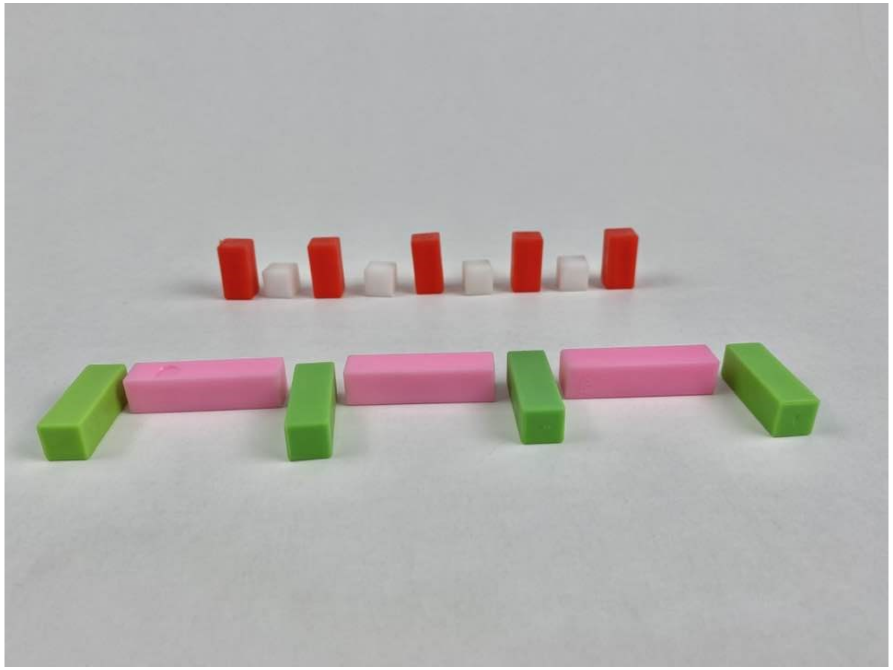
La construcción libre permite a los niños descubrir las propiedades de los objetos como la forma, dureza, color, peso. Además las regletas permiten construir representaciones de animales, personajes, objetos. La construcción libre pertenece a la etapa de juego de exploración, donde los niños van a construir de acuerdo a sus criterios. El desarrollar la exploración libre permitirá que los pequeños conozcan las propiedades visibles de las regletas que son su tamaño, peso y color, con los que trabajaremos en este libro.



LA SERIACIÓN

Es una noción donde se puede visualizar una sistematización de objetos siguiendo un orden o secuencia establecido previamente. En la figura de fondo se observan regletas rojas y azules, estas van primero una azul, luego uno rojo, azul, luego un rojo.

Esto que se repite siempre “azul y rojo” le llamamos el patrón. En la siguiente figura también hay una secuencia de color con un patrón: amarillo– verde, pero además se agrega el cambio de orientación de una regleta respecto a otra (horizontal-vertical). Se puede seriar con las regletas por uno o más atributos de color, tamaño, orientación, forma, cantidad.



LA SECUENCIA

Para que los niños se enfoquen en la secuencia y encuentren el patrón debemos tener las siguientes consideraciones:

- En la secuencia debe repetirse por lo menos tres veces el patrón.

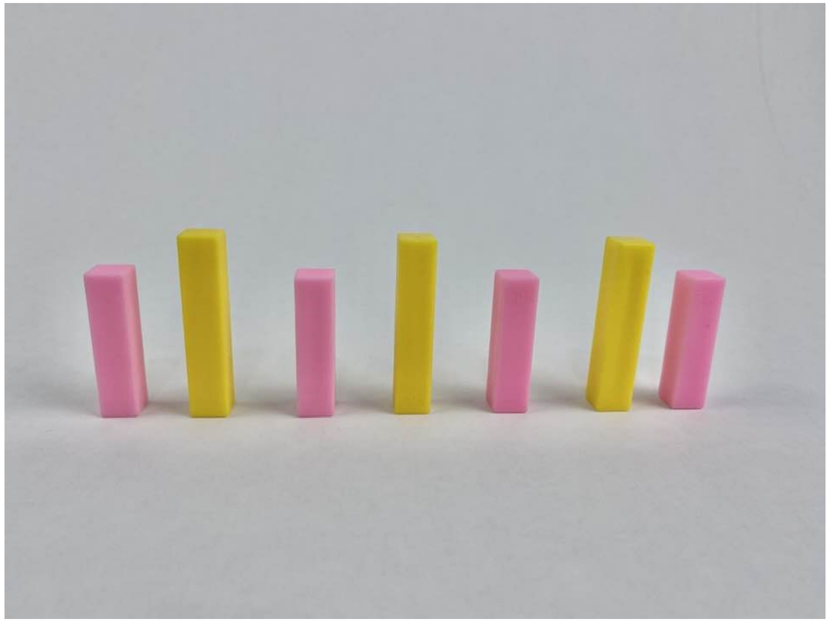
- En el ejemplo se realiza una secuencia por tamaño: regleta grande– regleta pequeña. El trabajo de los niños es percibir el patrón y seguir agregando las regletas que correspondan.

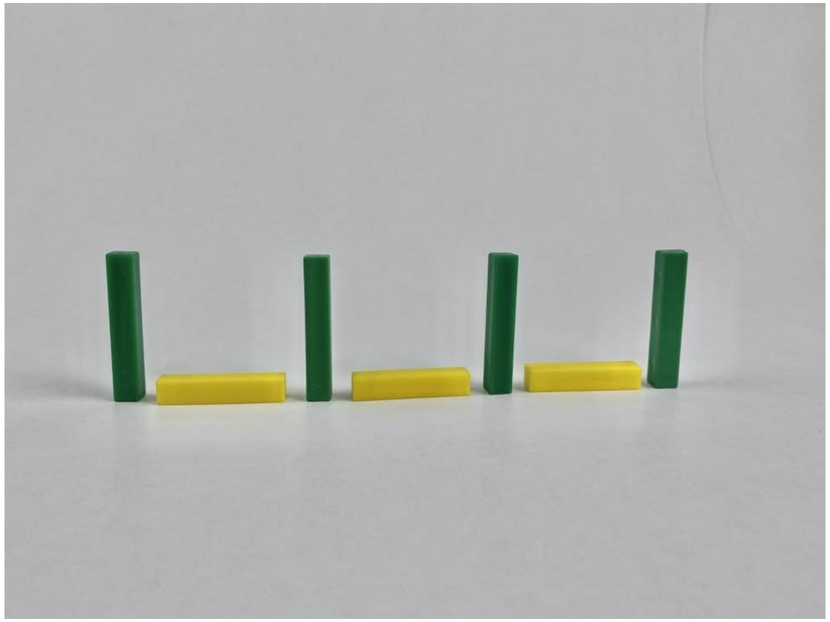
- Es preferible mostrar solo algunos colores, en el caso de los infantes, para que se enfoquen en encontrar el patrón.

- Siempre debemos verbalizar, es decir, nosotros damos el primer ejemplo completando la construcción y enfatizando la cualidad: regleta grande, regleta pequeña, regleta grande, regleta pequeña.

- En el siguiente ejemplo el criterio es la posición: vertical– horizontal, se puede utilizar palabras más sencillas como parado– echado o torre– tren.

- Una vez que hayamos realizado una secuencia y verbalizado, le pedimos a los niños que continúen la secuencia.

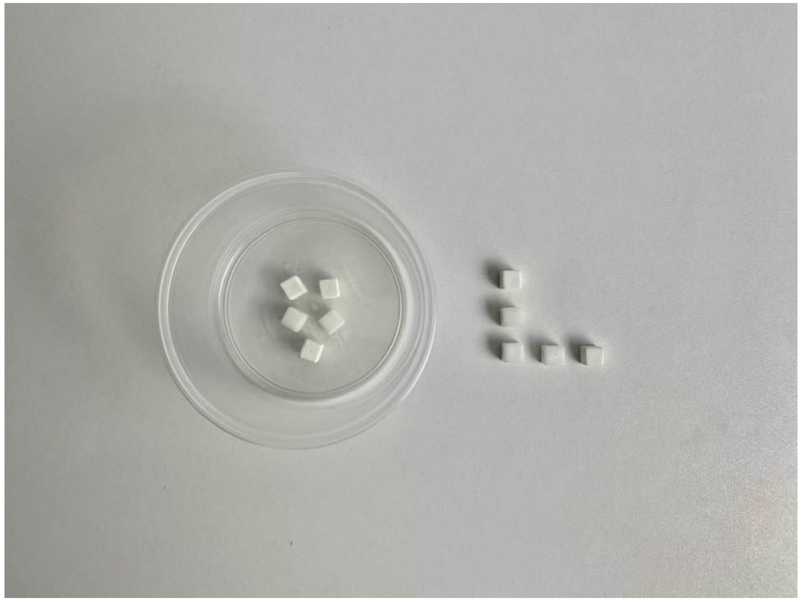


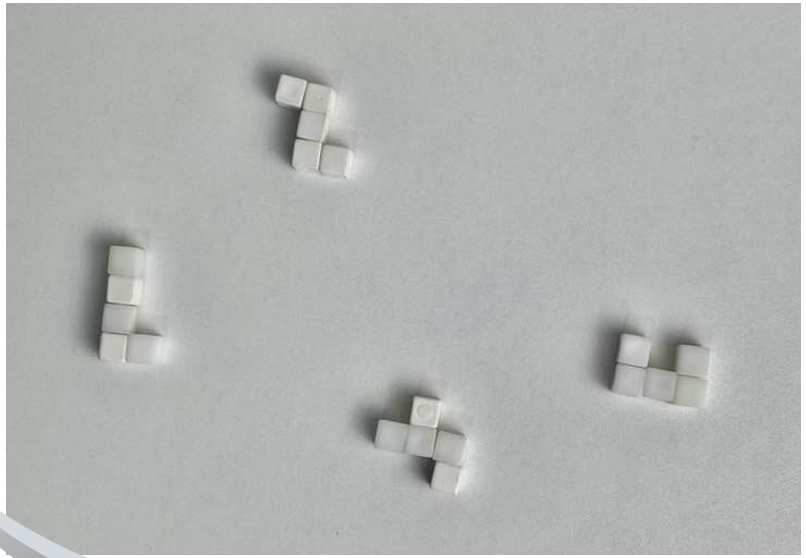


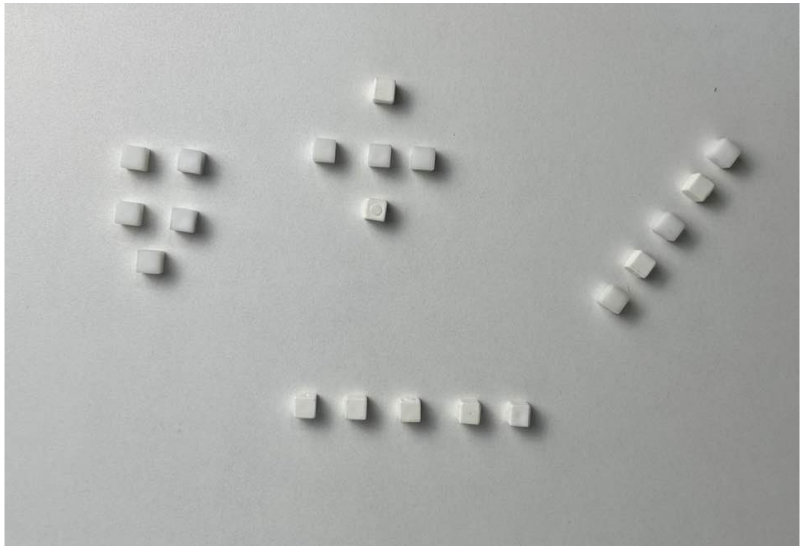
CONSERVACIÓN DE CANTIDAD

La conservación de cantidad es esencial para la construcción del número. Esta etapa es la síntesis de la clasificación , la seriación , la correspondencia. Hay conservación cuando el niño es capaz de percibir que la cantidad de elementos que forman los conjuntos, permanece invariable aunque se le haga cambios de posición (material discontinuo) o forma (material continuo).

Muéstrele a los niños 5 regletas blancas, pídales que los cuente, cambie la posición de una de ellas y vuelva a preguntar cuántas hay. Su respuesta debe ser siempre 5. En el otro caso, haga una construcción con 5 blancas, pídales que las cuente, cambie la forma de su construcción y vuelva a preguntar cuántas son.







COMPARANDO GRUPOS: CUANTIFICADORES

En dos platos colocamos una cantidad diferente de regletas blancas. Se debe notar que hay más en un táper, respecto del otro.

Preguntamos:

- ¿Dónde hay muchas regletas?
-- ¿Dónde hay pocas regletas?

Los niños saben esto de manera intuitiva, se guían por lo perceptual (cuál ocupa mayor espacio). Utilizamos las palabras protocolares: “hay muchos” y “hay pocos” para referirnos a los grupos.

Cuando los niños reconozcan que hay más en un plato de regletas, le presentamos un plato con aún más regletas que el anterior y preguntamos:

- ¿Dónde hay más regletas?

- ¿Pero me habías dicho que había más aquí (en este otro plato)?

Aquí, presentamos una situación donde reflexionamos que un grupo puede ser más que otro; sin embargo, también puede ser menos que otro, si lo comparamos con otro más grande.

Utilizamos las palabras protocolares: “hay más que”, “menos que” para referirnos esta nueva relación al comparar varios grupos.

COMPARANDO GRUPOS: CUANTIFICADORES

Mostramos tres platos uno con muchas regletas blancas, otro con pocas y otro con ninguna. Preguntamos:

“¿Cuál de todos tiene más?, ¿Cuál tiene menos?”

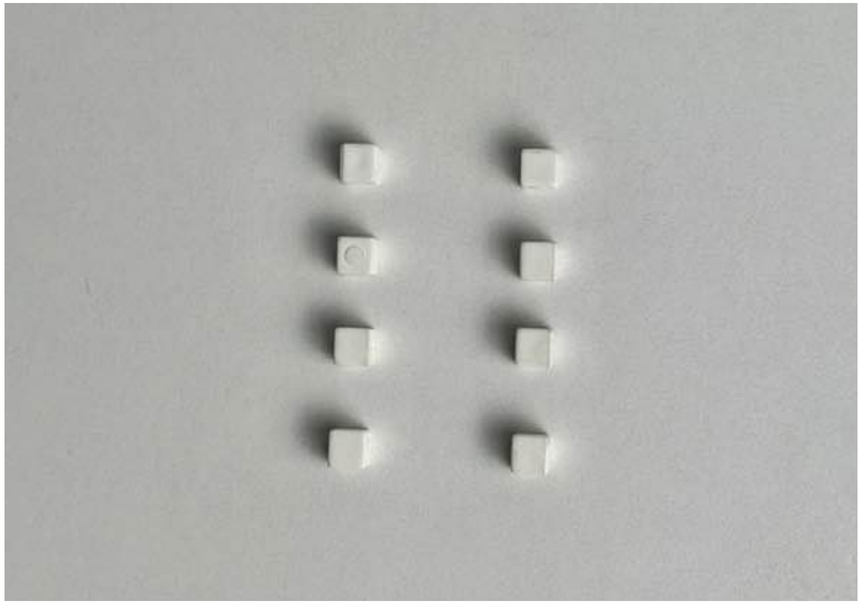
Observamos el plato sin regletas y preguntamos “¿Qué podemos decir respecto a él?, ¿Cuántas regletas tiene?”

-Nada. O está vacío de regletas.

Podemos establecer un primer lenguaje de comparación con: hay muchos, hay pocos, hay nada. Luego uno con mayor precisión: hay más que, hay menos que, hay tantos como. Un paso más allá es la correspondencia, esta nos permitirá con mayor precisión establecer una comparación de grupos.

CORRESPONDENCIA

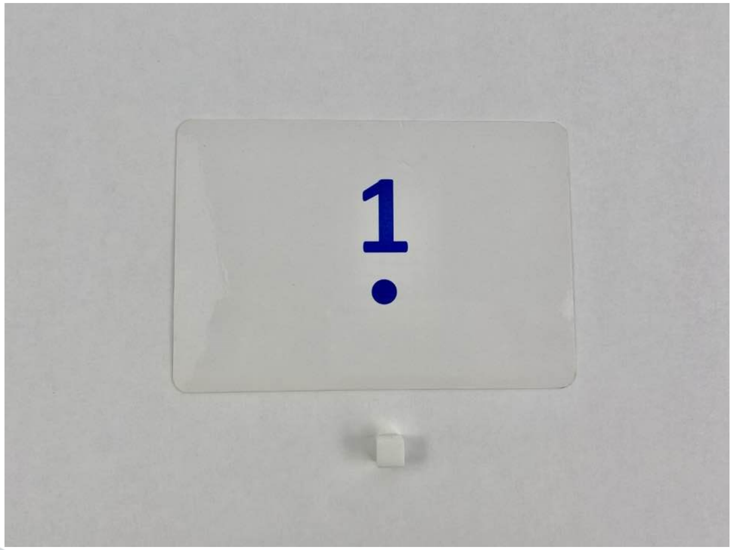
La correspondencia uno a uno es una de las relaciones más importantes entre conjuntos y es una idea lógica fundamental en la construcción del concepto de número. Nos permite comparar los conjuntos en términos de: tener tantos elementos como, tener más elementos que , tener menos elementos que. Este recurso nos permite además, realizar la igualación de conjuntos diferentes en número. Para los niños es un recurso para contar, a cada elemento de un conjunto le corresponde otro elemento de otro conjunto, por ejemplo comparar el grupo de cangrejos con el grupos de regletas blancas.



CONTEO 1

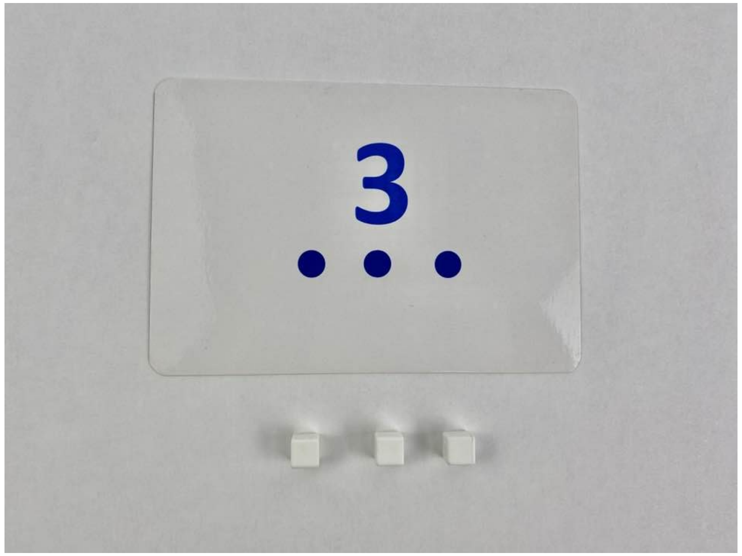
Hay dos momentos en el conteo: el primero es la retahíla, cuando los niños cuentan por contar, sin algún sentido o criterio más que el repetir lo que ha escuchado. Ejemplo:

-Uno, dos, tres, cuatro, seis, veinte... los niños solo repiten las palabras, no saben cuándo comienza un número y termina otro, tampoco tienen una clara noción de orden y cantidad respecto a lo que están expresando del nombre de los números.   El segundo momento, es cuando asocian el nombre de un número a un material concreto: regleta blanca. Deberán decir uno y coger una regleta, dos y seleccionar dos regletas blancas o su equivalente una roja, así en adelante.



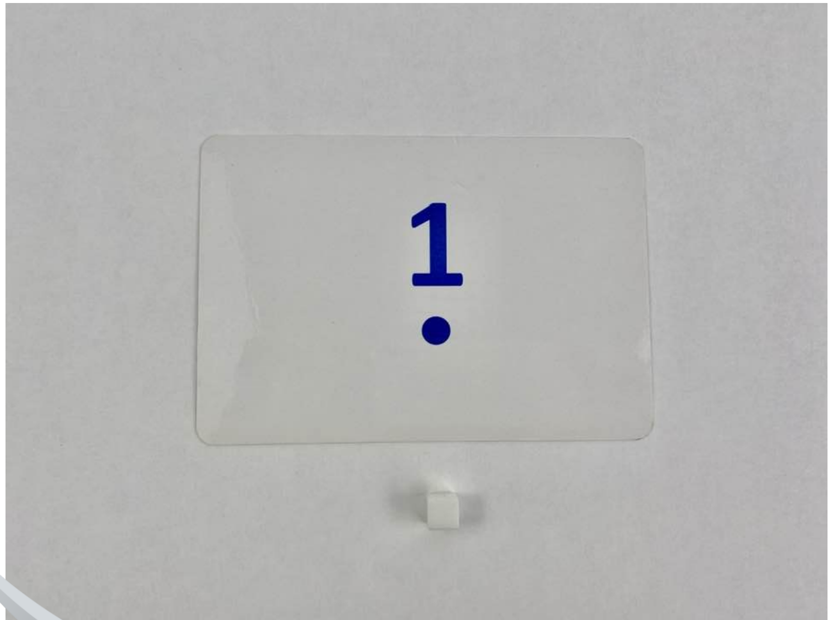
CONTEO 1

Se recomienda empezar a contar de esta manera, asociando el nombre de un número regletas blancas o su equivalente . Aquí se trabaja con las regletas en su formato discontinuo (de uno en uno). Se recomienda empezar desde el uno hasta el tres, luego del uno hasta el cinco, luego del uno hasta el nueve. No se trabajará aún con el cero. Una vez que los niños cuentan asociando un material concreto a el nombre del número se le puede pedir dibujar esa cantidad de regletas y en otro momento representar el símbolo formal del número. En inicial se puede optar, luego de la primera asociación, el número-nombre a mostrar una carta pedagógica numérica como en la imagen.



CONTEO 2

Los niños vuelven a contar, esta vez construyendo torres y trenes. En la construcción del número uno, no se ve alguna diferencia, con respecto al anterior conteo porque es un solo elemento; sin embargo, a partir del dos en adelante se representan tanto con regletas blancas discontinuas como con su equivalente en otro color. Se recomienda por parte del docente o formador utilizar la frase: “y uno más hacen dos”, “dos y uno más hacen tres”, ”tres y uno más hacen cuatro, en adelante”. Esto es muy importante porque desarrolla la noción de secuencia.

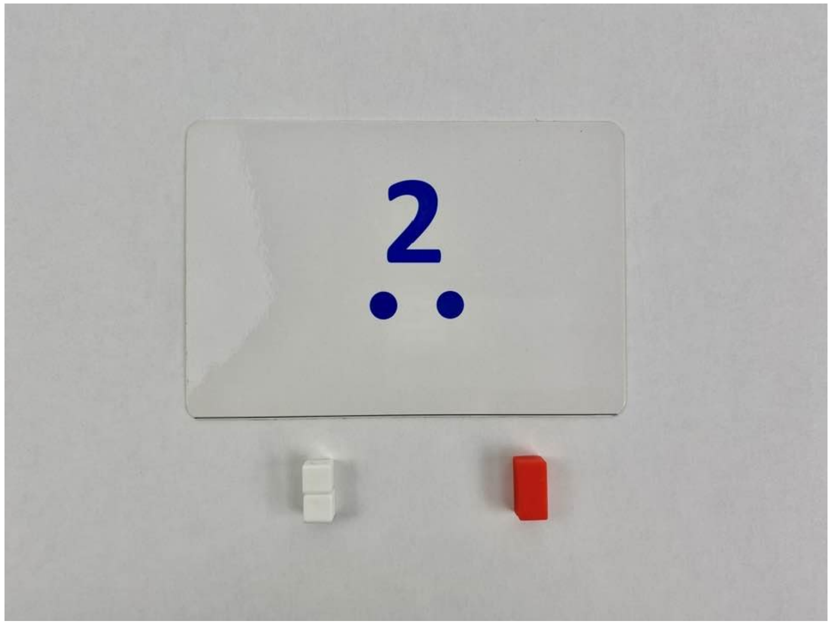


CONTEO 2

La inclusión de clase es que los niños asocien la palabra - número a toda la torre que han construido. Por ejemplo, en la imagen, los niños cuentan hasta dos (con dos blancas), luego la representan con una roja. Asocian la torre de dos a la cantidad dos en un solo bloque.

En el anterior conteo los niños asociaba la palabra número solo a una sola regleta.

Utilizamos la palabra tren (ver bloque rojo) cuando nuestra construcción tenga una posición horizontal y torre (ver bloque azul) cuando nuestra construcción tenga una posición vertical.

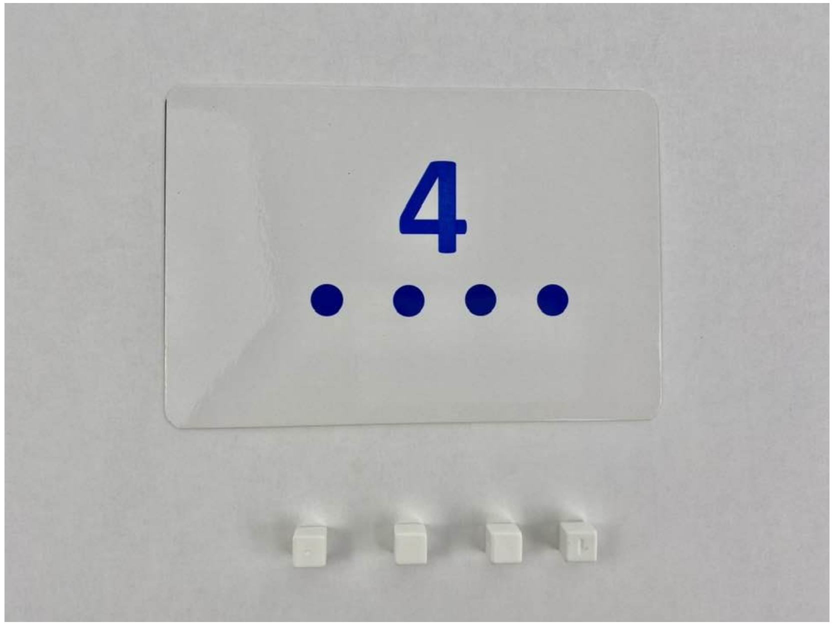


CONTEO 3

A medida que los niños se familiaricen con el conteo en su forma discontinua y continua como en las imágenes del cuatro, las nociones pre numéricas (que son ideas lógicas), nos ayudarán a establecer comparaciones y relaciones entre los números que estamos conociendo.

Podemos preguntar, por ejemplo: “¿Qué número es mayor, el tres o el cuatro? ¿Qué número es menor, el cinco o el dos?”

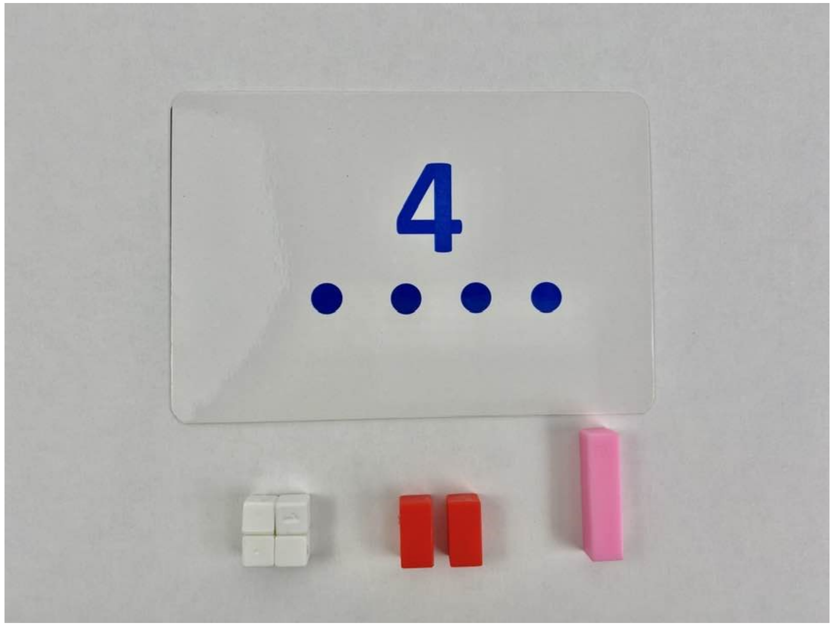
Podemos indicar: “Cuenta a partir del dos hacia adelante. Cuenta a partir del cuatro hacia atrás.”



CONTEO 3

Podemos utilizar los colores de las regletas Cuisenaire para diversos juegos de conteo, por ejemplo:

- Cuenta hasta cuatro con tus regletas blancas.
- Representa las cuatro regletas blancas con la verde.
- Cuál es la regleta que representa cinco.
- Cuál es la regleta que representa seis.

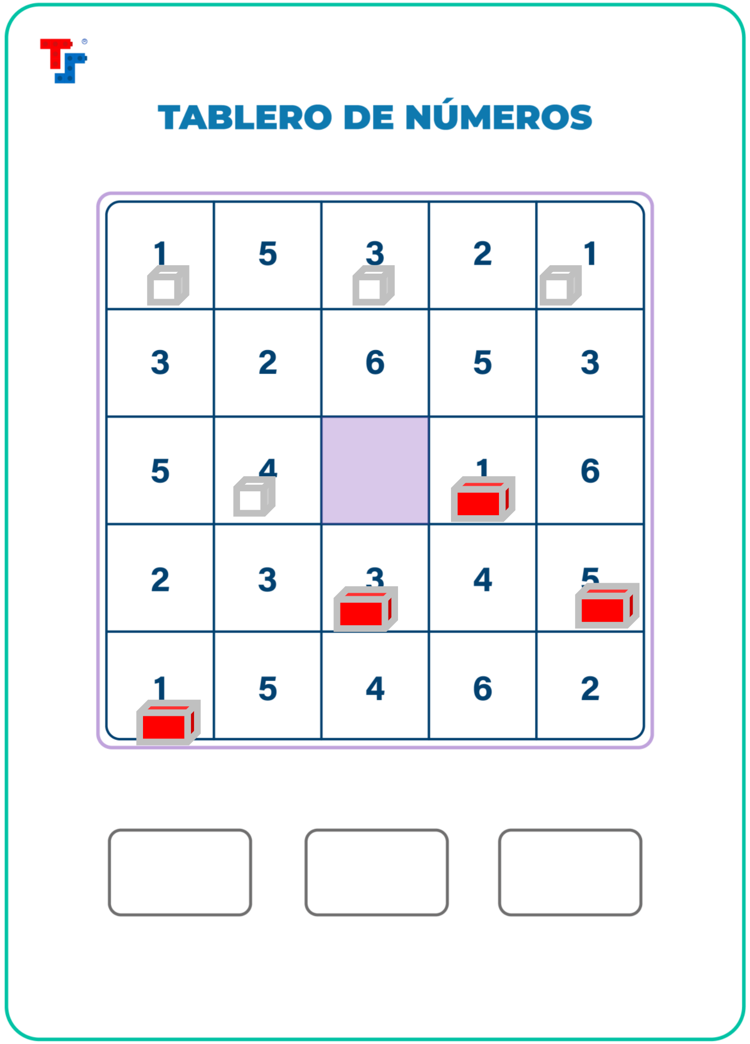


JUEGOS DE CONTEO

Línea cuatro: este juego consiste en ordenar y completar un grupo de cuatro regletas en una línea horizontal, vertical y diagonal. Gana quien completa la línea. En las siguientes páginas están las descripciones del juego.

Pentomino: consiste en formar diferentes estructuras con cinco regletas blancas. En las siguientes páginas están las descripciones del juego.

Tablero de los números: es un tablero con los números del uno al seis. Se juega con un dado. Se lanza el dado y el número que salga será representado y colocado con una regleta en el casillero que corresponde. Cada número tiene un color, se deberá elegir ese código estándar de colores.

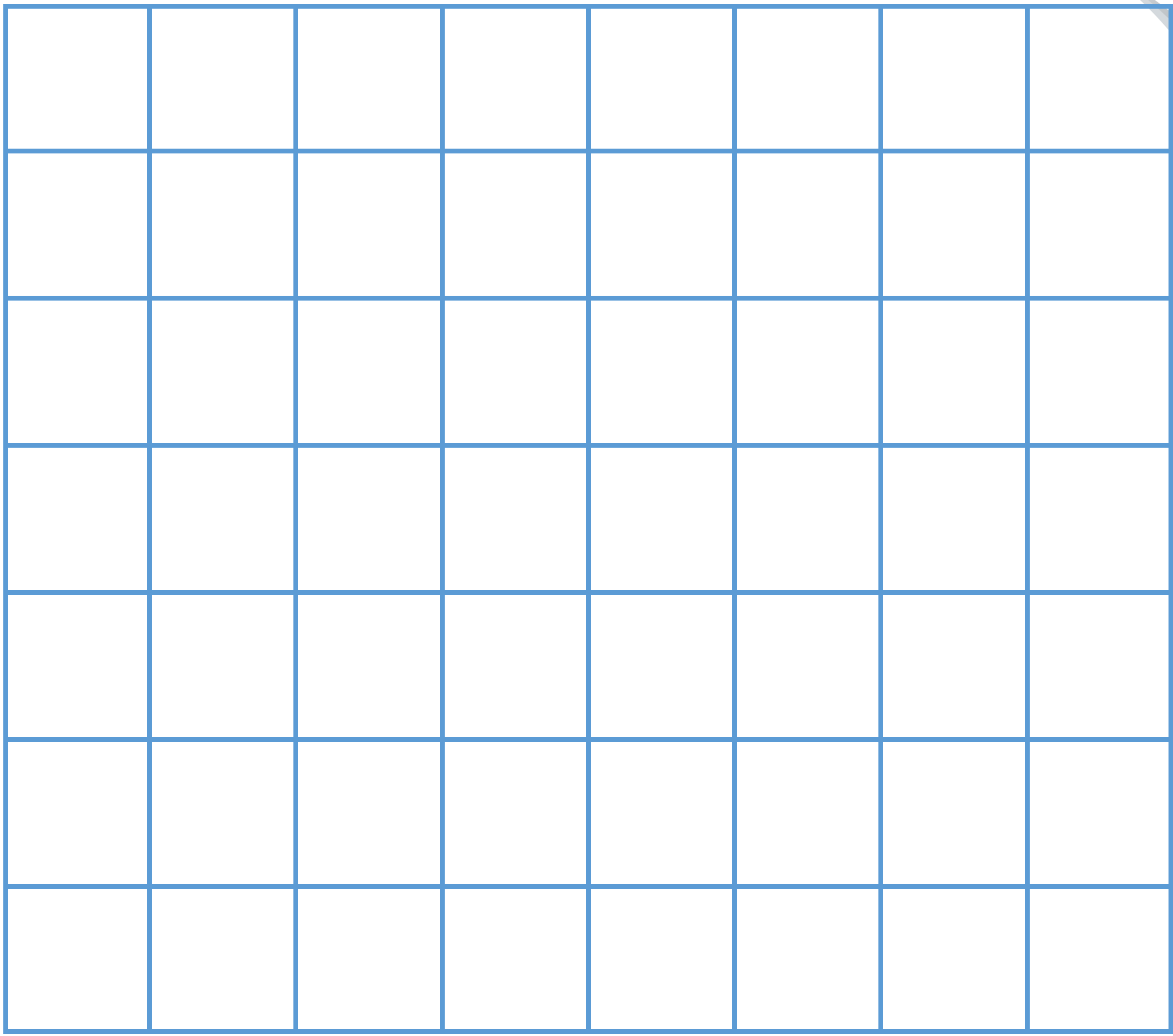


ACTIVIDAD

“Línea 4”

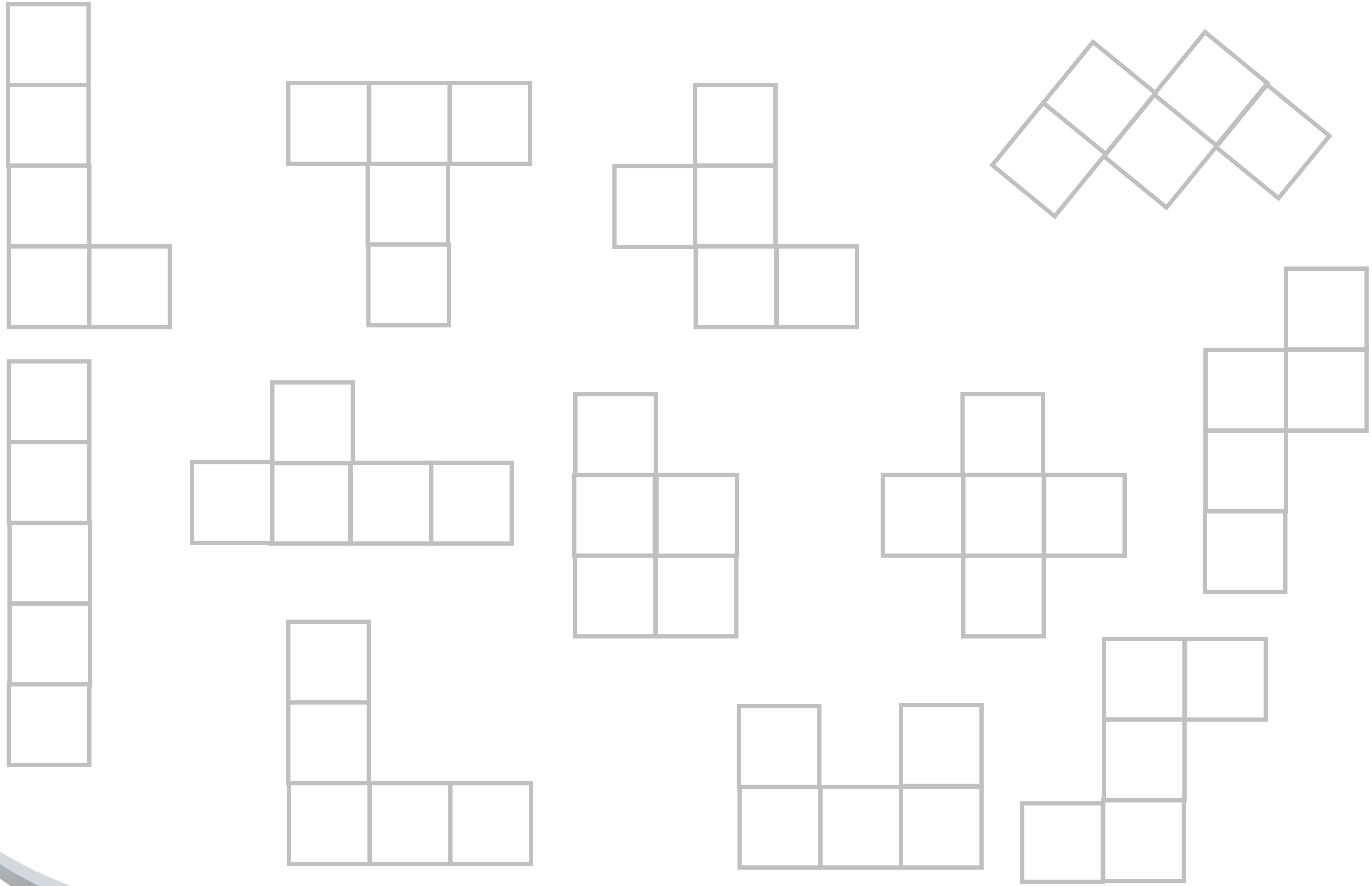
INSTRUCCIONES

- Es un juego en pareja donde cada participante intentará formar primero una línea de 4 regletas.
- La línea puede ser vertical (I), horizontal (-) o diagonal (/).
- Quien logre formar la primera línea de 4 , ganará el juego.
- Se jugará por turnos.



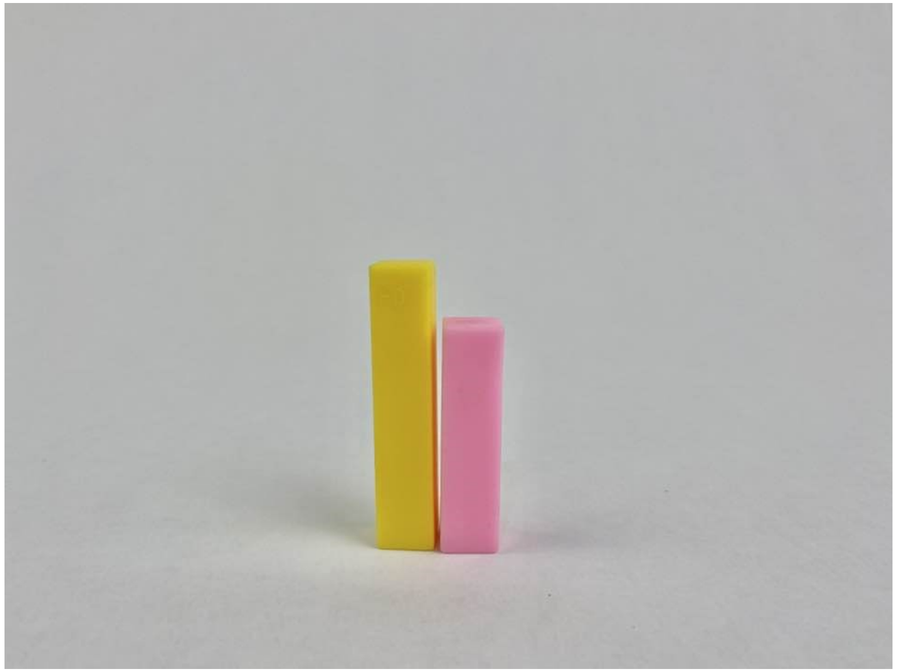
PENTOMINO

Forma conjuntos de cinco regletas blancas, luego intenta formar todas las figuras posibles.



COMPARANDO NÚMEROS

Si hemos llegado a este nivel es porque nuestros niños pueden construir si le solicitamos, por ejemplo: una torre de cinco, puede contarlo y reconocer el símbolo del número (numeral). Aquí, podemos realizar comparaciones entre los números. Comparar es establecer una relación teniendo en cuenta un punto de referencia. Los números son abstractos, sin embargo, las regletas nos ayudarán por sus tamaño y colores a tener conclusiones válidas de estas comparaciones.



COMPARANDO NÚMEROS

Le pedimos a nuestros niños que comparen una regleta rosada con una amarilla. Preguntamos:

- ¿Qué números representan?
- ¿Cuál es mayor?
- El cinco
- ¿Por cuánto es mayor?
- Por uno
- ¿Cuál es menor?
- El cuatro
- ¿Por cuánto es menor?
- Por uno

Podemos realizar muchas comparaciones entre los números. Recordar que las regletas que comparemos se deben diferenciar solo en una unidad y no más.
Si nuestros niños han respondido muy bien las preguntas, por principio de reversibilidad podemos agregar las siguientes preguntas:

- ¿Cómo puedo hacer para que el cuatro tenga tantos como el tres?
-¿Cómo puedo hacer para que el cinco tenga tantos como el cuatro?

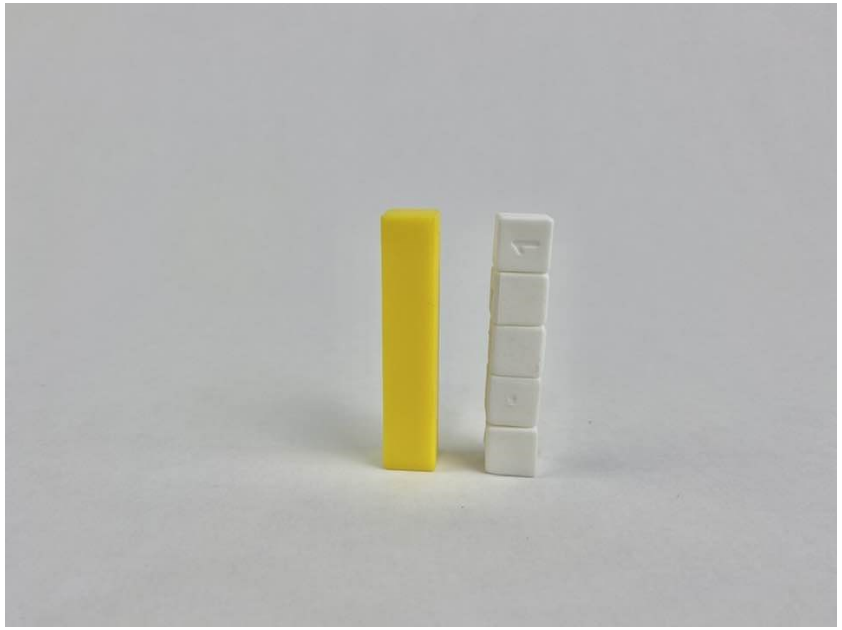
COMPARANDO NÚMEROS

Le pedimos a nuestros niños que comparen dos regletas amarillas. Preguntamos:

-¿Cuál es mayor?
- Los dos son cinco.

Entonces podemos decir que hay tantos aquí como allá, es decir, la misma cantidad.

Esto es muy abstracto, los niños pueden visualizar la propiedad de ser cinco en dos grupos diferentes. También es válido la representación con las regletas blancas de la misma cantidad.



COMPARANDO NÚMEROS

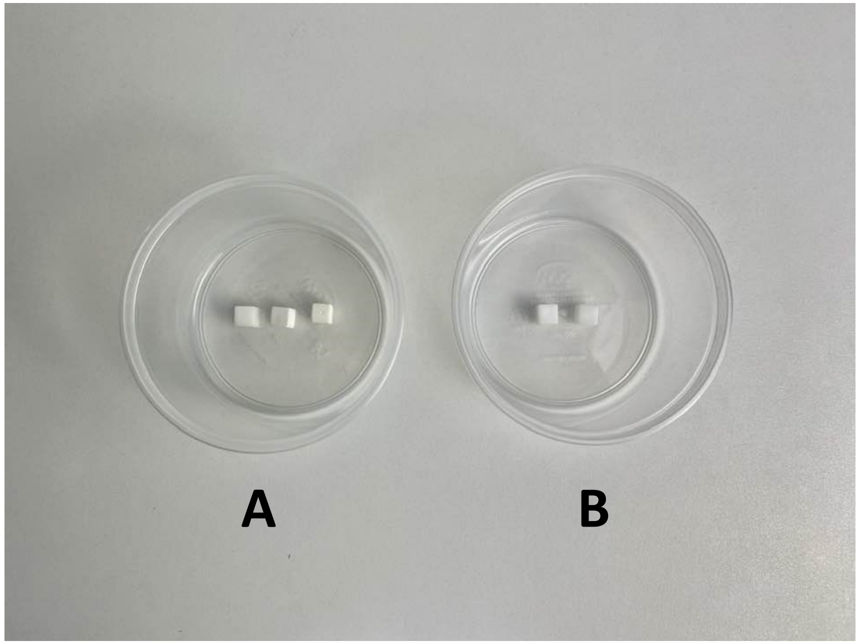
Observa el grupo A y el grupo B. ¿Cuántas regletas tiene el grupo A?¿Cuántas regletas tiene el grupo B?

¿Quién tiene más?¿Quién tiene menos?

Haz que el grupo B tenga tantos como el grupo A

Haz que el grupo A tenga tantos como el B

Además de comparar estamos realizando una igualación de los grupos. Obsérvese también que trabajamos las regletas como material discontinuo.



ORDENAR LOS NÚMEROS

Ahora que ya sabemos comparar e igualar los números, su nombre y cómo se representa. Podemos ordenarlos en una secuencia. Recuerda que vimos la secuencia como noción pre numérica, ahora vamos a ordenarlos de menor a mayor como en la imagen. Si observas a detalle después del uno sigue el dos, después del dos el tres, luego el cuatro y así sucesivamente. Pero ¿Por qué?

¿Por qué después del dos sigue el tres y no el cinco?

¿Por qué contamos 1,2,3,4, 5 y no 1,3,5,4,3?

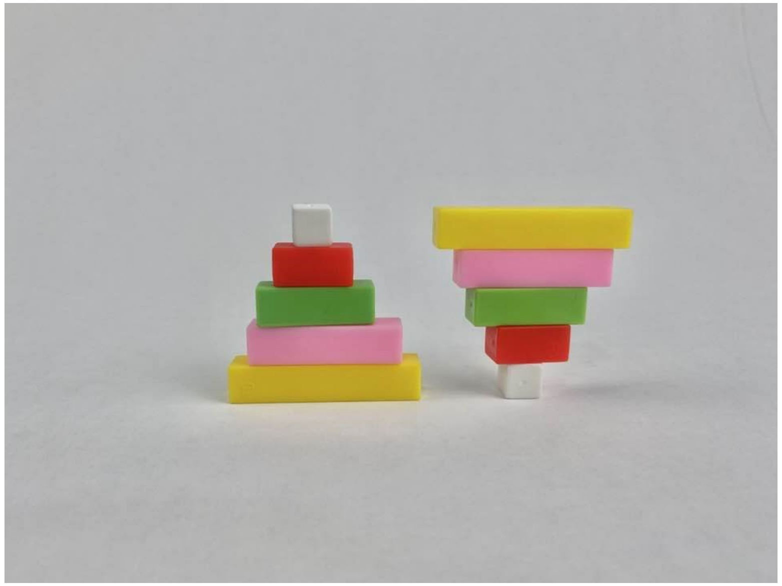
ORDENAR LOS NÚMEROS

Recordemos que cuando empezamos a construir los números con el protocolo de comunicación: "y uno más" , "uno menos". Esto es muy importante porque ayudará a los niños a reflexionar que después del uno sigue el dos porque uno y uno más hacen dos.

Después del dos sigue el tres, porque dos y uno más es tres.

Después del tres sigue el cuatro, porque tres y uno más es cuatro.

Después del cuatro sigue el cinco, porque cuatro y uno más es cinco. Los números se construyen agregando uno más.



El CERO

Recordamos el protocolo de comunicación: “uno menos”. Representamos el cinco con la regleta amarilla A continuación representamos el número que es uno menos que el cinco de la siguiente manera:

Tenemos cinco y uno menos, ahora tenemos cuatro.

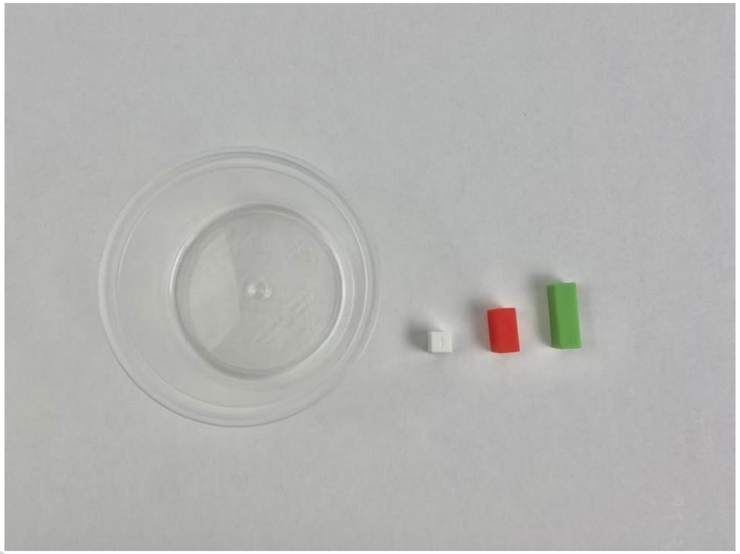
Tenemos cuatro y uno menos, ahora tenemos tres.

Tenemos tres y uno menos, ahora tenemos dos.

Tenemos dos y uno menos, ahora tenemos uno.

Tenemos uno y uno menos, ahora tenemos nada.

En matemáticas cuando tenemos nada de algo (regletas), decimos que tenemos cero.

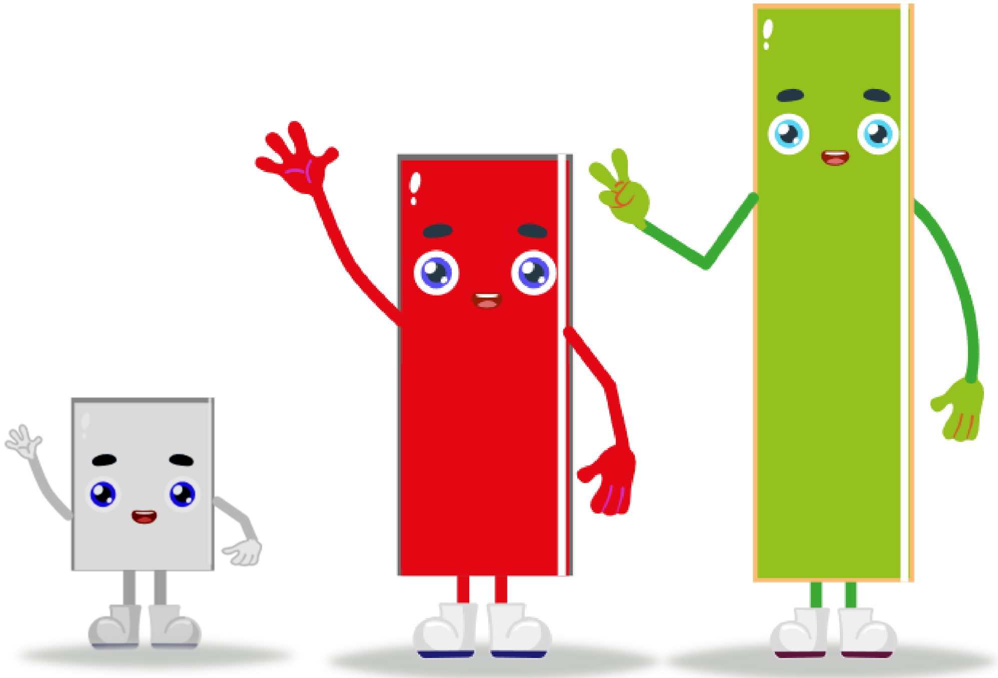


NÚMEROS ORDINALES

Los números tienen cualidades como la cardinalidad, nominalidad y ordinalidad. Este último tiene que ver con la posición que tiene un elemento (regleta) respecto a otra en un grupo. Construimos una secuencia de cuatro colores como en la imagen, nos facilitará comprender la noción de orden. El juego consiste en armar una secuencia de colores y pedirle al niño que construya una secuencia igual (en el mismo orden). Aquí como docente o formador puedo verbalizar a la vez que construyo el primer modelo: rojo, azul, amarillo, verde. Puedo hacer otro ejemplo, cambiando el orden de los colores. Aún no utilizo los nombres de primero, segundo, tercero, cuarto. Nos enfocamos en la noción. No necesariamente, el orden debe ser con los valores numéricos estándar establecidos de las regletas.

CAPÍTULO II

RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD



COMPETENCIA 23: RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD

*"Consiste en que el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones. Implica también discernir si la solución buscada requiere darse como una estimación o cálculo exacto, y para ello selecciona estrategias, procedimientos, unidades de medida y diversos recursos. El razonamiento lógico en esta competencia es usado cuando el estudiante hace comparaciones, explica a través de analogías, induce propiedades a partir de casos particulares o ejemplos, en el proceso de resolución del problema" (*CNEB, 2016, P. 133).

Busquemos a nuestros alrededor objetos que tengan las siguientes características: azules, rojos ,grandes ,duros. Ahora busquemos un objeto que tenga la propiedad de ser 5, un objeto que tenga la propiedad intrínseca de ser 10. Que tal uno que sea un 100. Por mucho que busquemos no lo vamos a encontrar porque los números son abstractos, es decir, solo existen en nuestra cabeza. Sirven para comunicar entre humanos ideas humanas que nos sirve a los humanos para transmitir ideas. Los números cumplen la función: cardinal, ordinal, nominal en las matemáticas.

Hay una tendencia muy grande de confundir números con numerales. Los numerales sirven para representar los números. Los numerales son los símbolos, es decir, la forma en la que se escriben: 0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

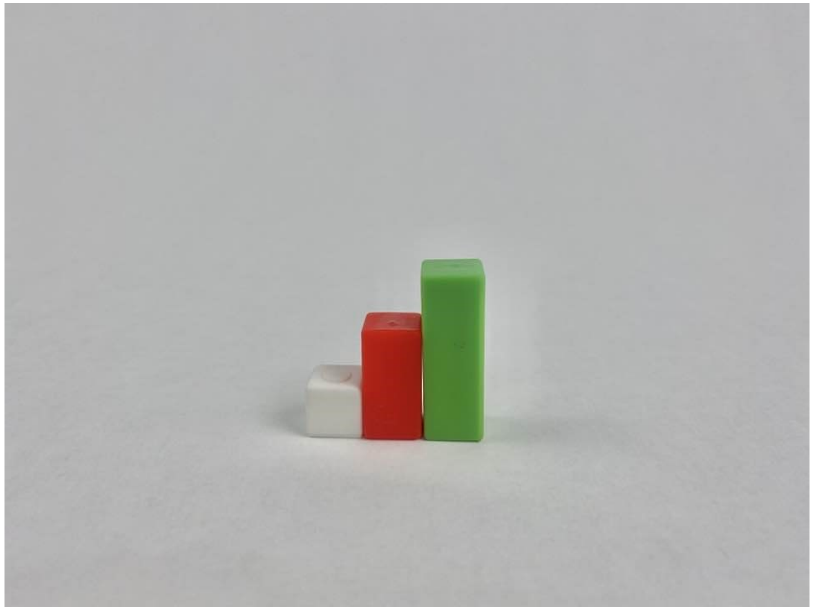
En este capítulo construiremos muchas ideas matemáticas a partir del concepto de la unidad. Construiremos el concepto del número, el sistema numérico decimal, las cuatro operaciones, las fracciones y decimales.

Este capítulo llamado "Resuelve problemas de cantidad" hace un énfasis en las operaciones aritméticas.

*CNEB: Currículo Nacional de Educación Básica del Perú, 2016.

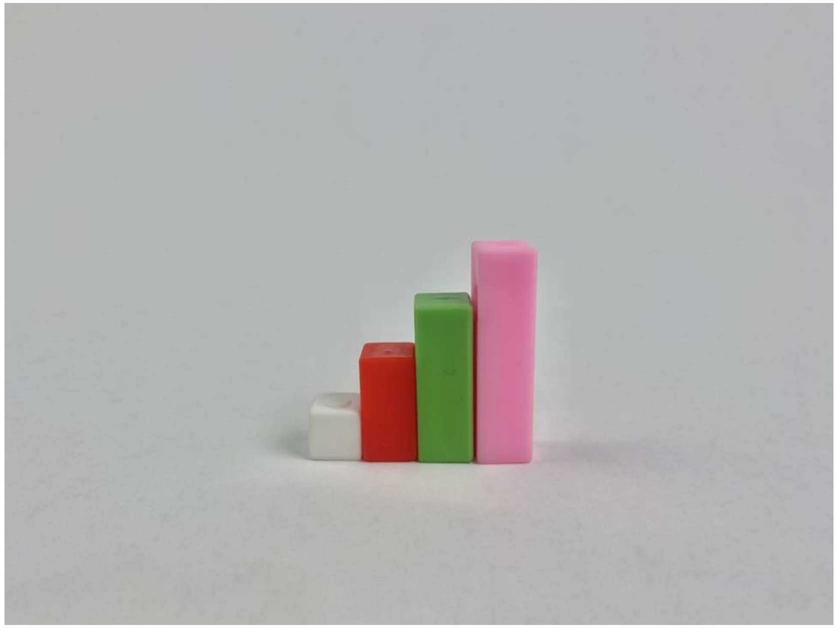
LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO

El número es una construcción matemática que indica la cantidad de elementos de un conjunto. Es trascendental que el niño se de cuenta del primer patrón matemático: que lo números se construyen agregando una unidad. Ellos pueden avanzar así hasta el número 9, observando la secuencia de cómo los números se van transformando a medida que le vamos agregando una unidad. En la imagen vemos la representación de cómo los números se convierten en otros números cuando le agregamos una unidad. Además que contiene al número anterior.



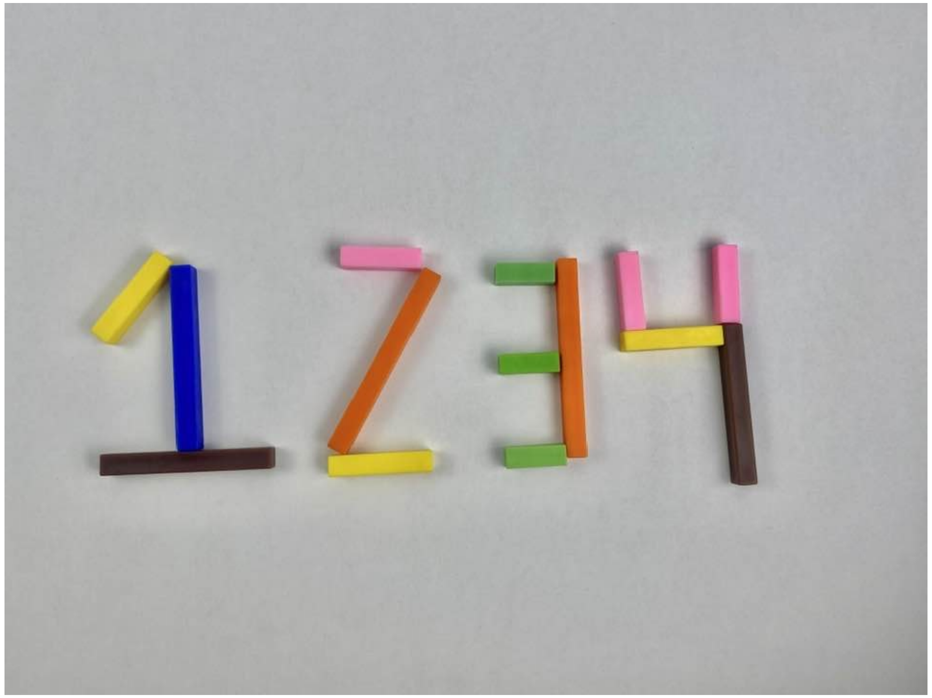
LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO

Las regletas facilitan el aprendizaje de la construcción del concepto del número porque se pueden trabajar como material discontinuo y continuo. Como material discontinuo trabajamos la noción de ordinalidad; como material continuo, además se refuerza la inclusión de clase, asociando la palabra número a cada torre que represento que es el grupo. En la imagen observamos la conexión que existe entre todos los números: se construyen uno a otro agregando una unidad. El cero se explica aquí también como: “un uno y uno menos”. Todos los números están conectados a través de la unidad.



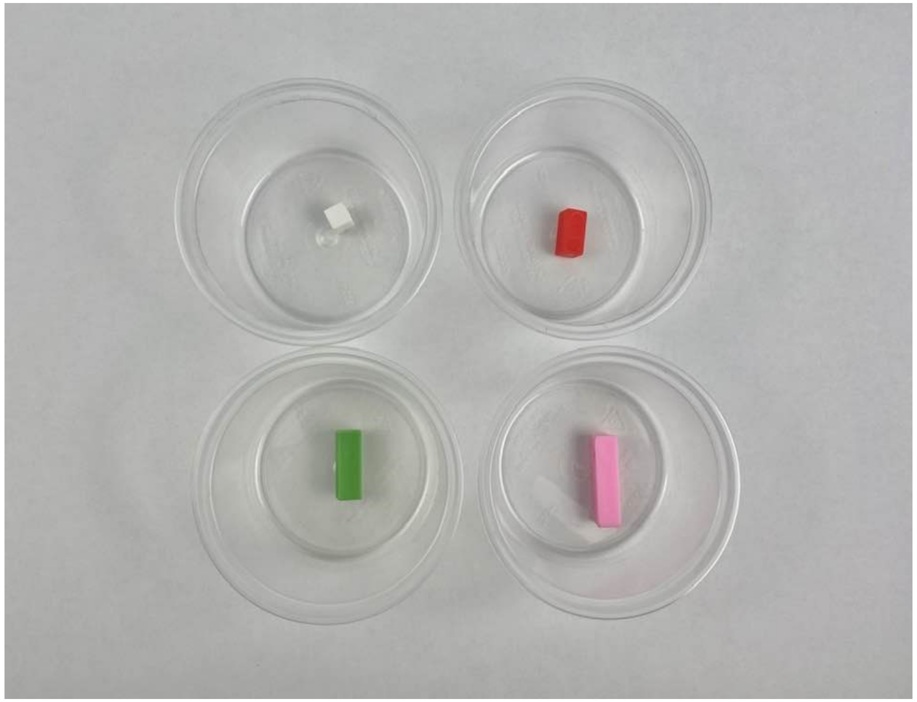
NUMERALES

Aquí podemos ver con mayor claridad lo que es un numeral, es decir la forma como se escribe o grafica- simboliza un número. Lo podemos realizar utilizando las regletas Cuisenaire. En la imagen se representa las formas que tienen los números: 1, 2, 3, 4. Sin embargo, no debemos confundir, el numeral, con el número que es la idea del número.



LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO

Al igual que construimos una secuencia con las regletas de colores para construir el concepto del número. Los niños pueden representar en unos platos, como en la imagen, tanto en su formato continuo o discontinuo de cada número: 6 o 1 + 1 + 1 +1 + 1 + 1, por ejemplo, con una sola regleta o con seis regletas blancas. De esta manera refuerzan la idea del número como cardinal del conjunto.

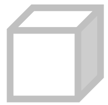


CONTAMOS HASTA 9

Contamos:

1

UNO



2

DOS

3

TRES

4

CUATRO

5

CINCO

6
SEIS

7
SIETE

8
OCHO

9
NUEVE

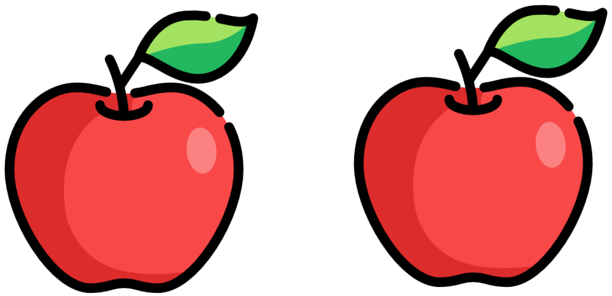
0
CERO

CINTA NUMÉRICA DE REGLETAS

COLOCAMOS LA REGLETA QUE CORRESPONDAN A LOS SÍMBOLOS QUE INDICAN EN CADA CUADRO :

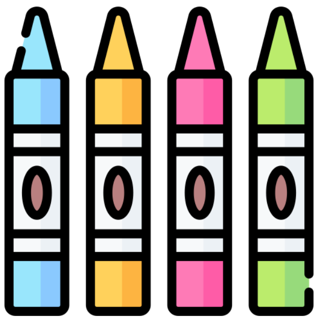
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ACTIVIDAD: RECONOCIENDO NÚMEROS



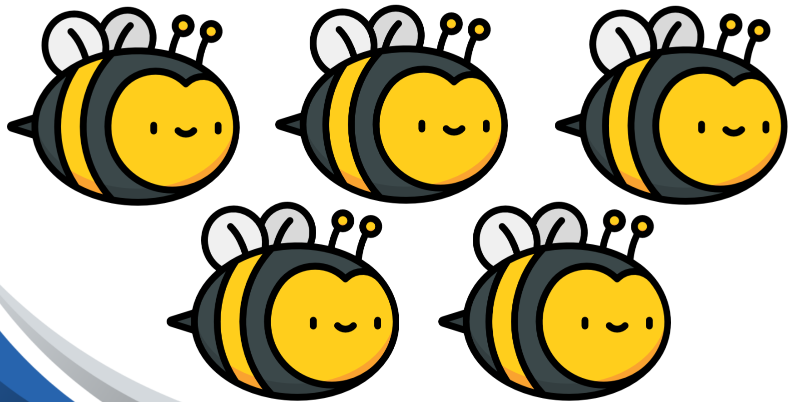
Número

Nombre



Número

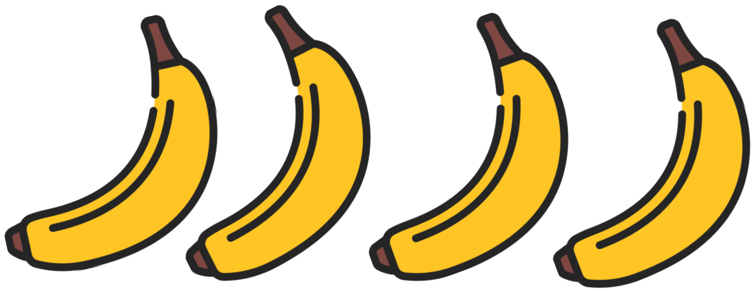
Nombre



Número

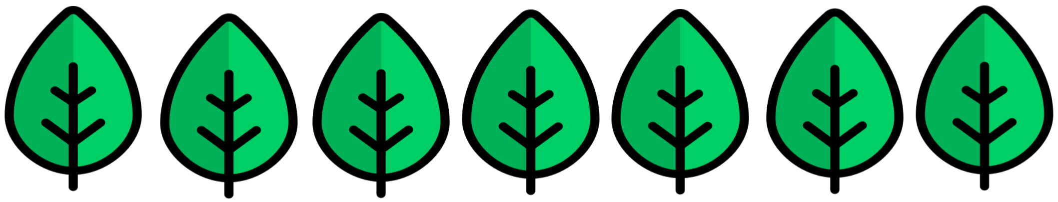
Nombre

ACTIVIDAD: RECONOCIENDO NÚMEROS



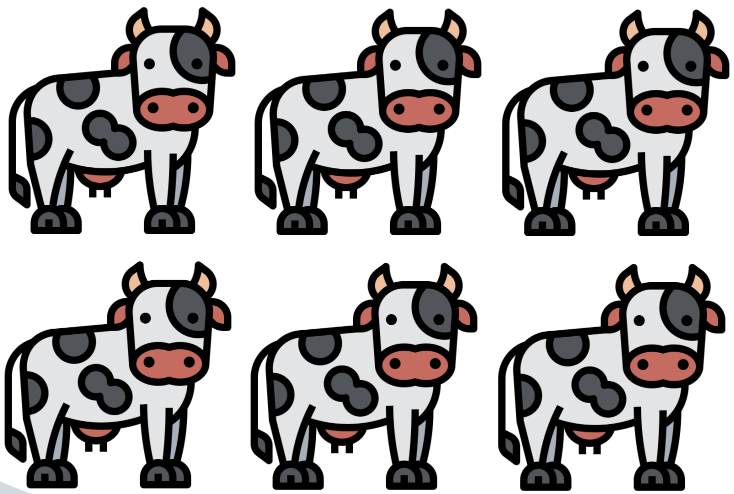
Número

Nombre



Número

Nombre



Número

Nombre

ACTIVIDAD:

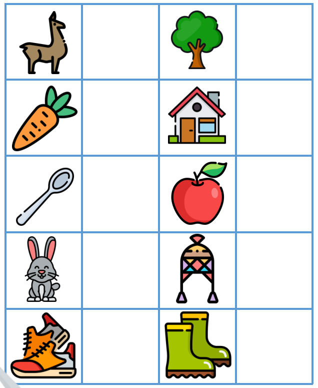
DESCIFRANDO

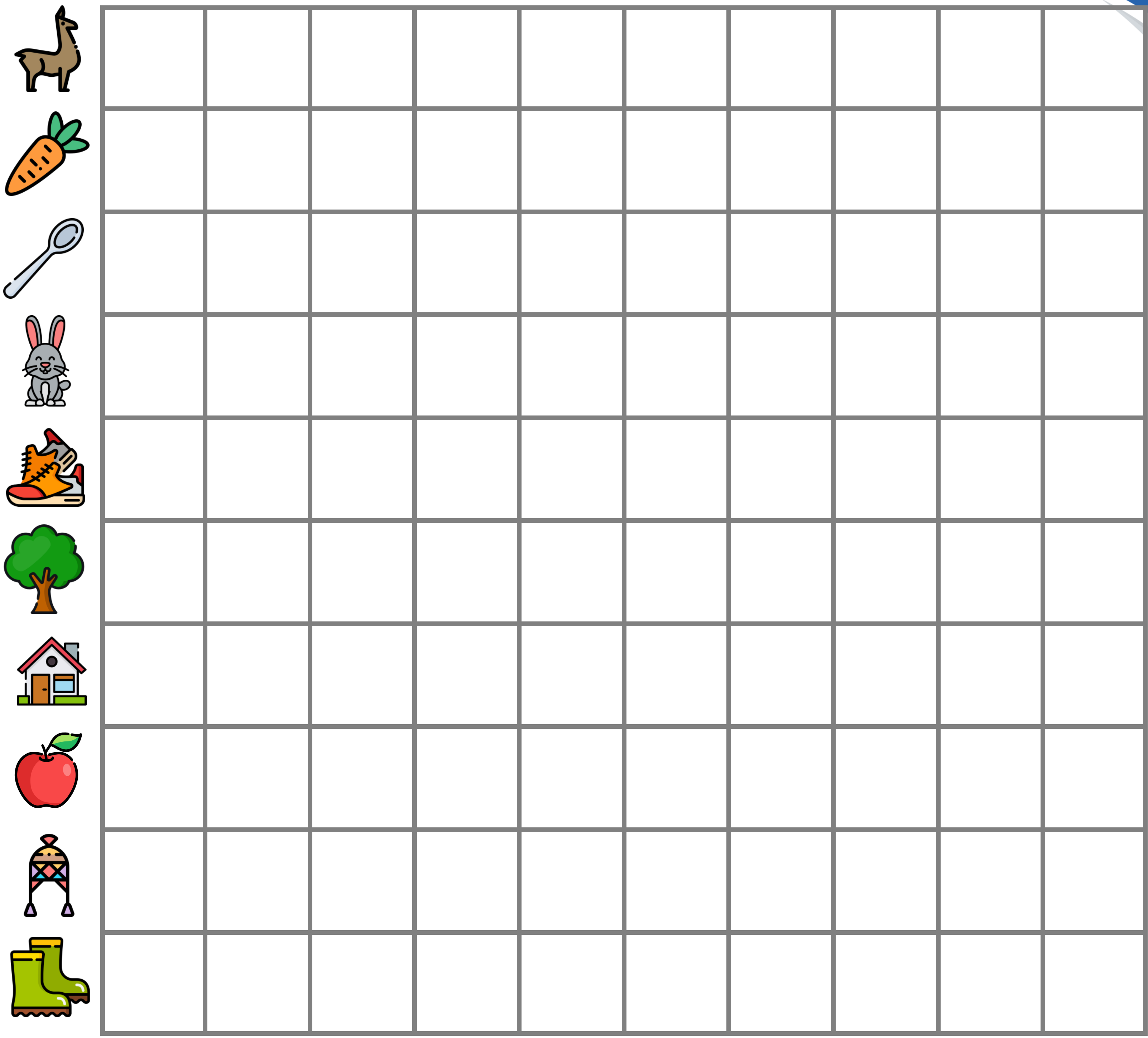
Coloca los números del 1 al 10 en los recuadros vacíos.

Representa con tu regleta el número y píntalo con el color correspondiente.

Empieza por representar 6 árboles.

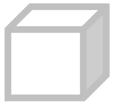
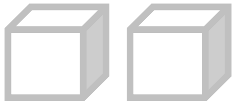
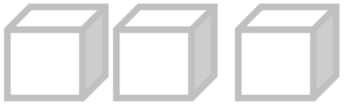
¿Con qué regleta lo representarías? Luego píntalo.





ACTIVIDAD: DESCUBRIENDO LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

Representamos del 1 al 10 con nuestras regletas de manera discontinua. Exploremos con cuales podemos formar cuadrados o rectángulos.

1		Cuadrado	6	
2		Rectángulo	7	
3			8	
4			9	
5			10	

CORRESPONDENCIA Y EL NÚMERO

Realiza la siguiente actividad en clase con tus niños:

Invita a cuatro niños a pararse delante de la pizarra.

Escoge cuatro regletas blancas.
Muéstrales las cuatro regletas blancas que tienes y pregúntales: *¿Cuántos pueden contar?*

-Cuatro

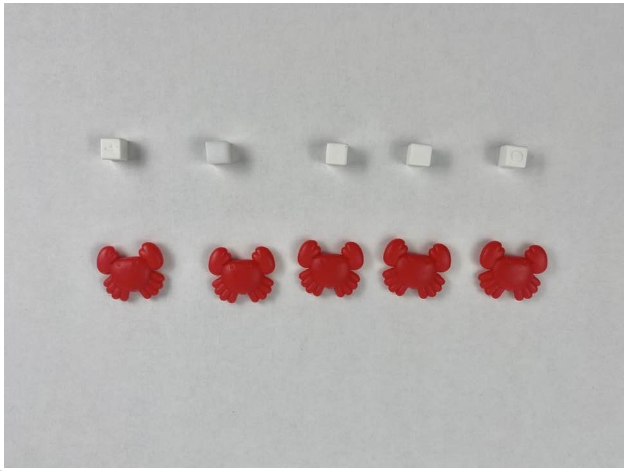
-¿Cuántos niños hay aquí delante de ustedes?

-Cuatro

A continuación, reparte a cada uno de los niños que han salido una regleta y pregunta a toda el aula:

- ¿Qué he realizado?¿Por qué me he quedado sin regletas?

Reflexiona con ellos sobre esta situación.



CORRESPONDENCIA Y EL NÚMERO

Realiza la siguiente actividad en clase con tus niños:

Invita a cuatro niños a pararse delante de la pizarra. Escoge tres regletas blancas. Muéstrales las regletas que tienes y pregúntales *¿Cuántos pueden contar?*

-Tres

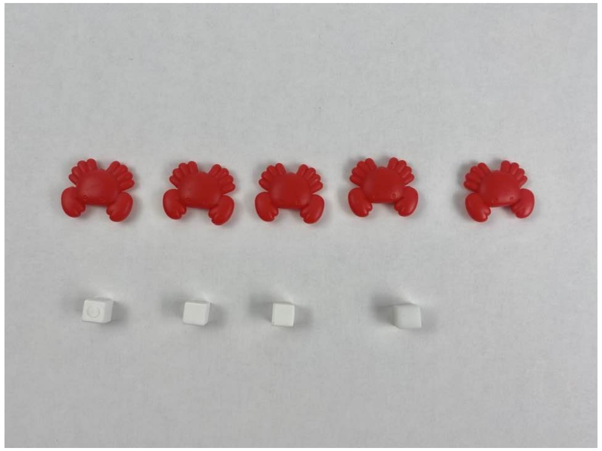
-¿Cuántos niños hay aquí delante de ustedes?

-Cuatro

A continuación reparte a cada uno de los niños que han salido una regleta y pregunta a toda el aula.

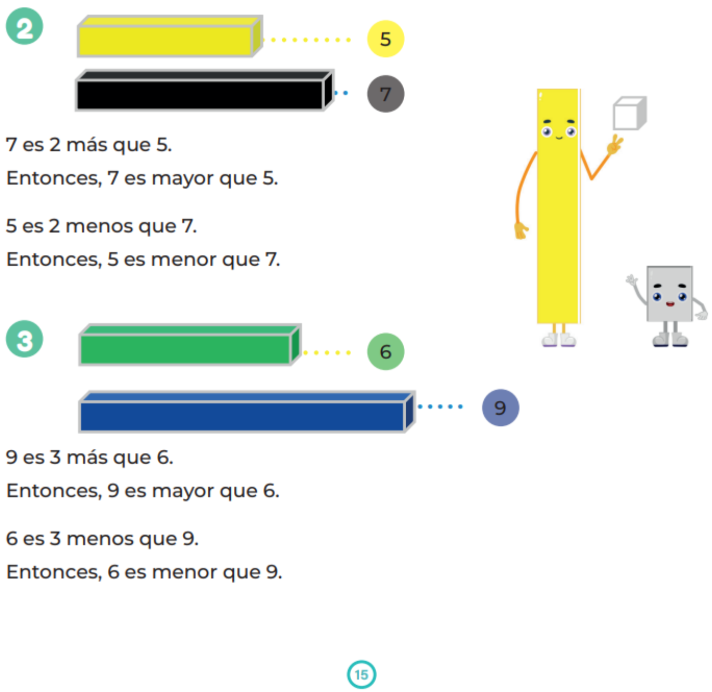
- ¿Qué he realizado?¿Por qué me he quedado sin regletas?

Reflexiona con ellos sobre esta situación. Respuesta sugerida: *Me he quedado sin regletas porque hay más niños que regletas.*



COMPARAR NÚMEROS

En didáctica de la matemática hay un principio que se llama la reversibilidad, significa que un mismo proceso puede ser visto al menos desde dos puntos de referencia. Por ejemplo: de acuerdo al nivel en matemática en que se encuentren los niños podrán decir: hay más negros que amarillos, pero también es válido decir hay menos amarillos que negros. Otra forma de ver es el siete es mayor que el cinco, pero también el cinco es menor que el siete. Esta forma de pensar nos da una mayor perspectiva y pensamiento crítico al analizar una situación desde dos perspectivas.



ORDEN Y SECUENCIA

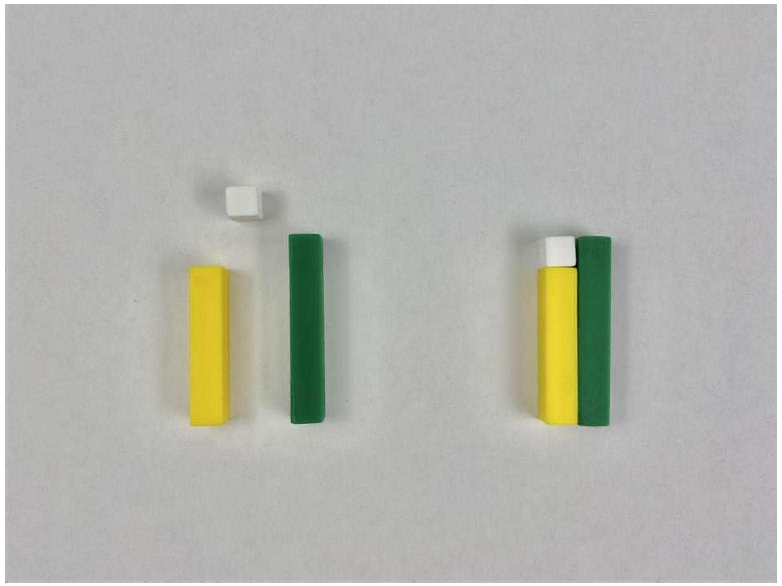
A continuación algunas preguntas para saber si nuestros niños han construido el concepto del número:

¿Qué me puedes decir acerca del cuatro? - Es uno más que tres y uno menos que cinco.

¿Si cuento uno, tres, dos, cuatro y cinco?¿Por qué está mal? - Luego del uno sigue el dos porque uno y uno más hacen dos.

¿Cómo puedo hacer para que el cinco se convierta en cuatro?¿Cómo puedo hacer para que el dos se convierta en tres?

Si no lo han hecho aún, no te preocupes, en las próximas páginas realizaremos actividades para lograrlo.

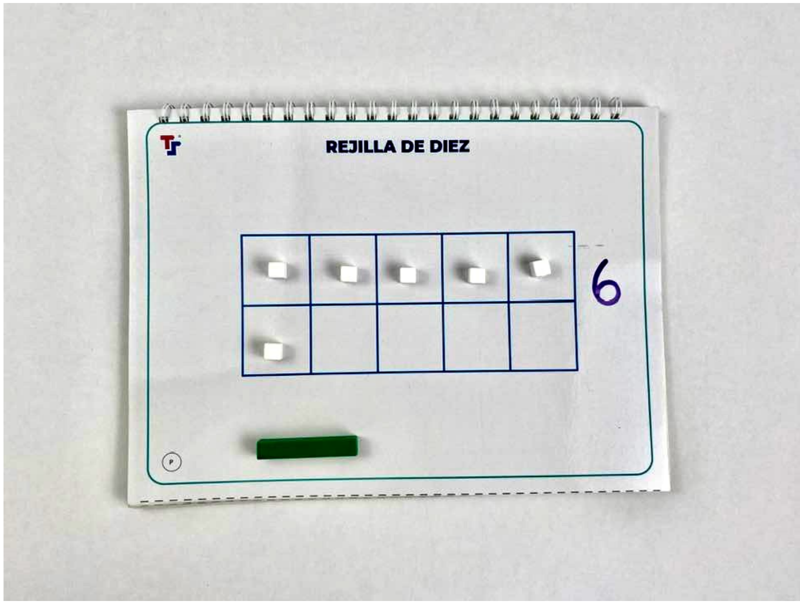


REPRESENTAR NÚMEROS CON REGLETAS

En la siguiente imagen se utiliza una plantilla llamada rejilla de diez. Aunque todavía no trabajamos la noción de decena, podemos utilizar la rejilla para colocar las regletas.

Se representa con regletas blancas y verdes. De la primera forma refuerza la noción de correspondencia y de la segunda de cardinalidad.

El modo de uso de la rejilla es la siguiente: se debe colocar solo una regleta por cada cuadro, además se representa de izquierda a derecha hasta completar una fila para luego empezar por la segunda fila.



ORDEN Y SECUENCIA

En esta imagen podemos observar cómo se presenta una secuencia. A partir de la unidad se van construyendo los demás números.

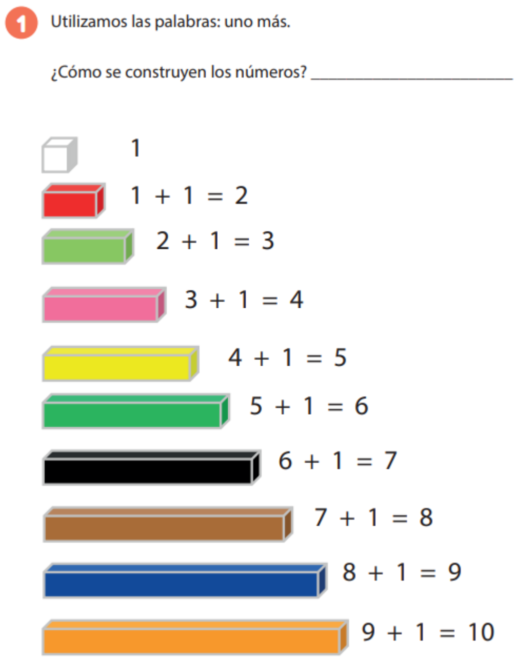
¿Qué número es 1 más que 1?, ¿Qué número es 1 más que 2?, ¿Qué número es 1 menos que 4?

Es importante trabajar con las regletas Cuisenaire, la representación discontinua como continua de cada número. Que los niños observen como se construyen los números cuando agregan una unidad, que descubran este primer patrón matemático sobre la que se construirán los demás concepto matemáticos.

LA SECUENCIA: UNO MÁS

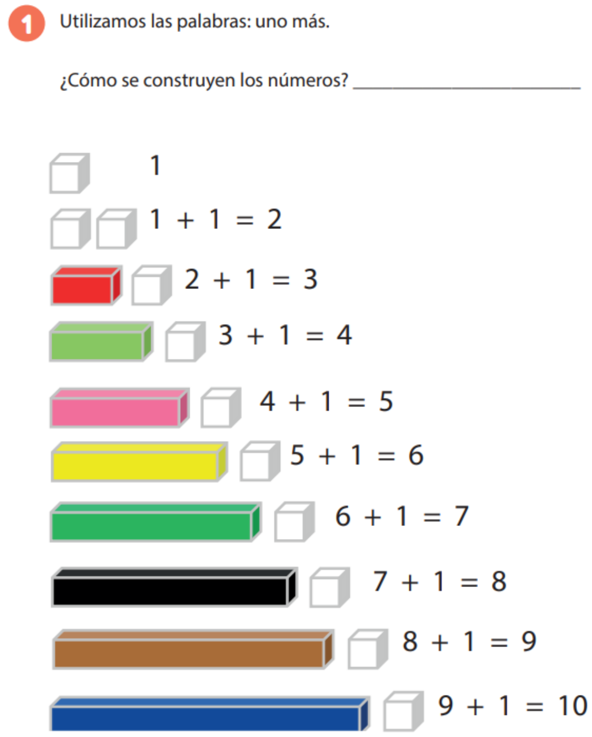
En la imagen vemos la representación de la secuencia hasta 10, se representa de manera simbólica, con los numerales, como los números se construyen cuando le sumamos uno. De esta manera, comprendemos la conexión que existe entre los números a través de la unidad.

¿Cómo haces para que tengas cuatro? Al tres... uno más, nos respondería un niño que ha comprendido este patrón matemático.



CONSTRUIMOS LOS NÚMEROS

Las regletas por su estructura continua, podemos representar la secuencia como una “escalera”; en el caso de representar la secuencia como estructura discontinua (regletas blancas, por ejemplo), podemos representarlas dentro de la rejilla de diez o como se muestra en la imagen, donde se haga evidente que con “uno más”, un número se convierte en otro.



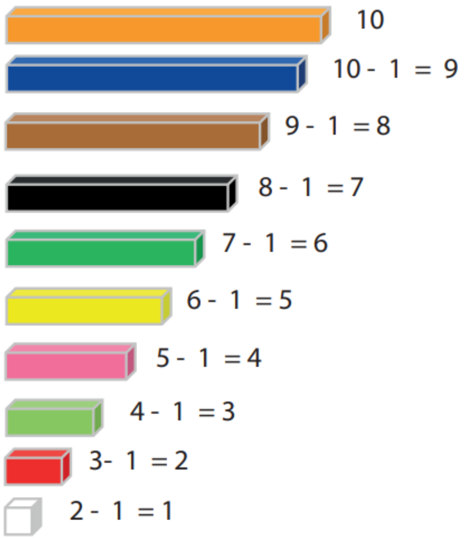
LA SECUENCIA: UNO MENOS

Es importante tener un protocolo de comunicación para explicar o guiar una exploración cuando se utiliza materiales para enseñar algún concepto matemático. Aprendimos a utilizar “uno más” cada vez que agregamos una regleta y construimos un nuevo número. De igual manera utilizamos “uno menos” cuando quitemos una regleta, que represente una unidad, para ver en qué número se ha convertido. Si preguntamos a nuestros niños ¿Cómo tenemos el cuatro? Nos dirá: es uno menos que cinco.

La secuencia: construimos los números

1 Utilizamos las palabras: uno menos.

¿Cómo se construyen los números? ______________________



LA SECUENCIA: NUMERALES

En la imagen observamos el mismo patrón matemático, representado con los numerales. Es importante que los niños puedan explicar cada número con términos de “es uno más que...”, “es uno menos que...”.

Una transición entre el uso de materiales y el uso de los símbolos, es el dibujo o representación pictórica, este proceso se le conoce como enfoque CPA o COPISI.

1 Utilizamos las palabras: uno más.

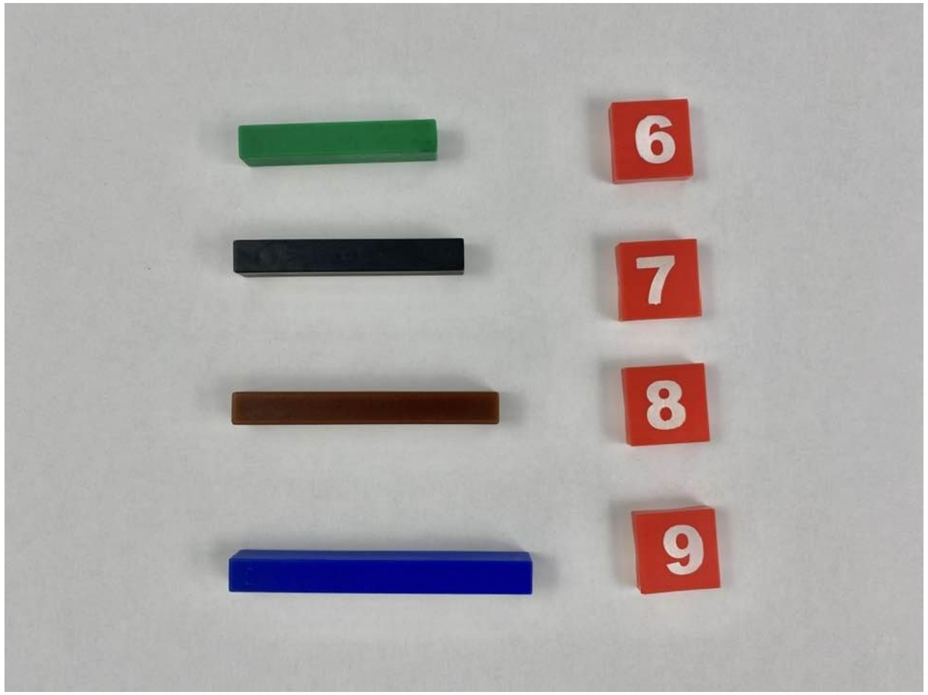
¿Cómo se construyen los números? ______________________

1
1 + 1 = ___
2 + 1 = ___
3 + 1 = ___
4 + 1 = ___
5 + 1 = ___
6 + 1 = ___
7 + 1 = ___
8 + 1 = ___
9 + 1 = ___

10
10 - 1 = ___
9 - 1 = ___
8 - 1 = ___
7 - 1 = ___
6 - 1 = ___
5 - 1 = ___
4 - 1 = ___
3 - 1 = ___
2 - 1 = ___
1 - 1 = ___

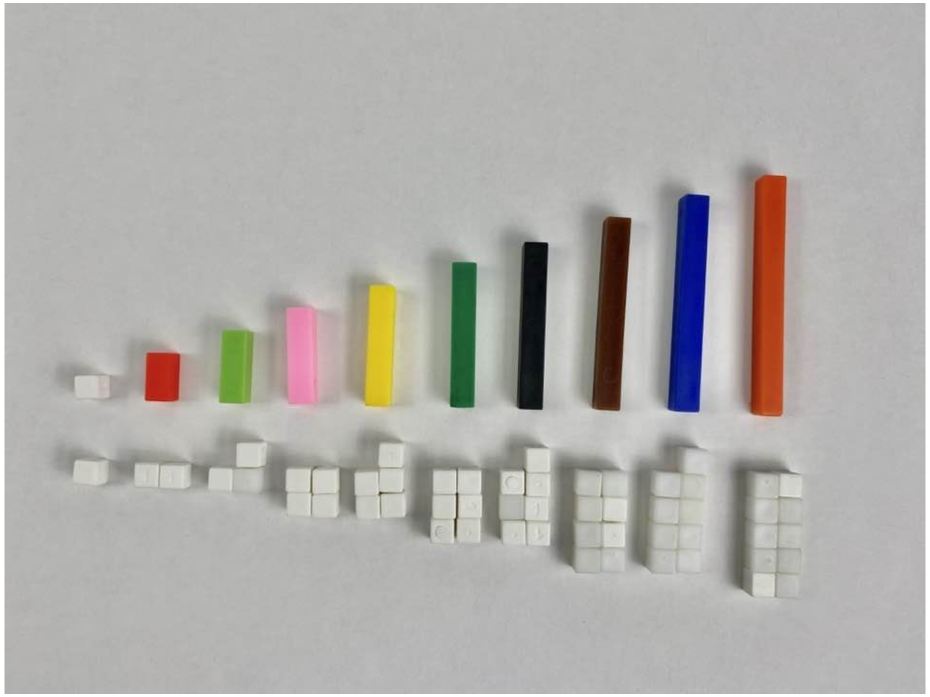
LOS NÚMEROS

Cuando los niños construyen el concepto del número natural, los números dejan de ser solo nombres que memorizar o símbolos que representar. Los números son ideas que podemos conectar con otras ideas, es decir, establecer relaciones entre conjuntos. En la imagen observamos la representación en forma descendente de los números de 8 hasta el 6.



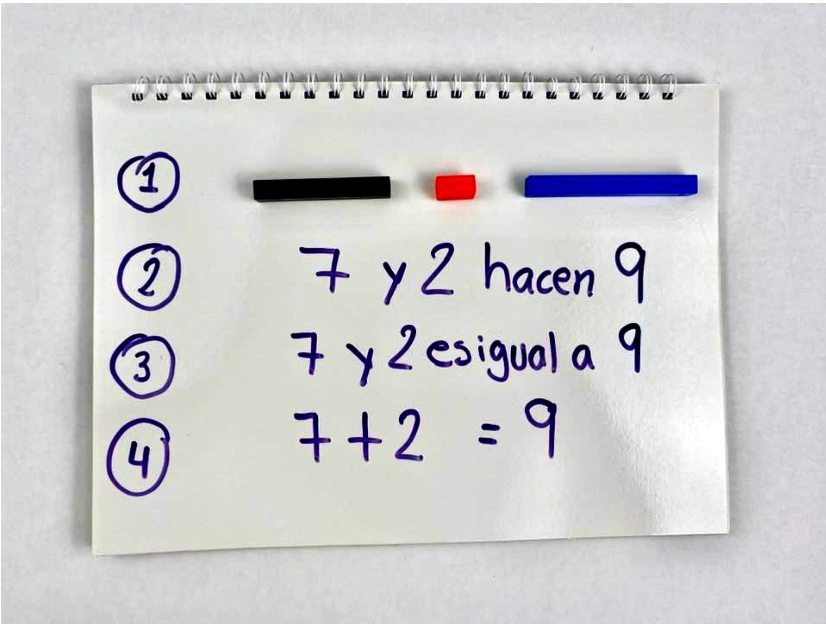
NÚMEROS PARES E IMPARES

Observamos la representación de los números pares e impares. En los pares se observa que cada número– se puede formar por parejas, mientras que en los impares hay un elemento que se queda sin su par correspondiente. Esto es muy visual con las regletas Cuisenaire.



COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS

Hemos aprendido en actividades anteriores cómo se construyen los números y a compararlos. En esta sección vamos a explorar las relaciones de adición y sustracción entre los números.
En la primera imagen podemos ver representados el 7 y el 2 con las regletas color negro y roja. El material nos permite visualizar los dos grupos y contar luego el total.



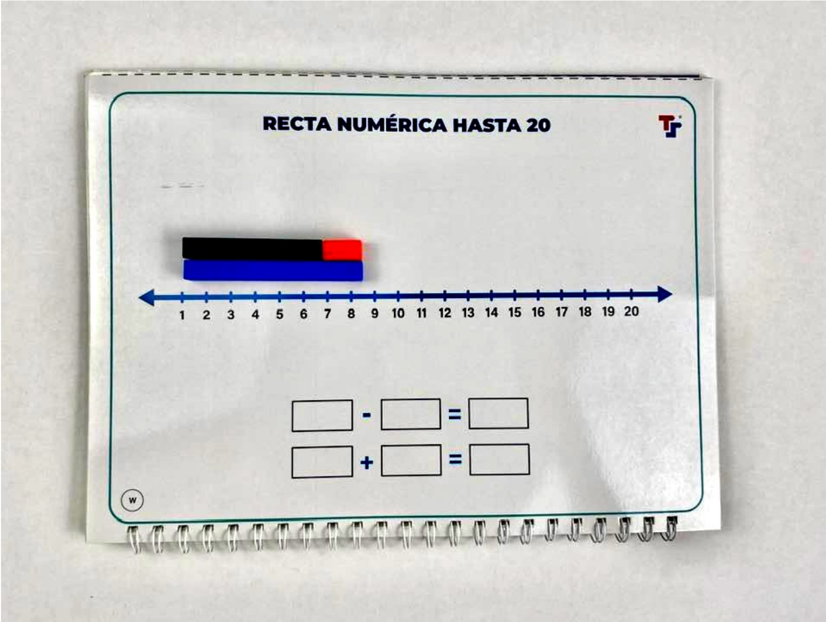
En la imagen observamos que al juntar los números obtenemos 9.

7 y 2 hacen 9

7 y 2 es igual a 9

7 + 2 = 9

Para explicar la composición, descomposición como las relaciones de adición y sustracción utilizaremos el esquema de los números conectados o diagrama de círculos.



Utilizar regletas junto a un correcto protocolo de comunicación para uso de materiales genera situaciones significativas de aprendizaje.

En la siguiente imagen se observa una recta numérica que se explicará con el uso de las regletas como un tren numérico.

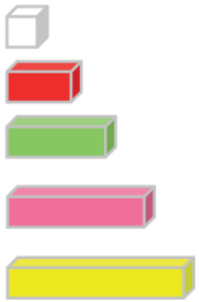
COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS

Observa el texto en la actividad 1: ¿Cuánto le falta a cada regleta para formar cinco? Cada regleta dibujada representa una parte y buscamos la otra parte para formar el todo que es cinco: parte-parte-todo.

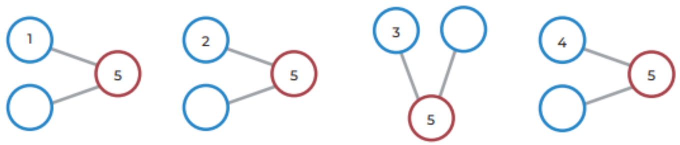
Líneas abajo, en la actividad 2, aparece el diagrama de círculos con el esquema parte todo. El círculo de rojo representa al todo y los dos opuestos representan las partes.

Descomponer los números con las regletas Cuisenaire.

1 ¿Cuánto le falta a cada regleta para formar cinco?



2 Completar



__+__=__ __+__=__ __+__=__ __+__=__

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS

En el cuadro de la actividad 1, se observa la adición 9 + 1 = 10, se lee una parte que es 9, más una parte que es 1,hacen un todo que es 10. Luego de explorar todas las formar de construir los números hasta diez, se pueden realizar generalizaciones de cien y mil. Esto es útil, solo si se aprender antes, las composiciones de una cifra.

Generalización del 10, 100, 1000.

1 Empezamos con descomponer el 10.

10	100	1000
9 + 1 = 10	90 + 10 = 100	900 + 100 = 1000
8 + 2 = 10	80 + 20 = 100	800 + 200 = 1000
7 + 3 = 10	70 + 30= 100	700 + 300 = 1000
6 + 4= 10	60 + 40= 100	600 + 400 = 1000
5 + 5 = 10	50 + 50 = 100	500 + 500 = 1000

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS

Cuando los niños comprenden la construcción del número saben, por ejemplo, que el número seis se puede construir cuando al 5 le agregamos una unidad o cuando al siete le quitamos una unidad.

Sin embargo, hay también otras formas de obtener un seis. Por ejemplo: 4+2 ,3+3. Del mismo modo, hay otras formas de componer y descomponer los números para obtener otros números. Observamos cada vez que los números están conectados entre sí.

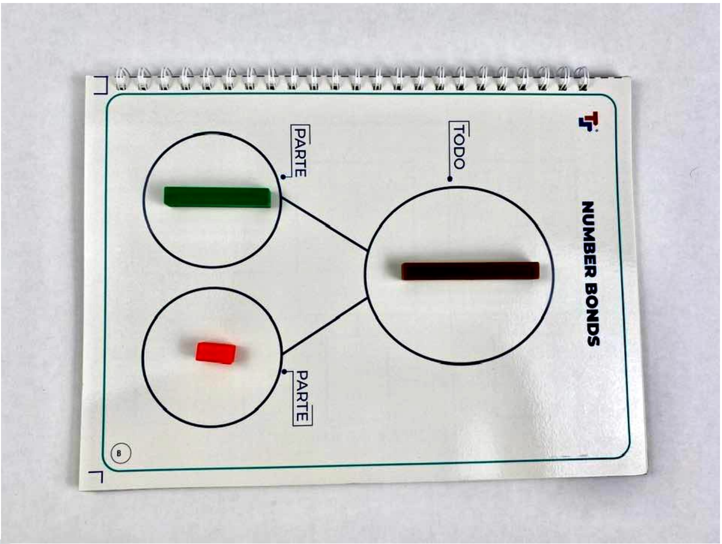
En la imagen vemos un diagrama con tres círculos conocido como números conectados, diagrama de círculos. Al círculo que se encuentra solo le llamaremos el todo y a los dos círculos opuestos les llamaremos las partes.

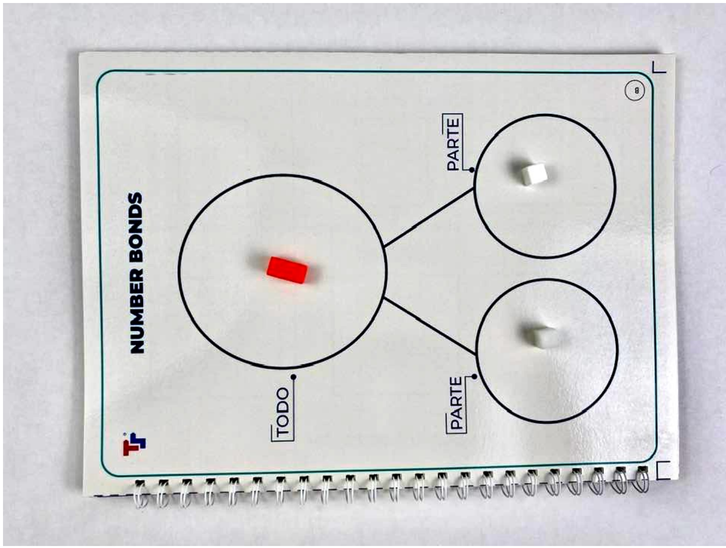
En este diagrama de círculos vamos a componer diversos números, empezaremos de las partes hacia el todo. Por ejemplo:

-Colocamos en una de las partes el 2 (regleta roja) y en la otra parte otra barra roja, luego llevamos las dos partes (los bloques de policubos) al todo para formar un nuevo número que es el cuatro (regleta rosada).

Podemos colocar diversas cantidades en las partes para formar el uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

Tener precaución de no formar todavía el diez. Utilizamos un lenguaje protocolar: “dos y dos hacen cuatro” cuando empezamos nuestra exploración con materiales.





NÚMEROS CONECTADOS

El diagrama de círculos o números conectados es un esquema que por excelencia nos va a permitir comprender la composición y descomposición de los números. En un principio naturales , pero más adelante nos ayudará a comprender otros tipos de números como los racionales. En la figura podemos observar la estructura de este diagrama: el círculo grande representa el todo y los círculos del otro extremo representan las partes. En las partes, se representan con las regletas los números 5 y 2 que hacen un todo igual a 7.

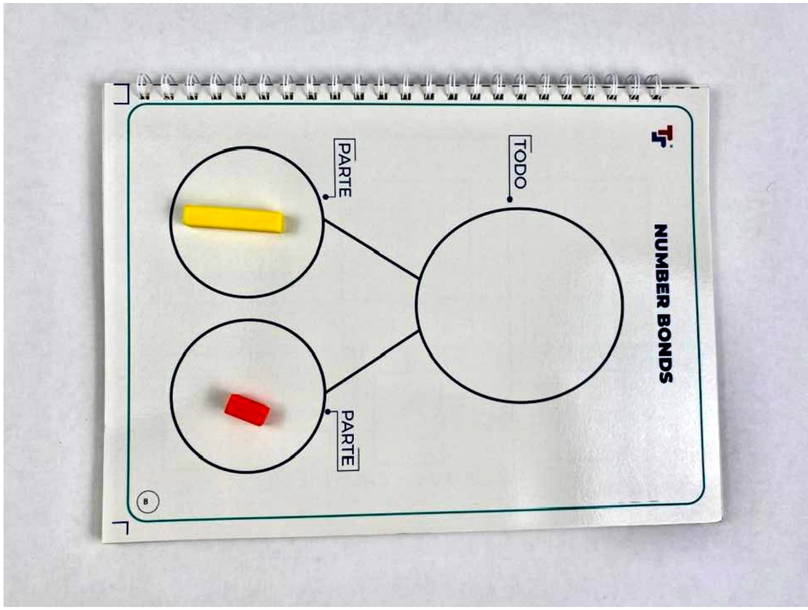
La lógica de los números conectados es que para hallar el todo debo sumar las dos partes y que para hallar una parte debo restar el todo con la otra parte.

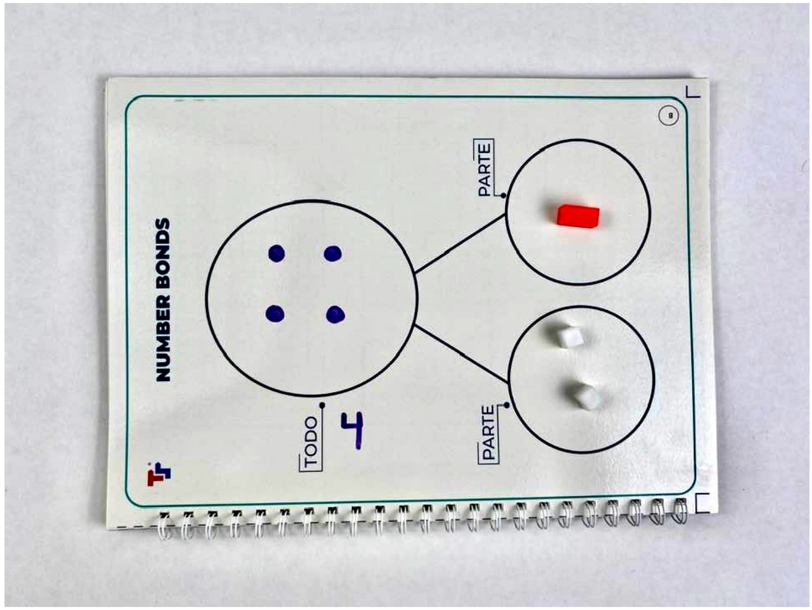
Además, nunca el todo será mayor que la suma de las partes y la suma de las partes jamás será mayor que el todo.

En la imagen 2, observamos que en las partes, se representan el número 2, con una regleta roja y dos blancas; que hacen un todo de 4.

En este diagrama es versátil, permitiendo explorar las nociones de conjunto, pre álgebra, números racionales, descomposición , cálculo mental entre otros conceptos.

NÚMEROS CONECTADOS





FICHAS DE REGLETAS DE COLORES

En esta sección, el autor del libro, profesor Juan Carlos Soto, propone el uso de fichas circulares que compartan el código original de colores para representar los números del 1 hasta 10; además agregar una ficha circular de color celeste para representar el cero. Se representa también con fichas circulares los números 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000. Esta representación es muy útil, como veremos en las siguientes actividades a realizar.

El uso de estas fichas circulares puede combinarse en una misma actividad con las regletas Cuisenaire. También usarse de modo separado. Pero se deben utilizar, solo después de haber trabajado antes con las regletas o con algún material concreto, esto es, por su mayor grado de abstracción en su uso.

El tamaño recomendado es de 2.5 mm de diámetro. Se usan también con metaplanos.

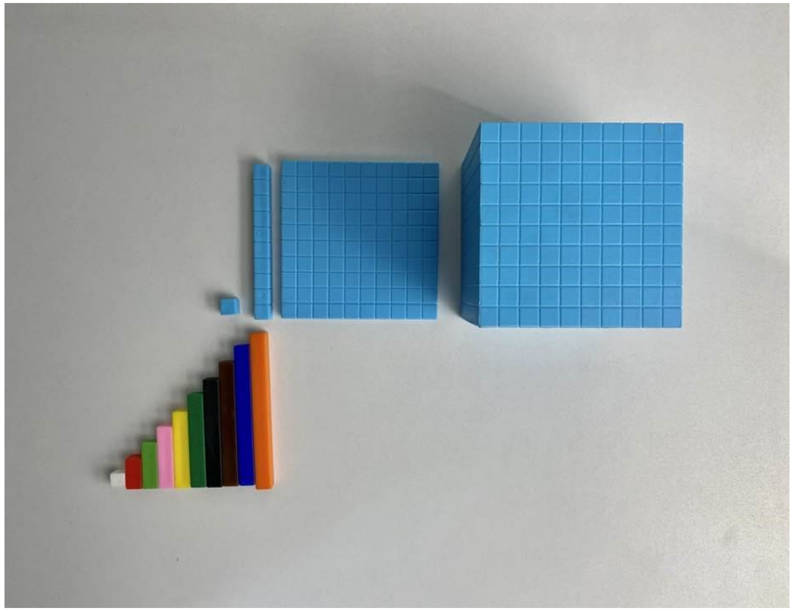
También se observan las fichas circulares que son utilizadas con los números Racionales.

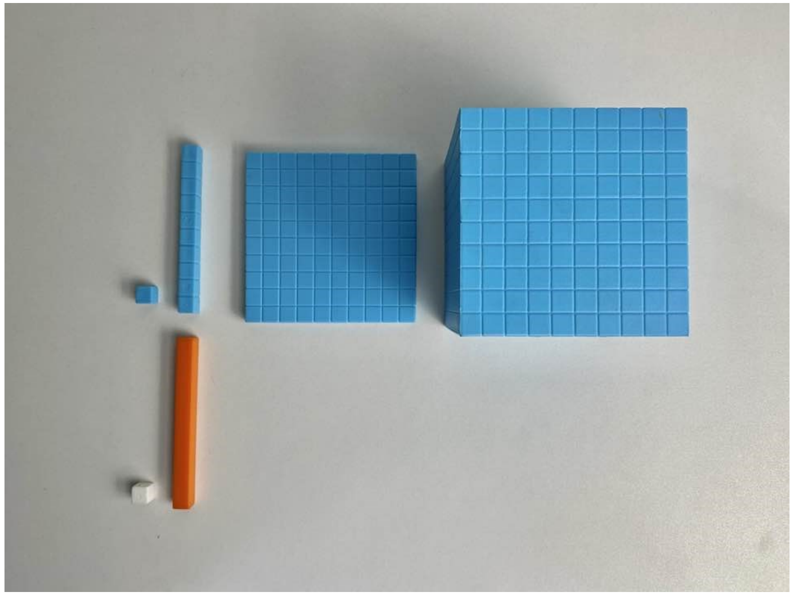
REGLETAS CUISENAIRE Y BASE DIEZ

Las regletas Cuisenaire, nos permiten representar los números del 1 hasta 10, y los distintos números que se forman al agrupar las decenas y unidades. En la imagen 1, se observa una secuencia de las regletas Cuisenaire y una secuencia de los bloques de la base diez. Ambos materiales, tienen en común, representar la unidad y decena. Luego, como se ve en la imagen 2, la base diez, nos permite representar, como material concreto, la centena y la unidad de mil.

La centena o grupo de cien, puede también representarse con las regletas Cuisenaire (100 unidades o 10 decenas), sin embargo, resulta más práctico combinar el uso de estos materiales, cuando representamos los órdenes de centena, unidad de millar.

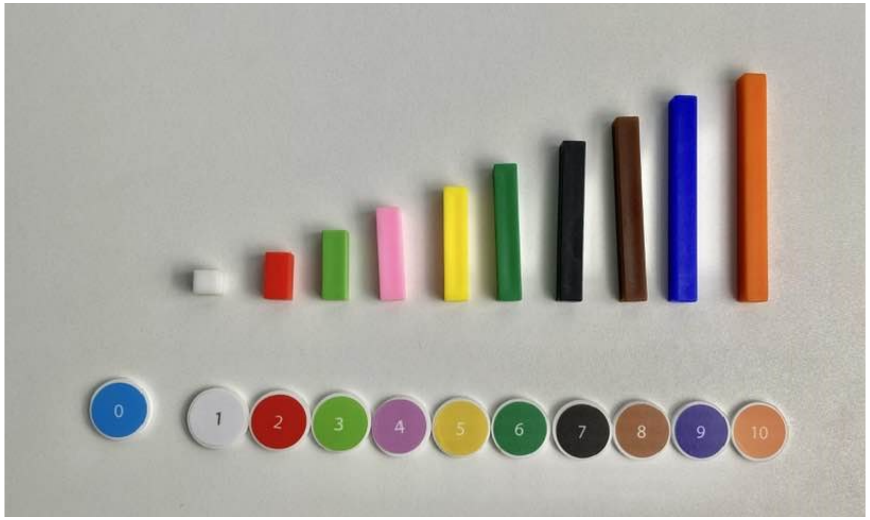
El profesor Juan Carlos Soto, recomienda combinar estos materiales, cuando la situación de aprendizaje lo amerite, manteniendo la secuencia original de colores de las regletas Cuisenaire, en particular, la barra naranja de la decena siempre y cuando se trabaje con las regletas como material principal para continuar con el uso de los bloques de centena y decena de la base diez.

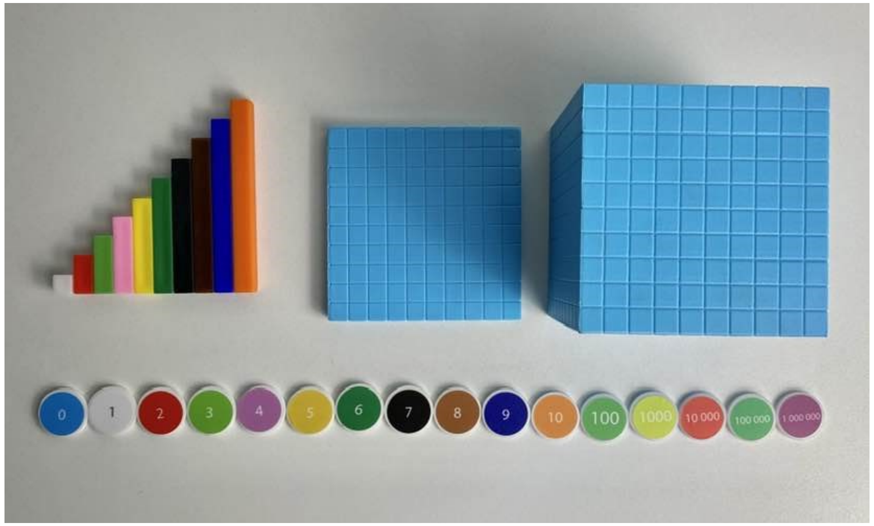




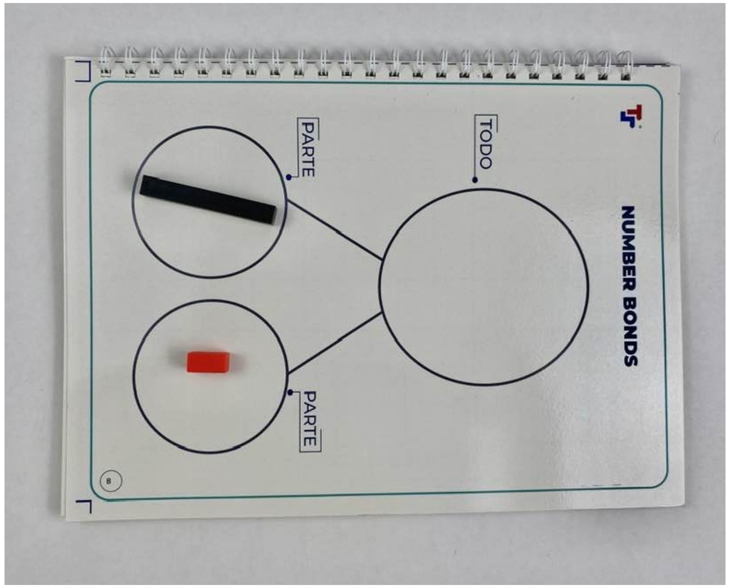
TRAZABILIDAD EN EL USO DE MATERIALES

Tanto la base diez como las fichas circulares, complementan y potencian la eficacia de un programa que utiliza las regletas Cuisenaire como material principal. En la imagen 1, se observa la correspondencia en los colores de las regletas Cuisenaire y de las fichas circulares con números propuestas por el profesor Juan Carlos Soto, que incluye además una ficha circular de color celeste para representar el cero. Las fichas circulares, complementan y ofrecen una experiencia simbólica para consolidar lo trabajado con las regletas y se pueden combinar en su uso, como lo veremos en las páginas posteriores.
Al utilizar el mismo código de colores del 1 hasta 10 que las regletas Cuisenaire, evita confundir el numeral 6 con el 9.
Por otro lado, las fichas numéricas permiten representar números mayores que mil hasta el millón, por lo que potencian el uso de las regletas y base diez.
Las fichas que representan también, los números 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 tiene un código de color que no es determinante para comprender el sistema numérico decimal, porque los niños ya han construido las bases para comprender el sistema, su uso es para experimentar y explorar lo que ocurre en las operaciones.

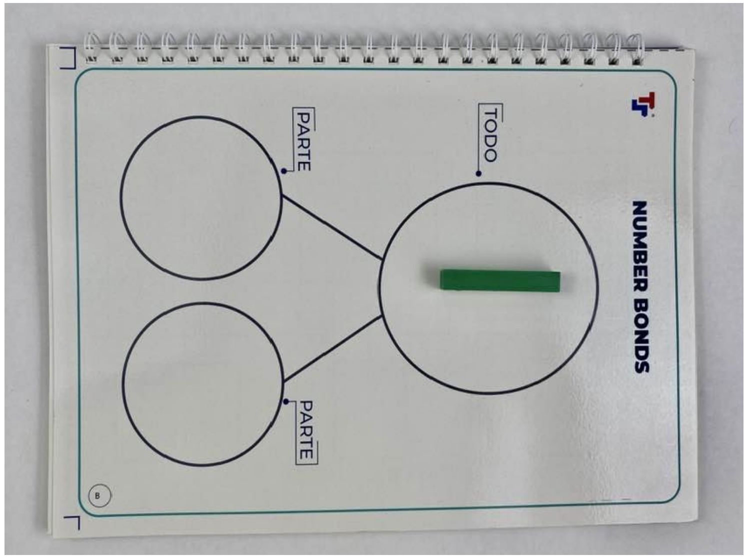




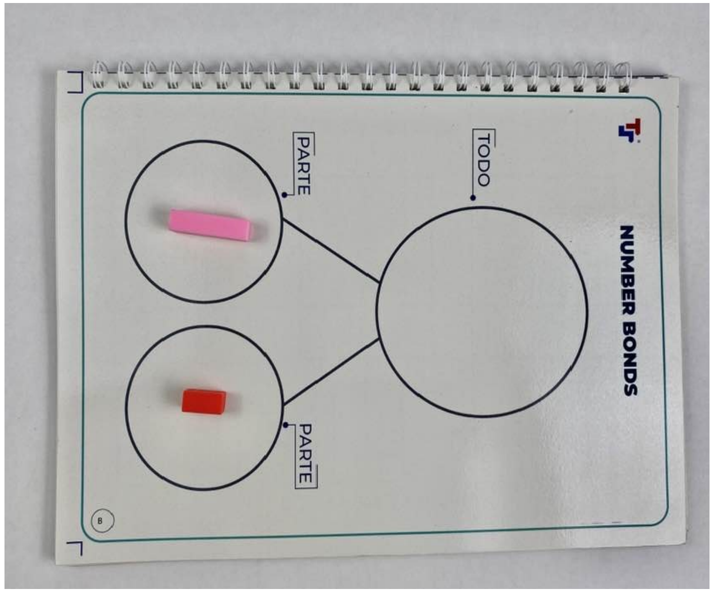
7 + 2 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

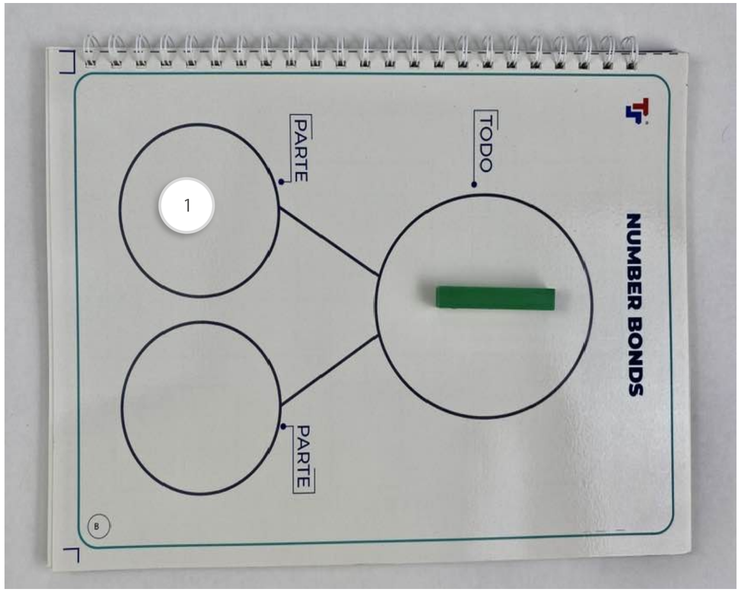
? + ? = 6


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

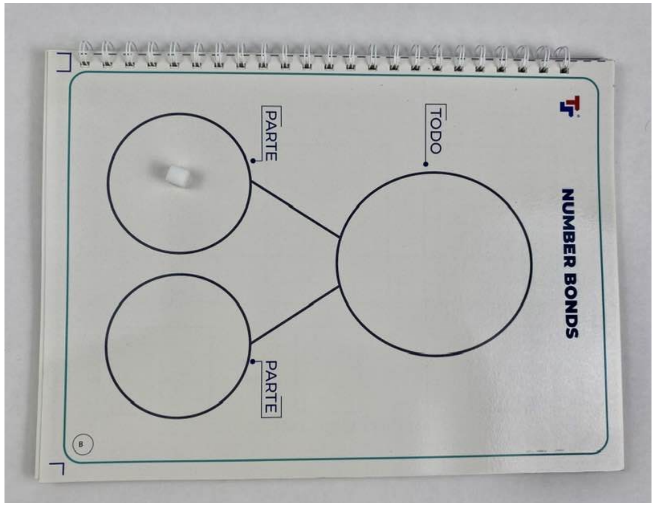
4 + 2 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

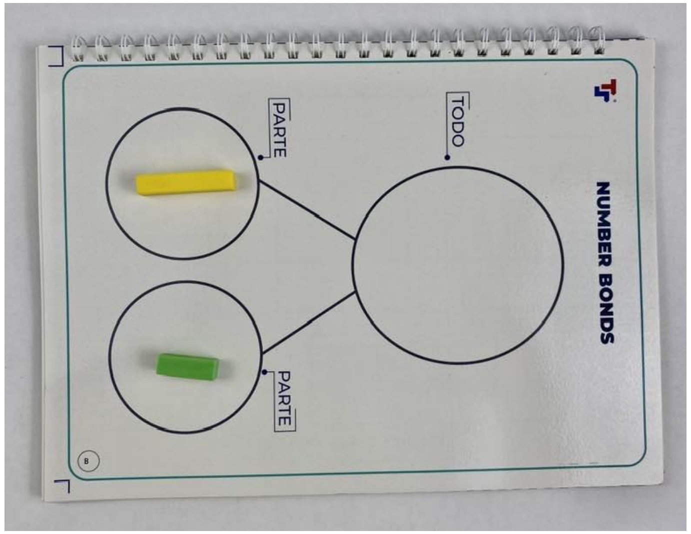
1 + ? = 6


PARTE
TODO
1
NUMBER BONDS
PARTE

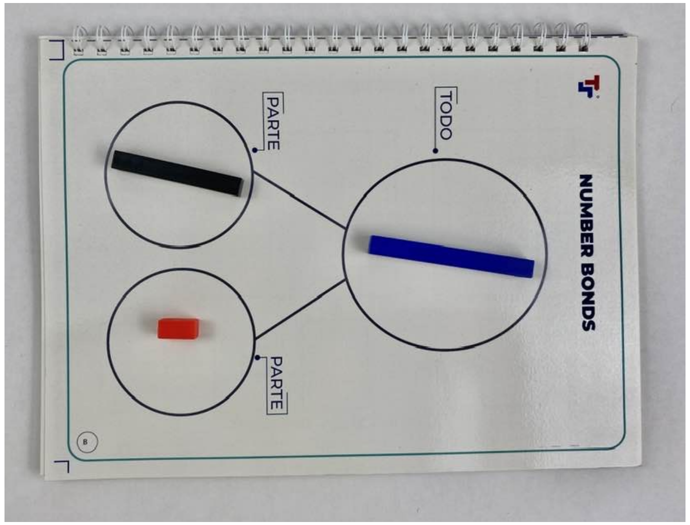
1 +? = ?


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

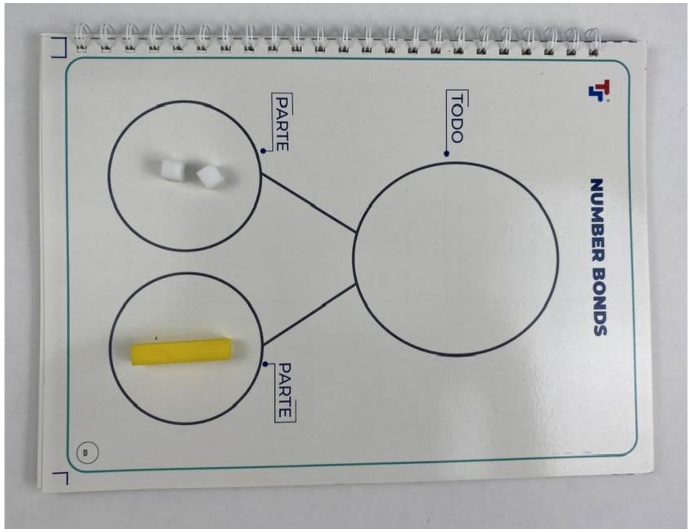
5 + 3 = ¿?


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

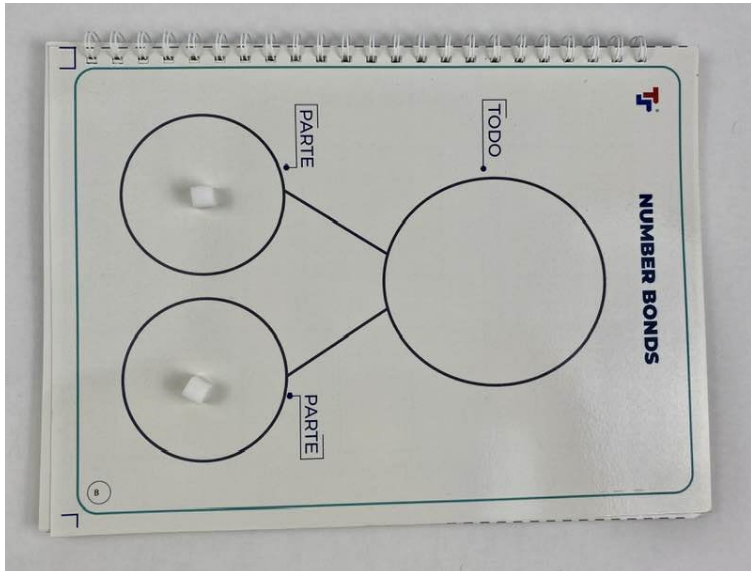
7 + 2 = 9


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

2 + 5 = ?


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

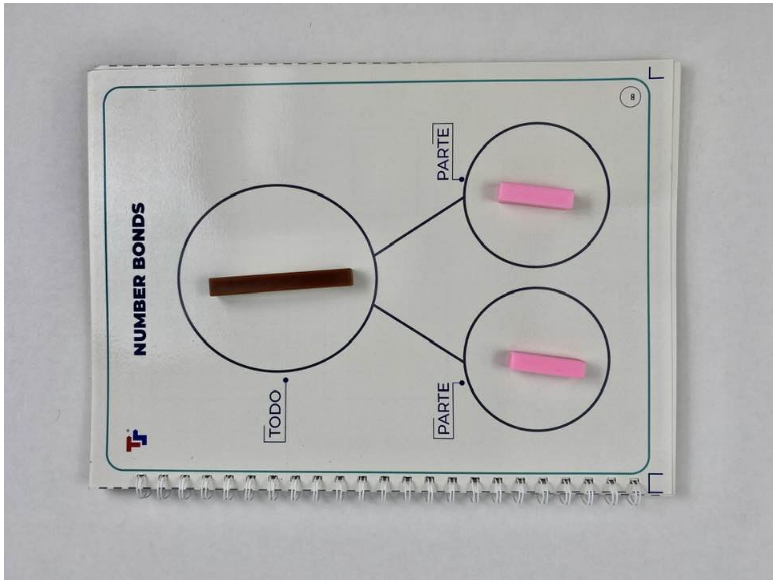
1 + 2 = ?


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

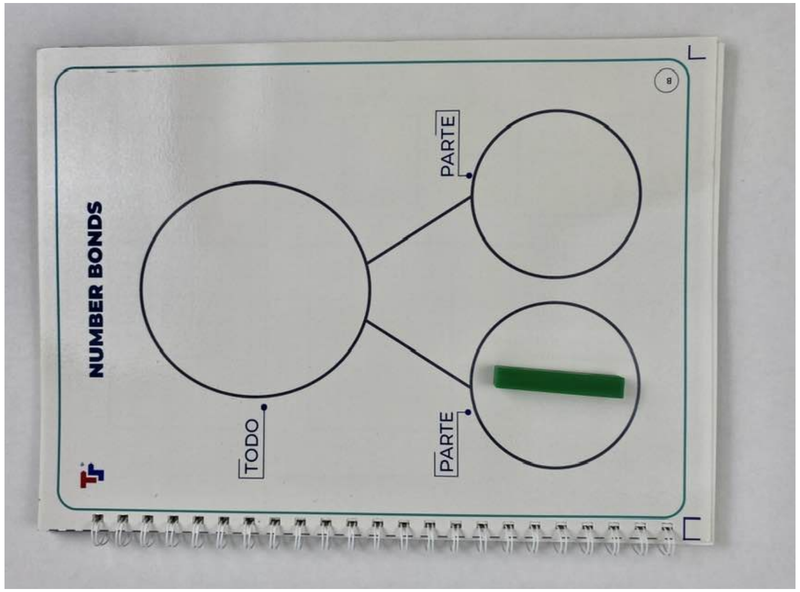
5 + ? = ?


PARTE
TODO
PARTE
NUMBER BONDS

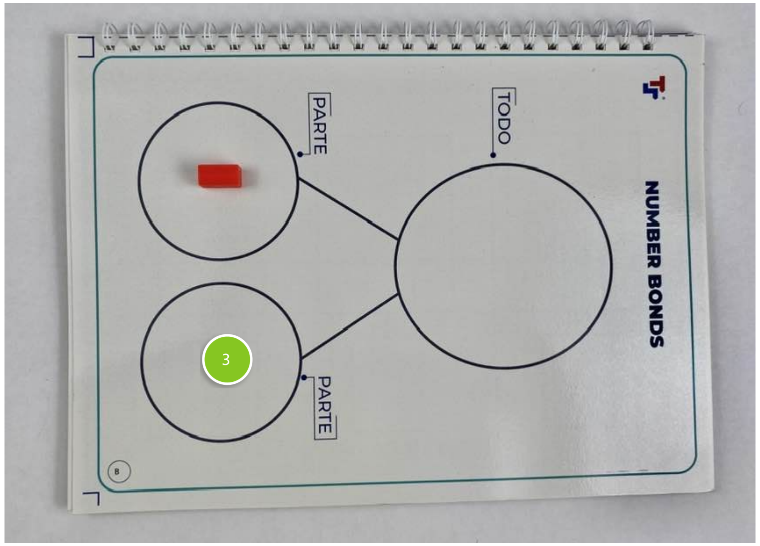
8 = 4 + 4


NUMBER BONDS
TODO
PARTE
PARTE

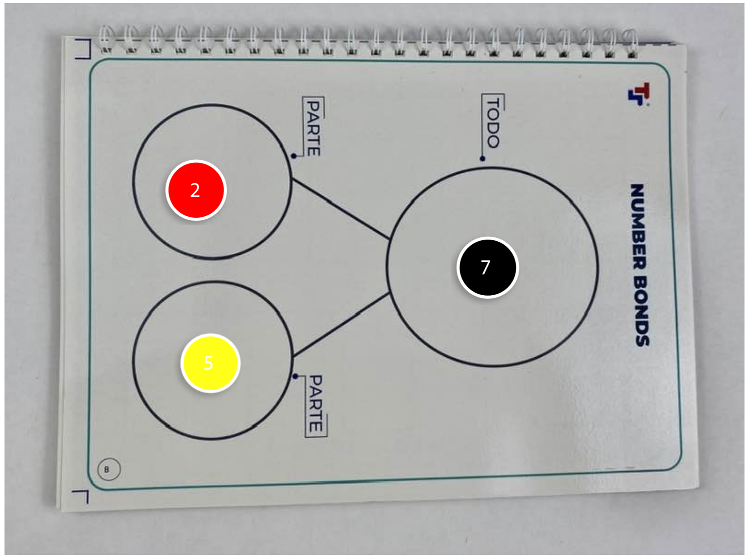
? = 0 + 6


NUMBER BONDS
TODO
PARTE
PARTE

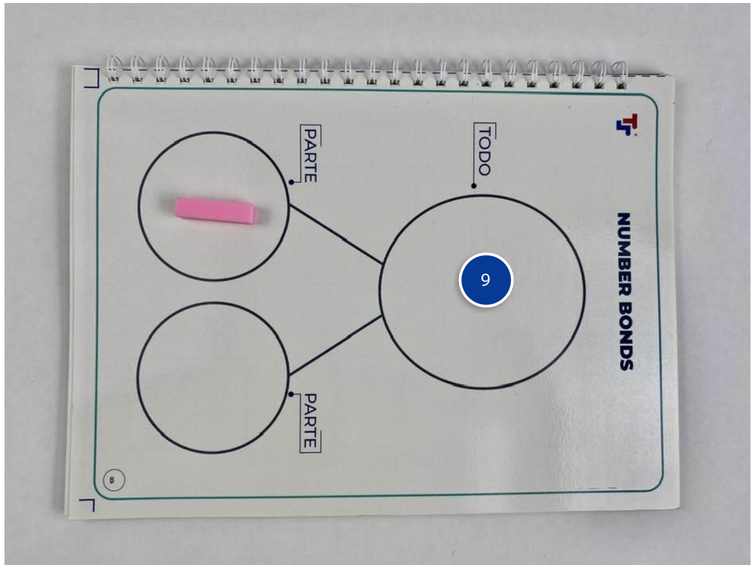
2 + 3 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
3
PARTE

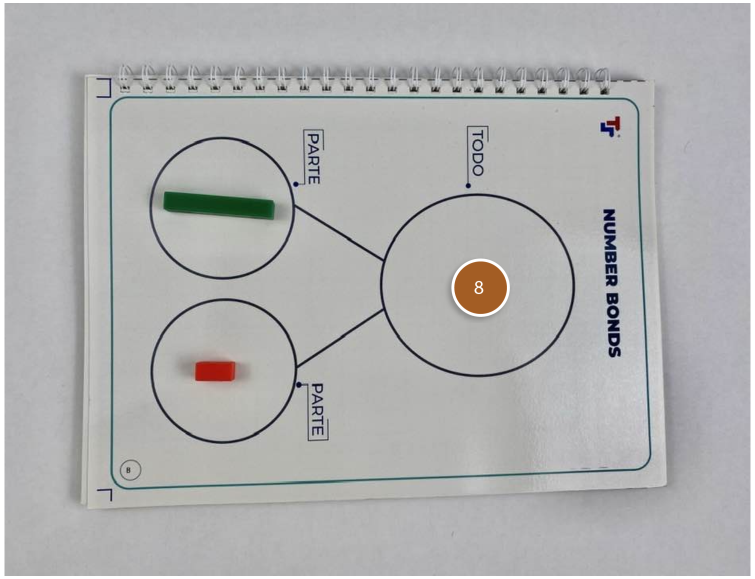
2 + 5 = 7


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
2
7
5
PARTE

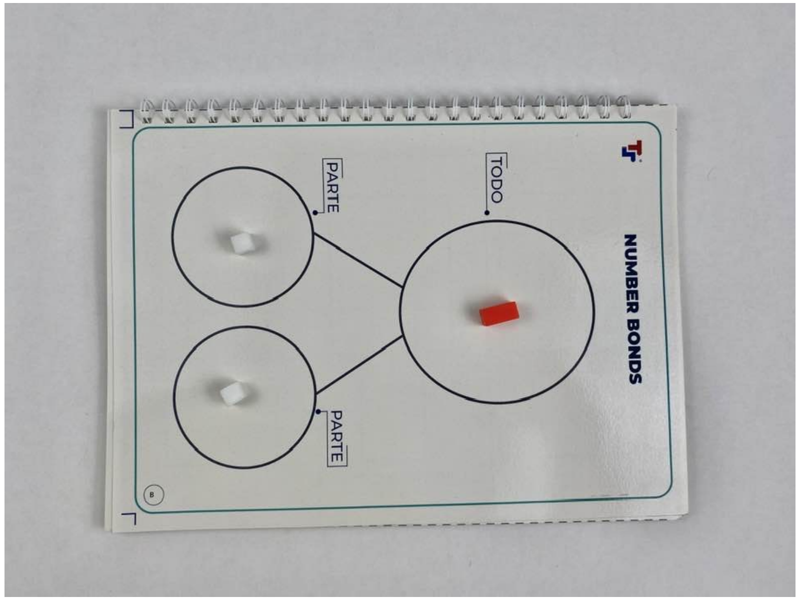
4 + ? = 9


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
9
PARTE

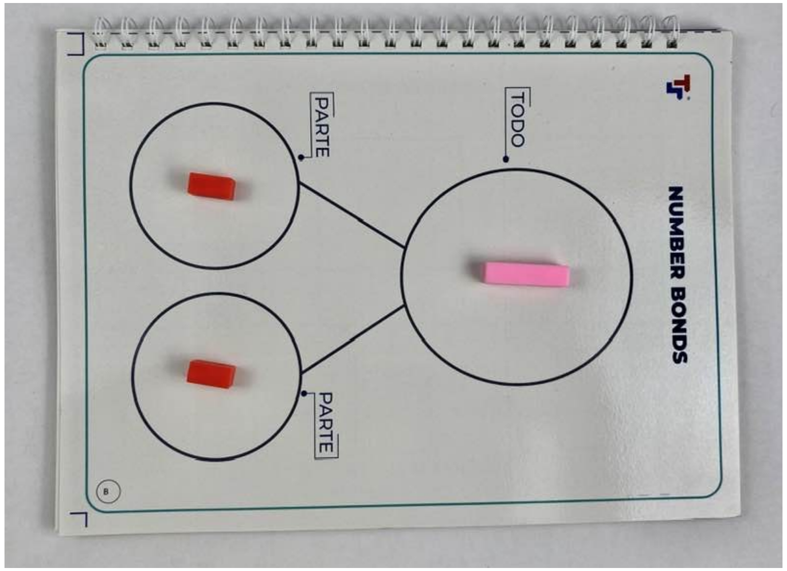
6 + 2 = 8


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
8
PARTE

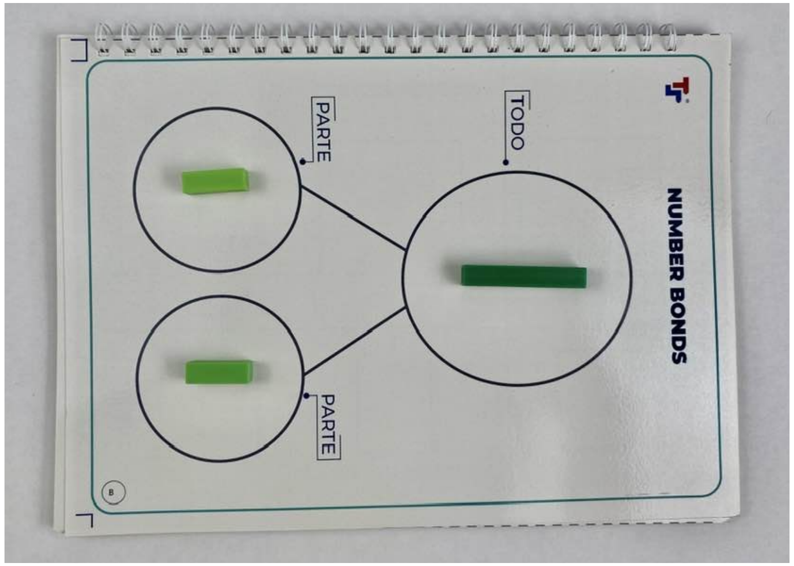
1 + 1 = 2



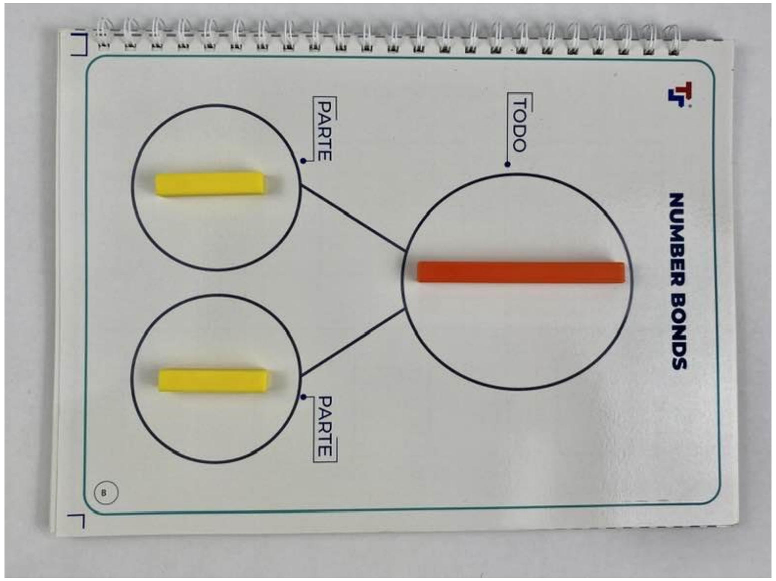
2 + 2 = 4



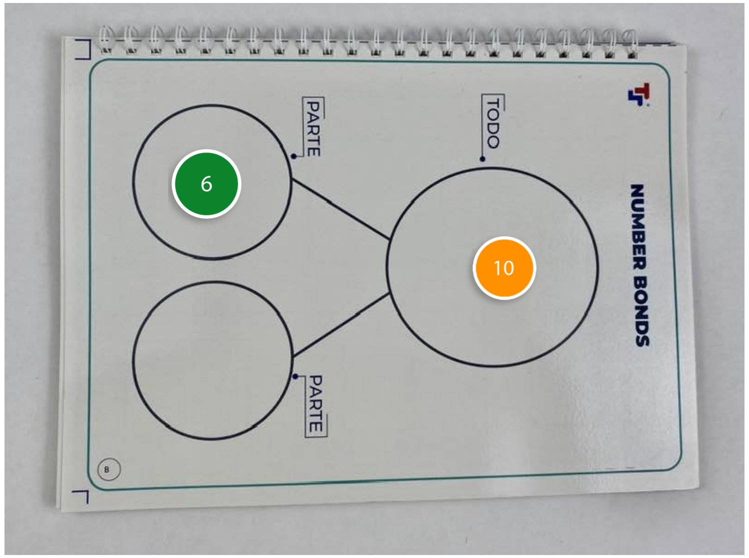
3 + 3 = 6



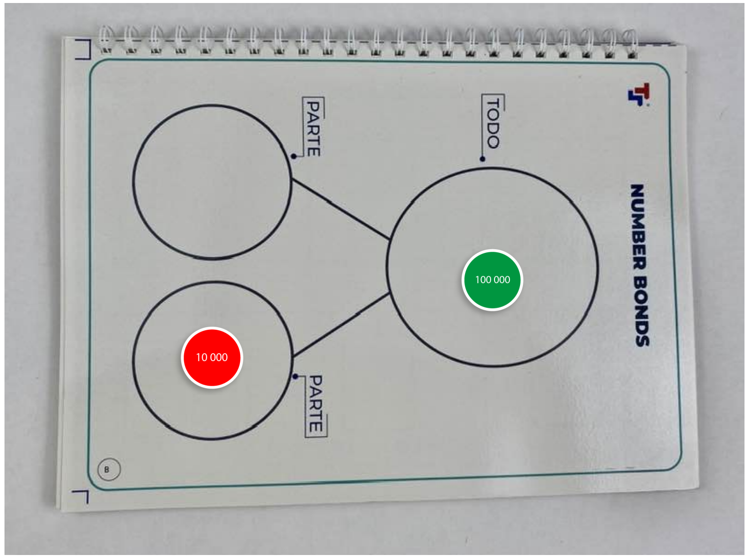
5 + 5 = 10



6 + ? = 10

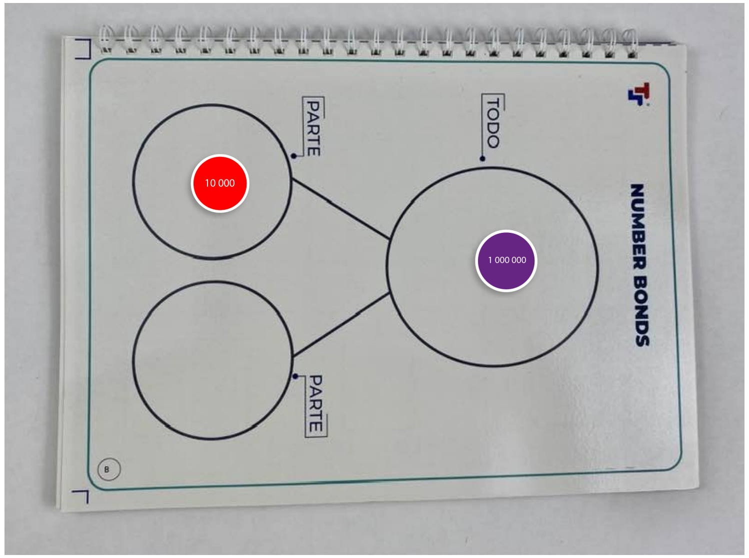


10 000 + ? = 100 000

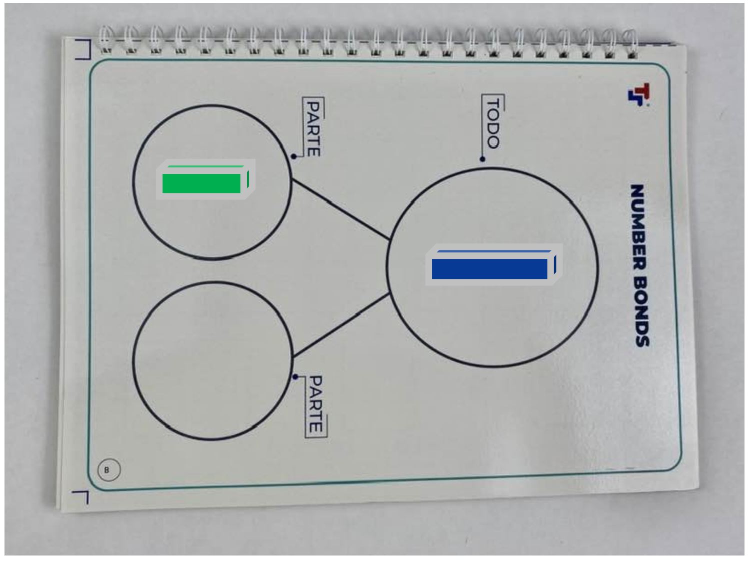


10 + ? = 1000

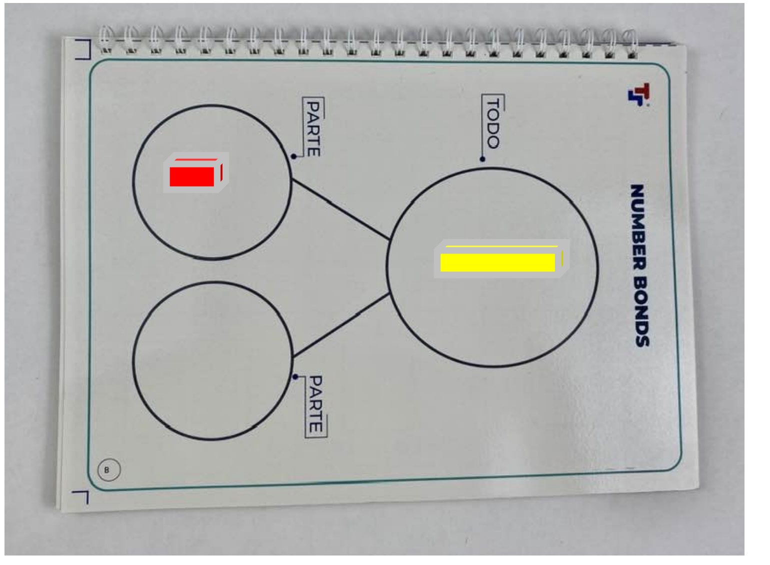
10 000 + ? = 1 000 000



$$9 - 6 = ?$$


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

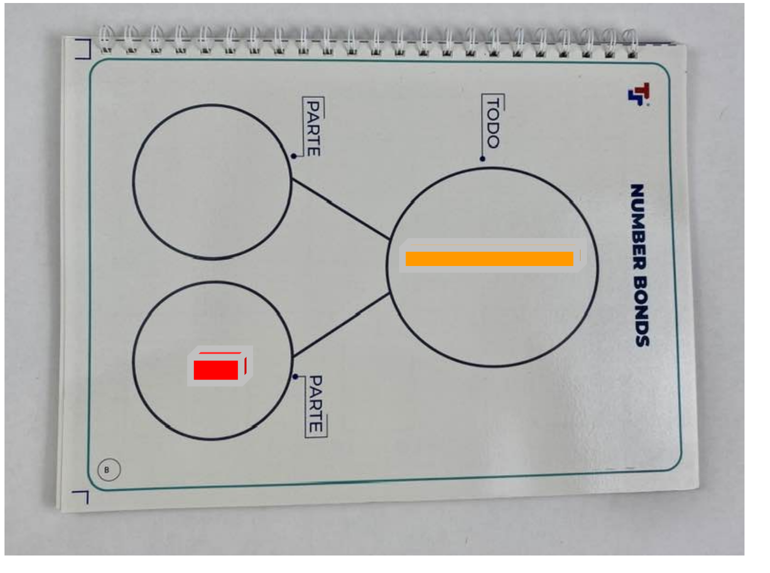
$$5 - 2 = ?$$


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

$$8 - 4 = ?$$


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

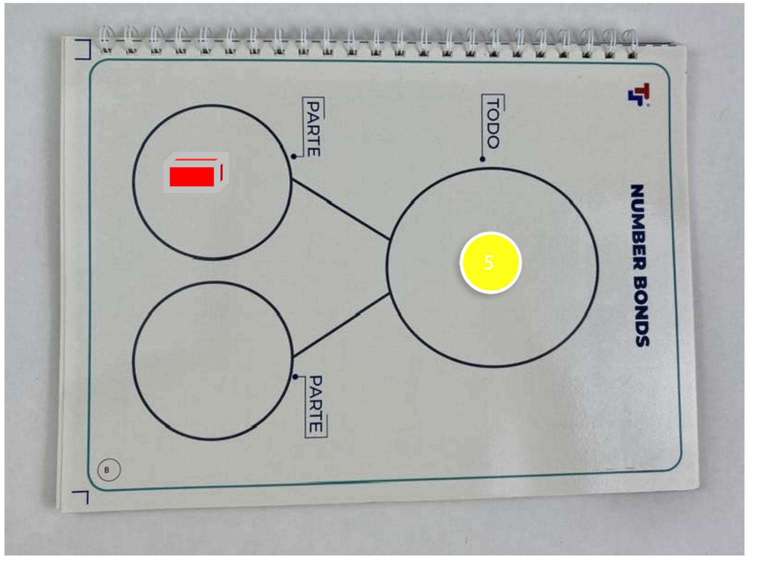
$$10 - 2 = ?$$


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
PARTE

9 - 6 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
9
PARTE

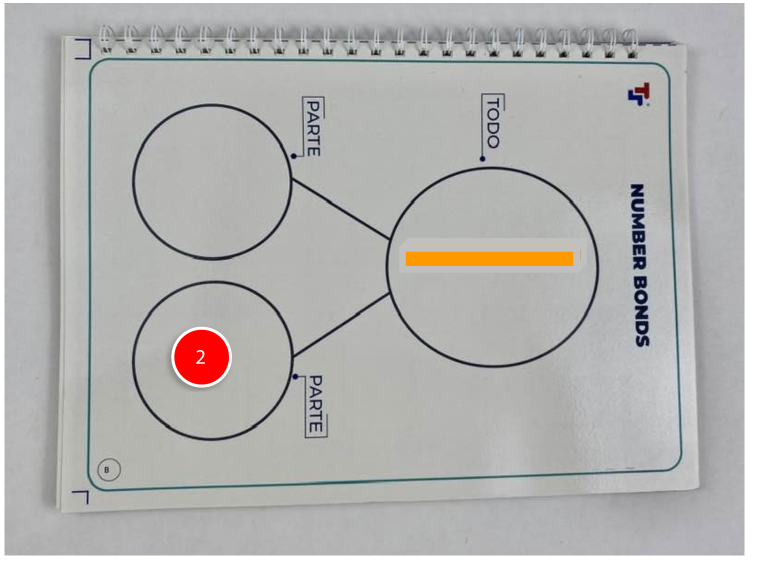
5 - 2 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
5
PARTE

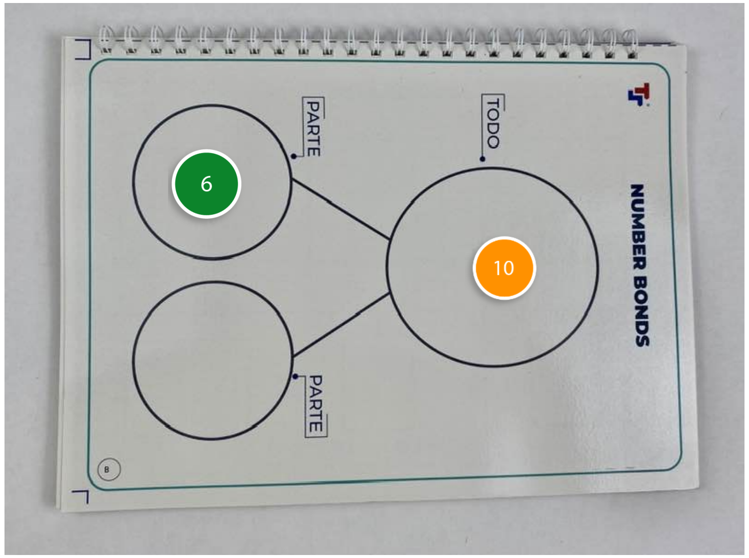
8 - 4 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
8
PARTE

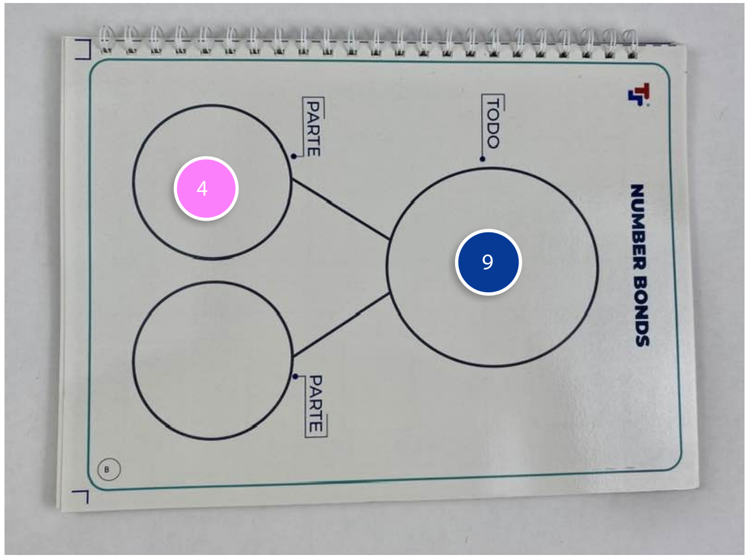
10 - 2 = ?


PARTE
TODO
NUMBER BONDS
2
PARTE

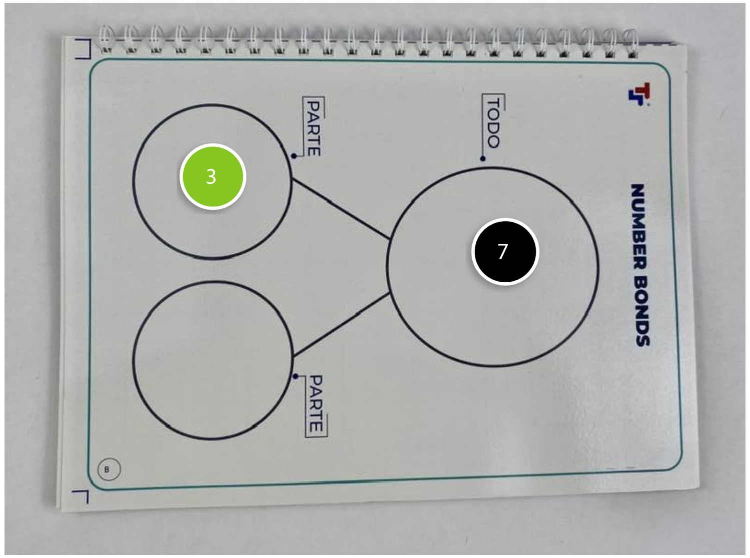
10 - 6 = ?


PARTE
TODO
6
10
PARTE
NUMBER BONDS

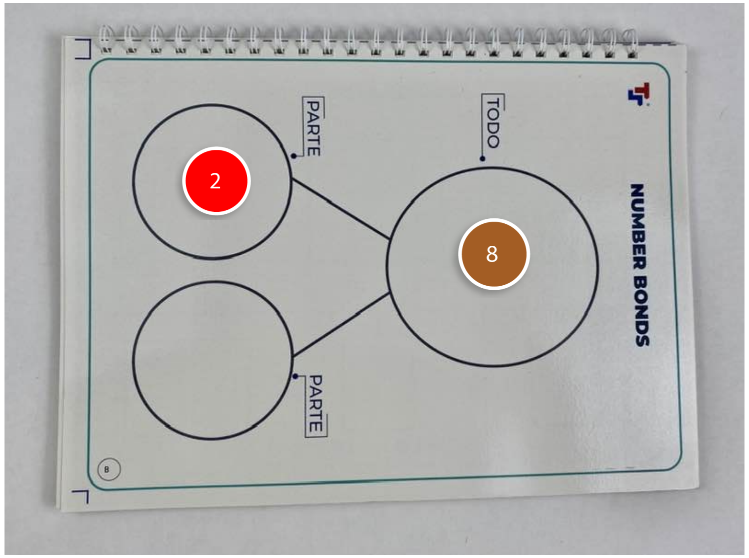
9 - 4 = ?


PARTE
TODO
4
9
PARTE
NUMBER BONDS

7 - 3 = ?


PARTE
TODO
3
7
PARTE
NUMBER BONDS

8 - 2 = ?


PARTE
TODO
2
8
PARTE
NUMBER BONDS

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN

Es importante que los niños aprendan de manera correcta a descomponer números, sobre todo componer y descomponer los números hasta diez. En la actividad 1, se representa el número dos con la regleta, así como su dibujo y símbolo, siguiendo el enfoque CPA. En la actividad 2, se representa diferentes formas de construir el 2: 1 + 1, 0 + 2, 1 + 0, 0 + 1.

Conocemos los primeros números.

1 Todo sobre el dos. 

¿Cómo se representa el dos? ______________________

Dibujo la regleta que tiene el valor dos
2

2 Descomponer el número 2

___ + ___ = ___

___ + ___ = ___

___ + ___ = ___

___ + ___ = ___

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN

En la actividad 1, se representa como concreto, pictórico y abstracto. En la actividad 2, se presenta diferentes formas de construir 3: 1 + 2, 2 + 1, 3 + 0, 0 + 3, 1 + 1 + 1, 2 + 0 +1.

Los niños demuestran su aprendizaje descomponiendo con sus regletas Cuisenaire, fichas circulares de regletas, así como los símbolos que escriben.

Conocemos los primeros números.

1 Todo sobre el tres. 

¿Cómo se representa el tres? ______________________

Dibujo la regleta que tiene el valor de tres
3

2 Descomponer el número 3

___ + ___ = ___

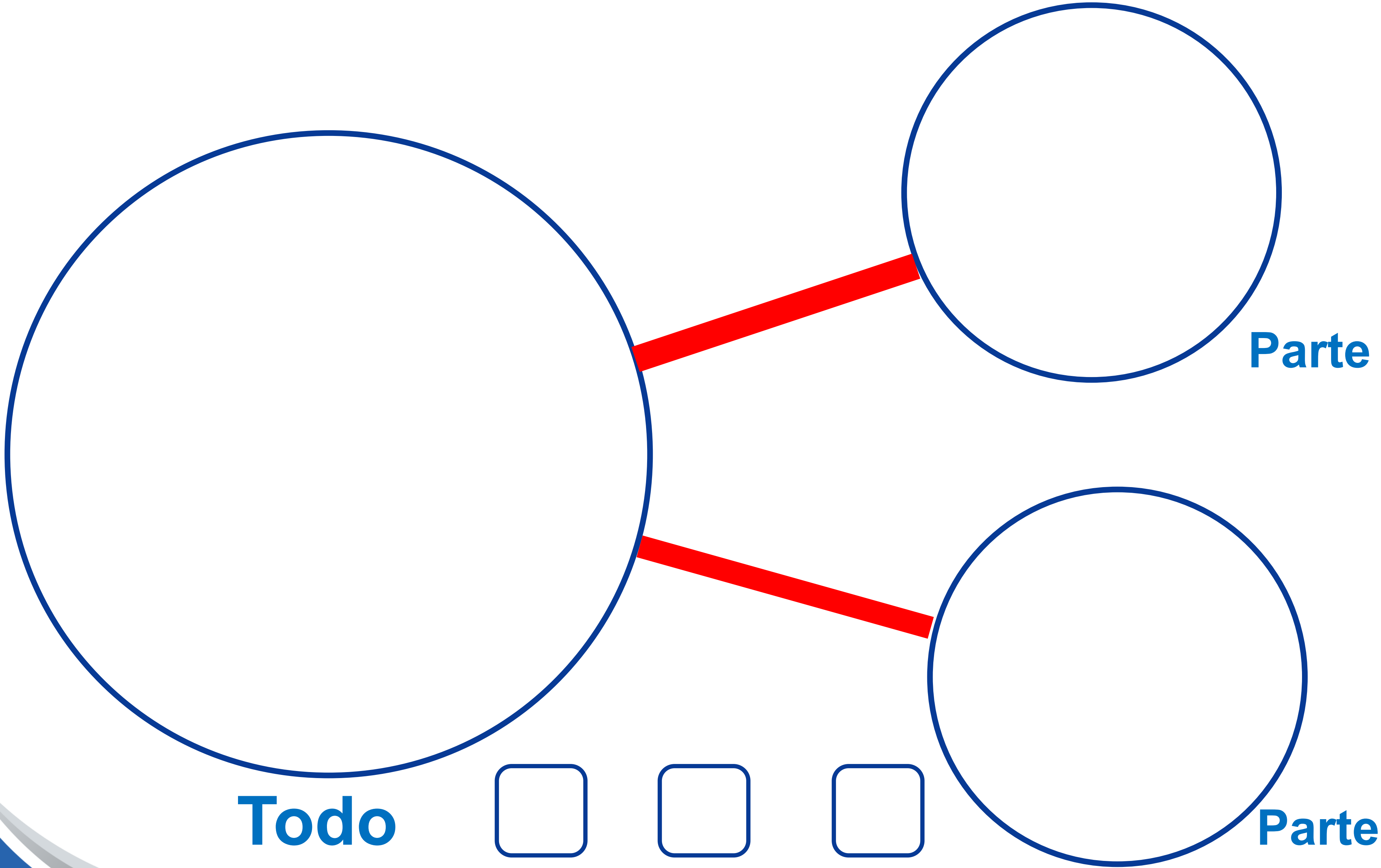
___ + ___ = ___

___ + ___ = ___

___ + ___ = ___

DIAGRAMA DE DESCOMPOSICIÓN

Elige un número ,represéntalo con regletas en el círculo más grande, luego repártelo en las partes de distintas maneras.

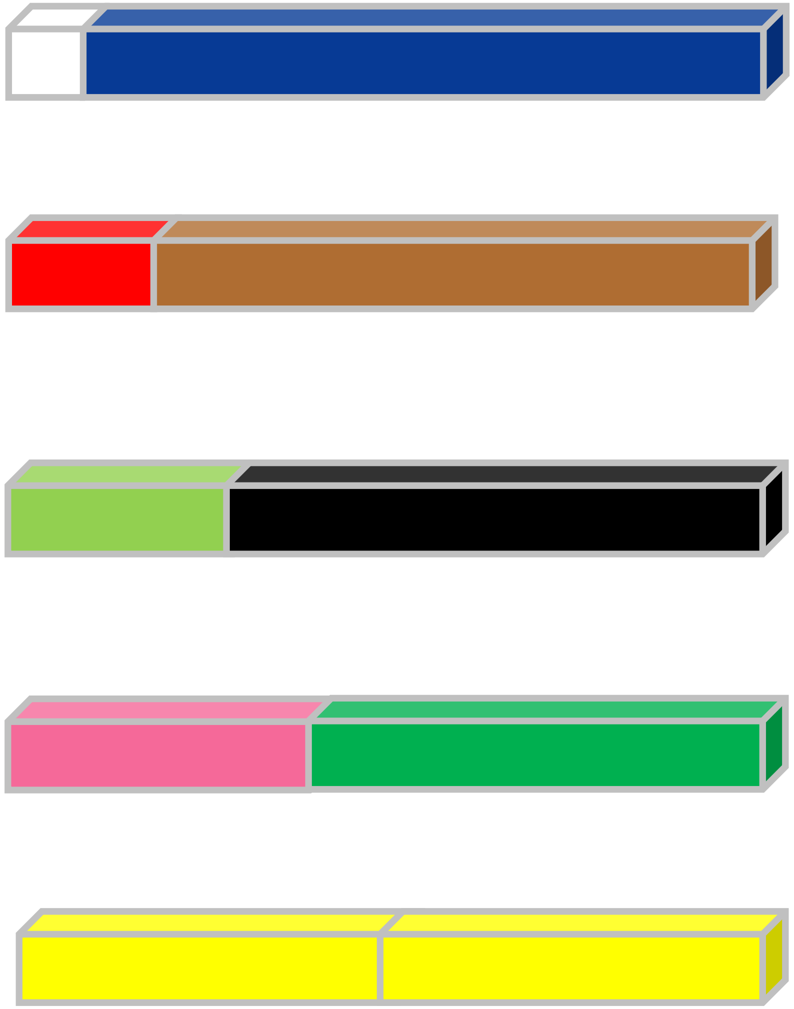


ACTIVIDAD: CONOCIENDO AL NÚMERO 10

Con las regletas buscamos todas las maneras de formar 10.

ACTIVIDAD: DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA

Construye trenes numéricos de 10, luego completa los símbolos por cada co-



$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

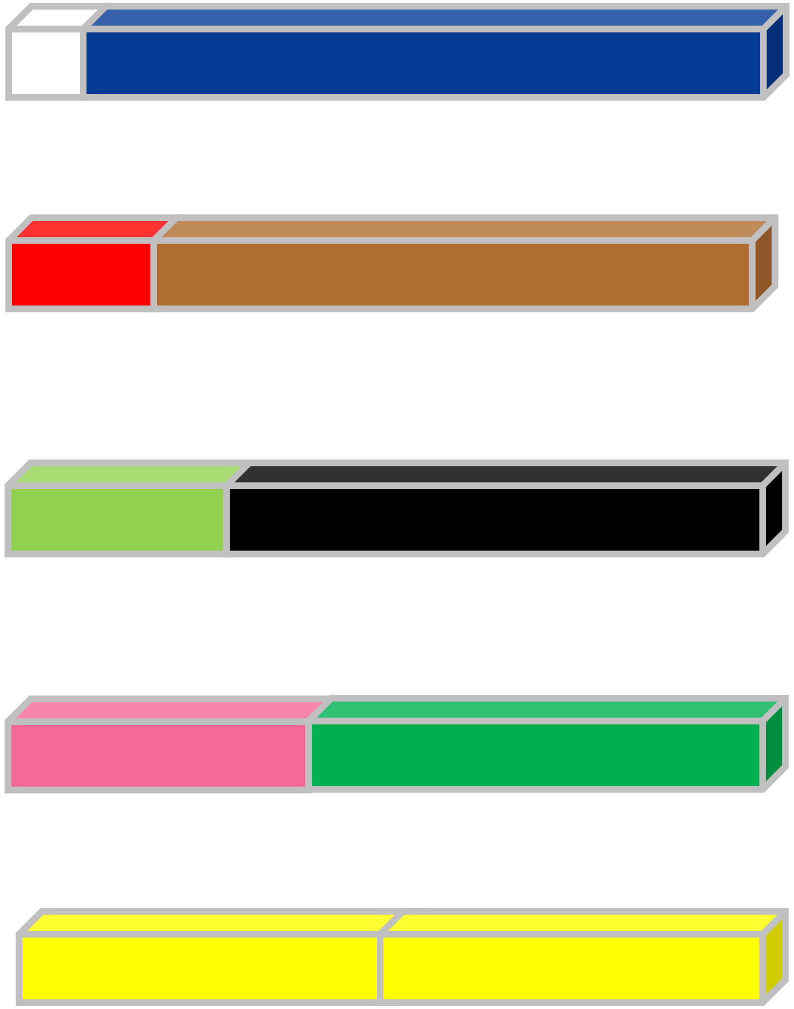
$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

ACTIVIDAD: DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA

Construye trenes numéricos de 10, luego completa los símbolos por cada co-



$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

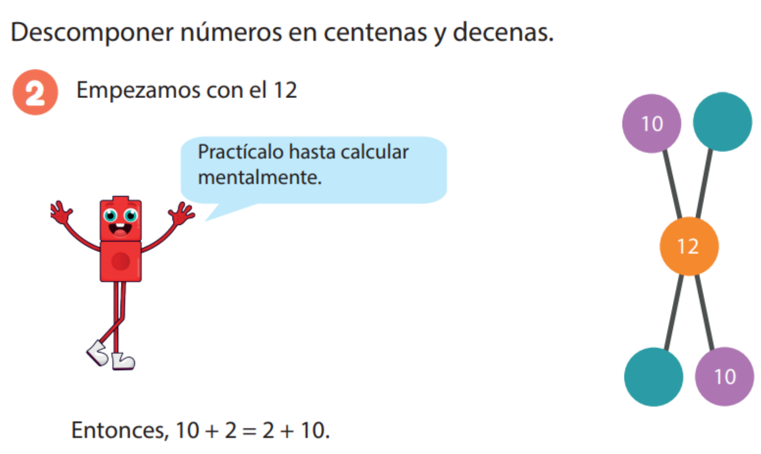
$\square + \square = 10$

$\square + \square = 10$

FORMAR GRUPOS DE DIEZ

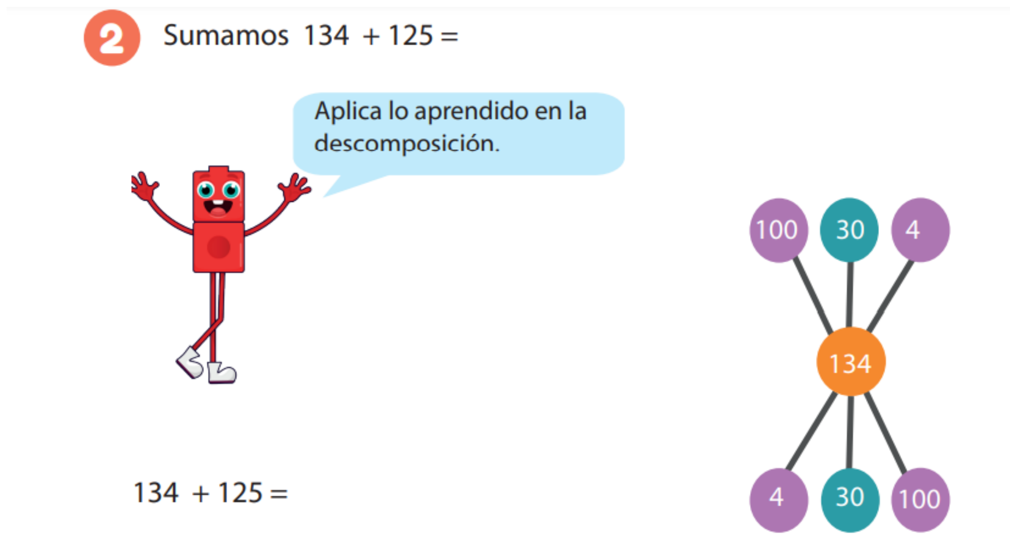
El aprendizaje de componer y descomponer números de 1 hasta 10, nos ayudará a comprender y estructurar números más grandes. En la figura 1, observamos cómo se representa el número 12 como un 10 + 2 o un 2 + 10, si bien, se puede descomponer de diferentes formas, esta forma está relacionada a cómo se representa dentro del sistema numérico decimal.

Entonces, los números conectados nos permite comprender un número en su sistema de representación y permite la operacionalización cuando se requiera.



FORMAR GRUPOS DE DIEZ

En la imagen observamos la adición de 134 + 125, donde se vuelve a utilizar el esquema de números conectados y se descompone considerando los órdenes del sistema numérico decimal. Las regletas Cuisenaire, cumplen un rol de aproximarnos a comprender el número y la noción de decena, que son la base para comprender los procesos involucrados cuando operamos.



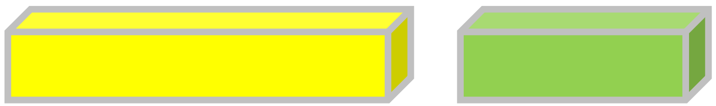
SUMAR FORMANDO NÚMEROS CONECTADOS

En las actividades anteriores utilizamos las regletas y el diagrama de círculos para componer y descomponer un número. Ahora vamos a formalizar lo aprendido en una adición. En la imagen tenemos un tren que está compuesto el 5 y el 3 (estos representan las partes). El todo se puede representar con el 8, la regleta de color marrón

Representamos en nuestro diagrama de círculos las partes con los símbolos de los números (numerales). Se puedes observar también la frase matemática:

5+3 = 8

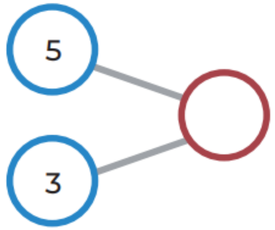
¿Cuántos cubos hay en total?



____+____ = ____ o

____+____ = ____

Hay ____ cubos en total.

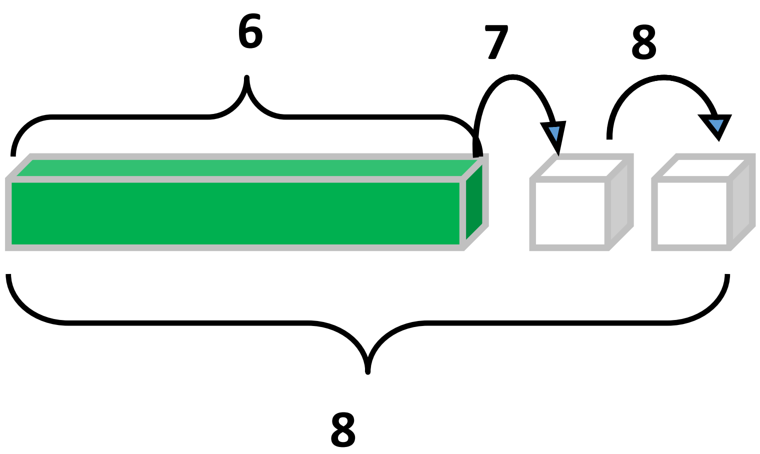


SUMAR CONTANDO HACIA ADELANTE

Al número 6 agrégale 2, representa con tus regletas *¿Cuánto tienes en total?*

Una estrategia es contar hacia adelante; es decir, desde el número 6 contamos los dos cubos que agregamos: 7 y 8 para saber el todo o total. La diferencia entre “Sumar formando números conectados” y “Sumar contando hacia adelante” es que en la primera, los niños cuentan desde el inicio para hallar el resultado (para sumar 6+2 ellos cuentan “*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8”*), mientras que al sumar contando hacia adelante, ellos parten del 6: “*6,7,8”*.

A esta técnica también suelen llamarle el sobreconteo.

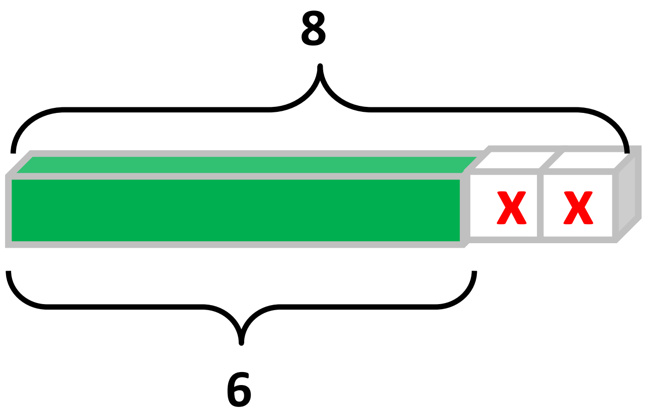


RESTAR QUITANDO

A una torre de 8 le quitamos 2, luego contamos cuánto nos quedan. En la imagen los niños le quitan un bloque de dos y luego cuentan cuántos policubos rojos quedan. Acto seguido, cuentan:1, 2, 3, 4, 5, 6 y quedan en total 6.

Esta es una de las primeras técnicas que realiza el niño para restar. Podemos crear diversas historias, retos o problemas para recrear y representar con las regletas una resta. Por ejemplo: *Tengo 9 manzanas, me como 3 ¿Cuántas me quedan?*

Hay 7 loros en un árbol, se van 2 ¿Cuántos quedan?



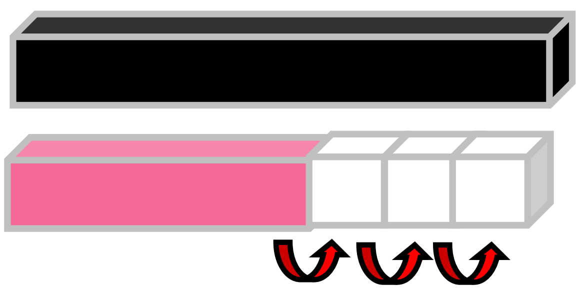
RESTAR CONTANDO HACIA ADELANTE

Analiza el siguiente reto: *tengo 7 manzanas, regalé algunas y ahora tengo 4 ¿Cuántas he regalado?* Para resolverlo, el niño tiene de información el todo (7) y una de las partes (4).

Esta técnica consiste en que el niño represente lo que le queda con las regletas: 4 manzanas, luego contará hacia adelante hasta llegar a 7 manzanas que era lo que tenía al principio.

Otra forma es representar una torre de 7 regletas y quedarse con tantos regletas como con manzanas se quedó. Luego contar cuánto le falta para llegar a 7, sin utilizar como referente la torre que se ha quitado.

En cualquiera de las dos formas, se deberá contar desde una de las partes hacia adelante hasta el todo.



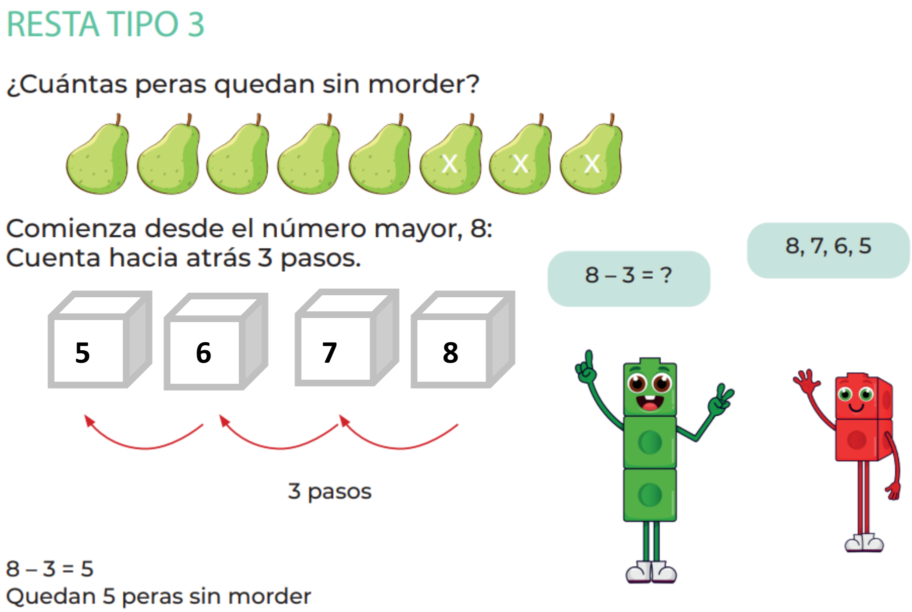
RESTAR CONTANDO HACIA ATRÁS

Para realizar esta técnica de conteo, se requiere una mayor abstracción que las técnicas anteriores. Por ejemplo: Tengo 8 peras, mordí 3 peras ¿Cuántas peras quedan sin morder? Evidentemente se pueden resolver con las otras técnicas también, pero el uso de esta supone una mayor comprensión. Mentalmente esta es la forma de razonar para solucionar el reto:

-Tengo 8 peras y uno menos, ahora tengo 7.

-Tengo 7 peras y uno menos, ahora tengo 6.

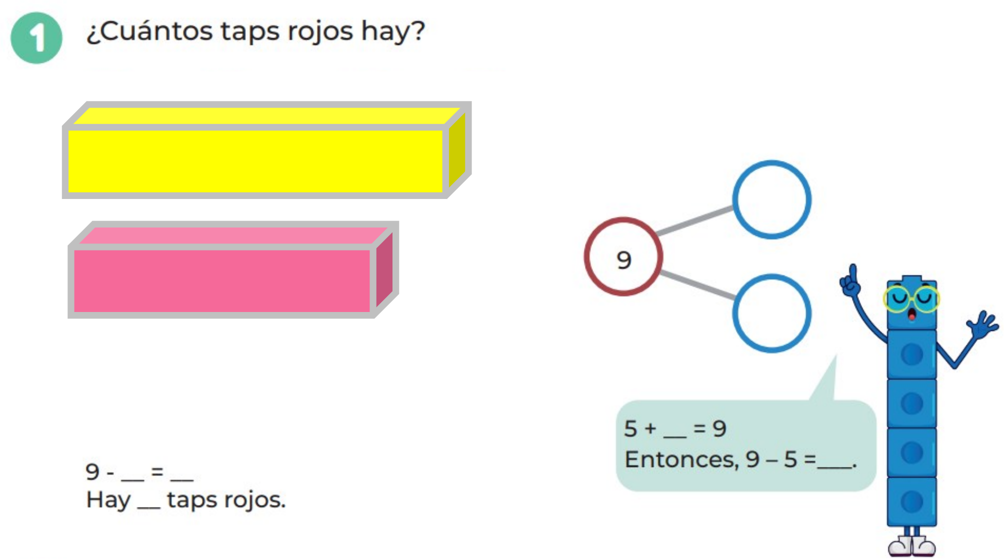
-Tengo 6 peras y uno menos, ahora tengo 5.



RESTAR USANDO LOS

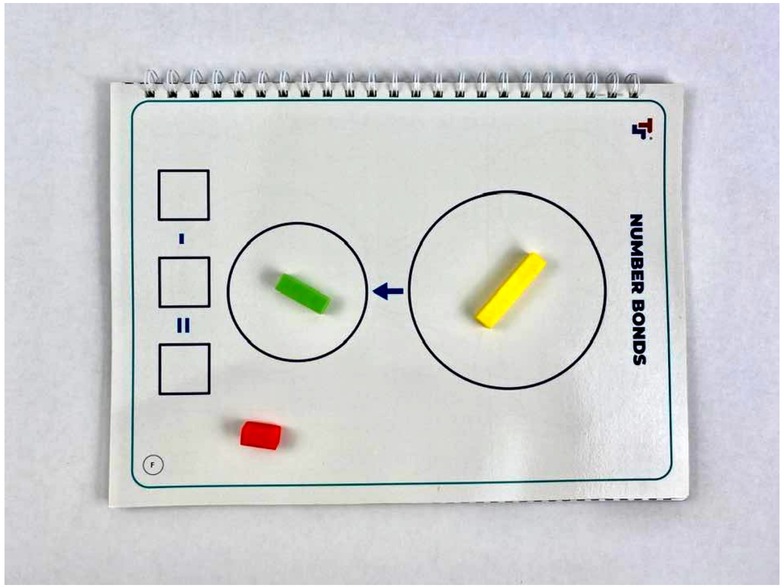
Utiliza el esquema de números conectados, relaciona las partes y el todo. En un primer momento representa el todo, luego representa las partes y su frase matemática. Lo importante en esta técnica no es tanto el resultado, sino las relaciones que se comunican entre las partes y el todo; y el todo y las partes.

En la imagen se le pregunta a los niños *¿Cuántos taps rojos hay*? Esto podría resolverse contando todo o quitándole la parte azul al todo; sin embargo, va más allá que el resultado. Son los procesos lo que aquí se evalúan.



RESTAR

Como vimos, la sustracción tiene que ver con las relaciones matemáticas, los procesos y las técnicas que utilicemos. A medida que los niños conozcan más sobre el número como propiedad cardinal de un conjunto, podrán establecer relaciones entre los conjuntos con una mayor comprensión, como la sustracción o la adición. Estas son operaciones inversas; sin embargo, es importante que el niño comprenda primero la naturaleza de la adición para empezar a explorar la sustracción.



Los metaplanos y el uso de regletas nos facilitan visualizar y comunicar estos procesos con mayor claridad. En la primera imagen observamos un círculo grande y en é representamos el 8 con la regleta negra y le quitamos 3 (regleta verde clara), comparamos cuánto de falta para completar 8 y vemos que equivale a el 5 o una regleta amarilla Este metaplano nos ayuda para la técnica *“Restar quitando”.*

El siguiente metaplano nos ayuda a utilizar la técnica *“Restar contando hacia atrás”.* Aunque aparecen fichas circulares, pueden ser reemplazadas por regletas blancas.

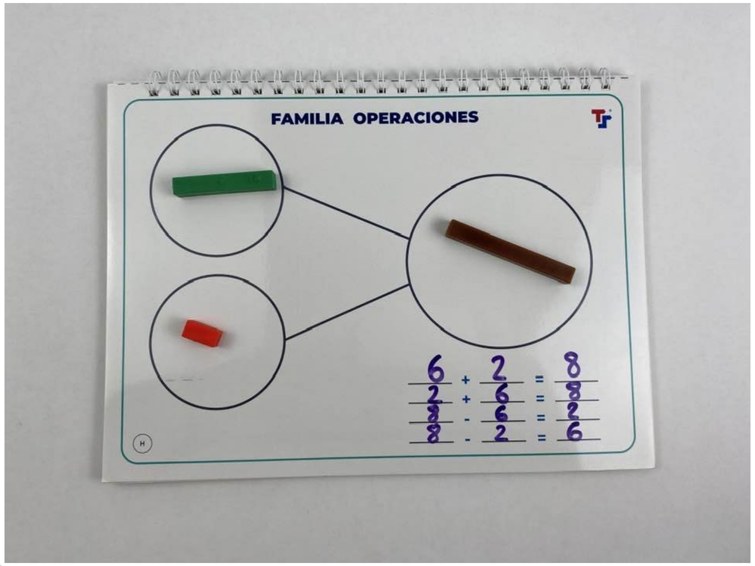
Recordemos utilizar las regletas como material concreto continuo y discontinuo. Es importante que el uso de las regletas y las operaciones se den en un contexto de historias, cuentos con retos que sean desafíos interesantes y con contexto para los niños.

FAMILIA DE CUATRO OPERACIONES

Cuando hayamos trabajado diversas técnicas para la adición y sustracción, podremos encontrar todas las relaciones entre las partes y el todo. Esto se hace con la familia de las cuatro operaciones. Observamos en la imagen la representación del 4 con la regleta rosada y el tres con la regleta verde clara, con ellos formaremos una familia de cuatro operaciones:

4+3 = 7, 3+4 = 7, 7—3 = 4, 7 – 4 = 3

Lo más importante aquí son las relaciones que establecemos entre los números: relaciones de adición y sustracción. Los números pueden cambiar, pero la relación matemática es el aprendizaje.

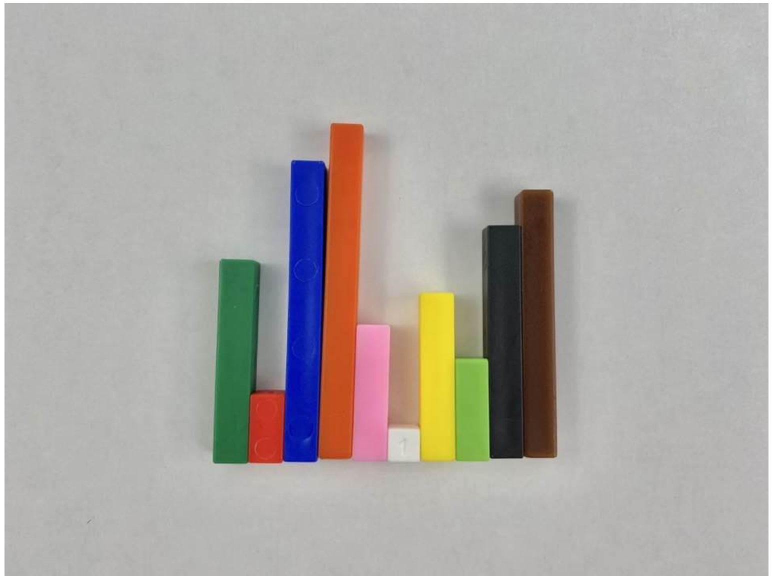


NÚMEROS ORDINALES

Hemos trabajado en actividades anteriores la noción de ordinalidad con las torres y trenes de colores. A partir de ello podemos ir dándoles un nombre a cada posición.

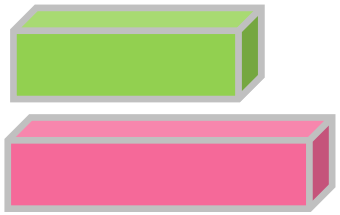
Al trabajar el conteo de forma discontinua hemos estado trabajando implícitamente la ordinalidad.

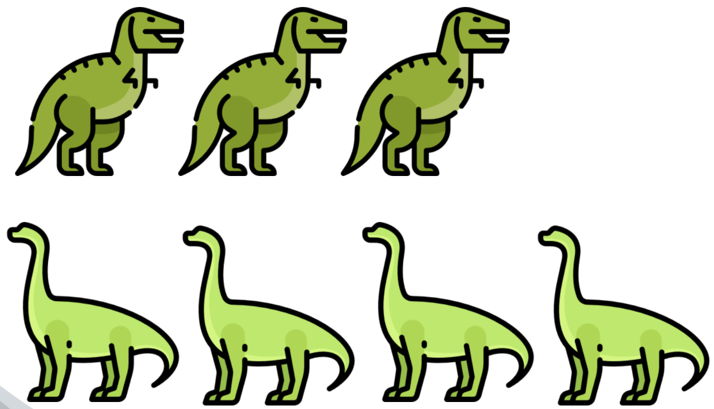
Cuando los niños observan que pueden ordenar un grupo, por ejemplo como una torre o un tren y que cada elemento (regleta) tiene una posición dentro del grupo, entonces podrán ver que esa regleta tiene el lugar 1 o 2 y que en matemáticas se le dice el primer lugar y el segundo lugar, respectivamente.



LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

El proceso de la adición y sustracción se inicia desde la construcción del número. Solo que poco a poco irá adquiriendo un carácter más simbólico . Primero a partir del lenguaje hablado y luego en el escrito. Con los números conectados se verbalizará por ejemplo: *tres y cuatro hacen siete*, luego de comprender el proceso se les enseñará la frase matemática : *3+4 = 7*





LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Lo importante en el proceso de adición , además de visualizar la construcción , es relacionar las partes con el todo. Esto lo hemos trabajado mucho en los números conectados. Representamos con las regletas los siguientes retos.

Por ejemplo:

Habían 3 dinosaurios carnívoros en el bosque, llegaron 4 dinosaurios herbívoros. ¿Cuántos dinosaurios hay en total?

Habían 7 dinosaurios en el bosque, se fueron 3. Cuántos dinosaurios quedaron en el bosque?

Hay en mi jardín 3 naranjas, brotaron de mi árbol 5 naranjas más ¿cuántas naranjas hay?

Tengo 7 cubos , caminaba por el parque y se me cayeron 3 cubos ¿cuántos cubos tengo ahora?

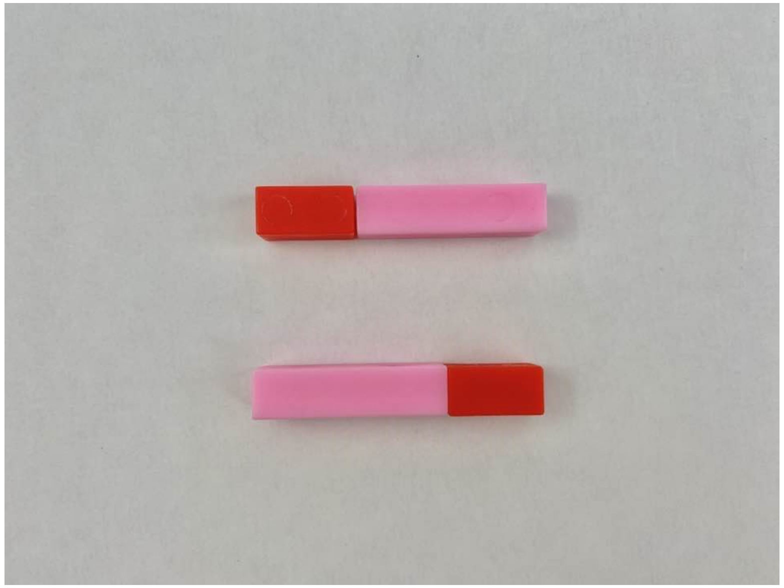
Hay tres manzanas rojas y cuatro manzanas verdes ¿cuántas manzanas hay en total?

Hay 5 manzanas y cuatro naranjas ¿cuántas frutas hay?

Hay 3 carros, 2 motos , 4 camiones ¿cuántos vehículos hay en total?

PROPIEDAD CONMUTATIVA

Cuando se suman dos números, el resultado es el mismo independientemente del orden de los sumandos. Por ejemplo, *2+4 = 4+2.* Este concepto lo trabajamos en los números conectados donde visualizamos , por ejemplo , cuando descomponemos el número 6, que se puede descomponer como un 2 y 4 ; y como un 4 y 2.

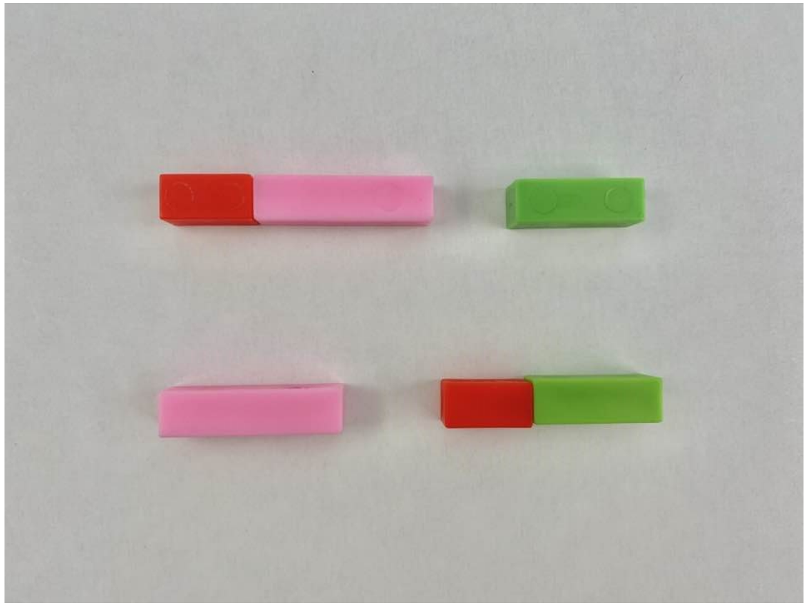


PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Cuando se suman tres o más números, el resultado es el mismo independientemente del orden en que se suman los sumandos. Por ejemplo:

(2+4) + 3= 4 + (2+3)

En los números conectados no solo se aprende a descomponer el todo en sus partes sino que cada círculo representa en sí el concepto de un conjunto, lo que nos permitirá distribuir los números sin alterar el sumando total.



JUEGOS DE AGILIDAD CON METAPLANOS

Juego: Fut Soto

Reglas:

Es un juego en pareja, donde cada participante tendrá un equipo de 5 jugadores (regletas).

1. Cada jugador (regletas) se puede mover hacia adelante, atrás, en línea recta o diagonal.

2. Anotará un gol quien saque 6 en el dado o un 12 (al lanzar los dos dados) siempre y cuando se encuentre en el área de gol del equipo contrario.

3. Los puntajes se determinan por la suma de los dados que lanza cada jugador y este puntaje conlleva una acción a realizar

4. Cuando te salga un avance deberás seguir lanzando y avanzando a tu jugador seleccionado (regletas) hasta

Aquí puedo saber qué me corresponde hacer luego de lanzar los dos dados juntos:

2: Avance

3: Fuera

4: Avance

5: Avance

6: Avance o gol (si se encuentra en la zona de gol)

7: Fuera

8: Avance

9: Fuera

10: Avance

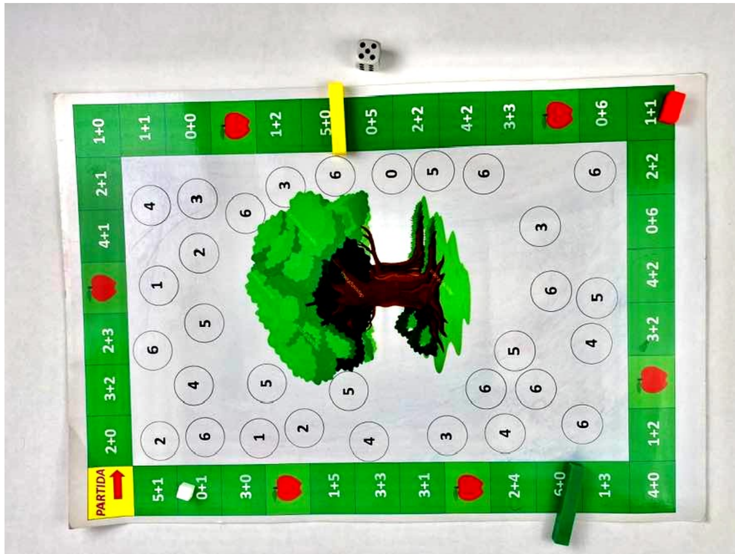
11: Avance

12:

JUEGOS CON METAPLANOS

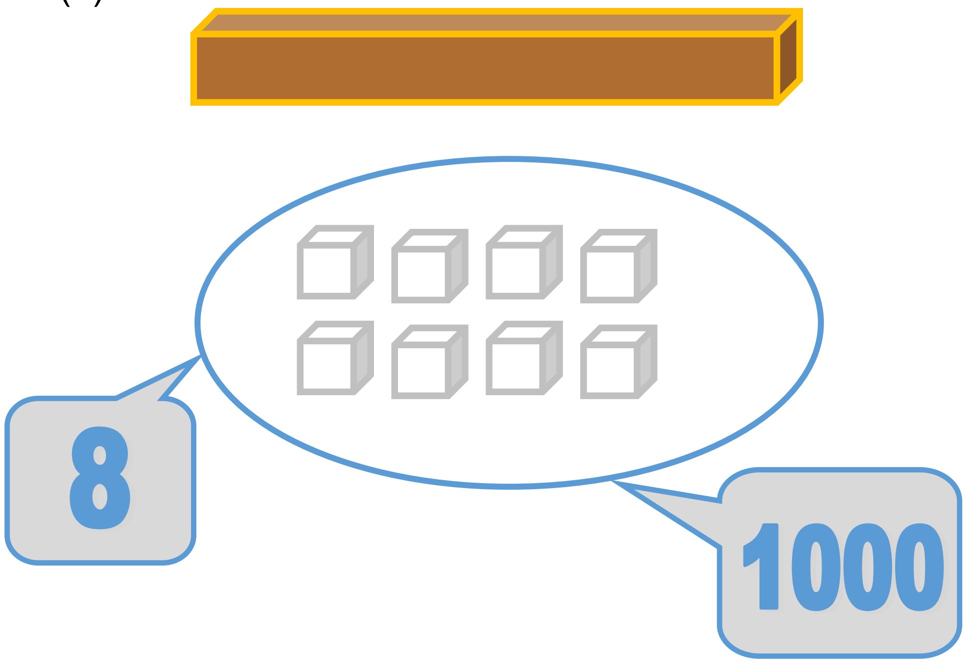
Juego: Ludo de operaciones

Reglas: es un juego de hasta cuatro participantes, donde cada participante tendrá que empezar desde la partida hasta el final. Para ello lanzará un dado que le indicará cuantos casilleros avanzar. En cada casillero donde le toque, encontrará un reto que puede ser una adición o sustracción. Cuando halle la respuesta al reto, encontrará en medio del tablero el número de su respuesta y deberá colocar una regleta de su color de equipo. Gana el juego quien llega primero a la meta y por consiguiente a resuelto todos los retos de adición y sustracción que le correspondieron.



SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL

Hasta ahora, hemos descubierto cómo se construyen los números (agregando una unidad), hemos descubierto también la descomposición de números como otra forma de organizar los números (con el diagrama de círculos). Ahora vamos a explorar un sistema numérico donde para escribir los números se deben agrupar de a diez. Es nuestro sistema numérico decimal y aunque nos parezca de lo más normal, hay muchos tipos de sistemas de numeración y en función de cuál utilicemos, las cantidades que conocemos se escribirán de forma diferente. Aquí hay una cantidad que se escribe de dos formas diferentes porque se agruparon de acuerdo al sistema binario(1000) y decimal(8).

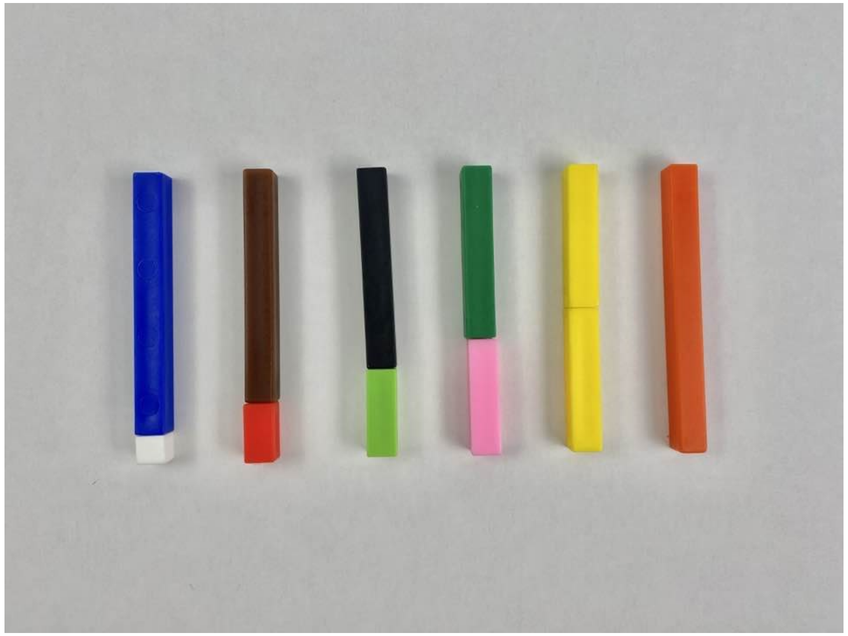


NOCIÓN DE DECENA

Para construir el concepto de sistema numérico decimal, es importante que lo niños comprendan lo que es una decena. El concepto decena no se puede presentar de forma directa, sino que se tiene que trabajar la noción de decena a través de diversas actividades donde formaremos grupos de diez. En la imagen observamos una rejilla con diez espacios donde colocaremos las regletas. Es recomendable empezar de izquierda a derecha llenando primero una fila, luego la siguiente fila hasta completar a tener diez. Representamos como en la imagen con diez blancas o una naranja, ambas representan diez.

NOCIÓN DE DECENA

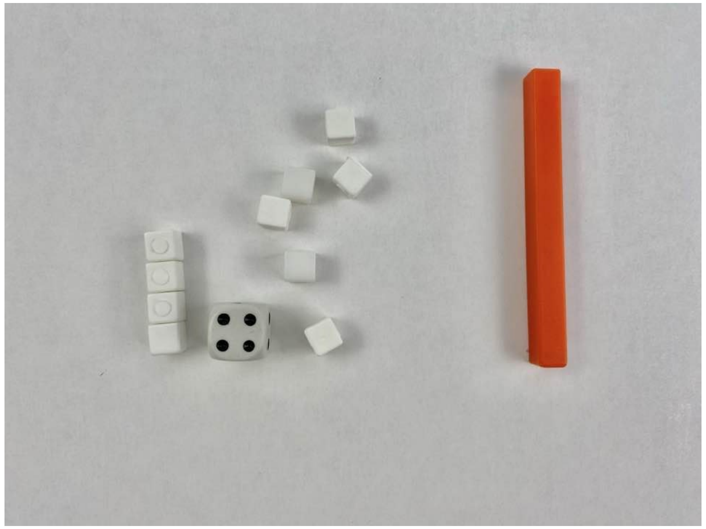
Uno de los grandes retos de la rejilla es que los niños sepan que cuando la rejilla se ha llenado es porque se ha formado un grupo de diez. Cuando se haya interiorizado este concepto de grupo de diez podemos rotularlo como decena. Las regletas por su estructura nos permiten formar trenes o torres, como en la imagen, donde podemos ver las diferentes formas de formar diez o una decena. Los niños, expresan su comprensión de la decena, en la composición y descomposición de la decena, ya que les permite generalizar este aprendizaje con los demás órdenes (centenas, millares).



JUEGO: CARRERA AL DIEZ

Vamos a aprender un juego que se llama “*Carrera al número 10”* , donde vamos a formar una torre con esa cantidad de regletas. Necesitaremos también un dado convencional. Las reglas del juego son las siguientes:

1. Lanzamos el dado y vemos la cantidad de puntos que nos tocó.
2. Esa cantidad de puntos del dado indica que debo construir una torre con esa cantidad de regletas.
3. Lanzo el dado tantas veces sea necesario hasta llegar a formar una torre de diez.
4. Puedes jugar con alguien y que arme su propia torre de diez intercalando el lanzamiento del dado.
5. Cada torre de diez le llamamos también una decena.



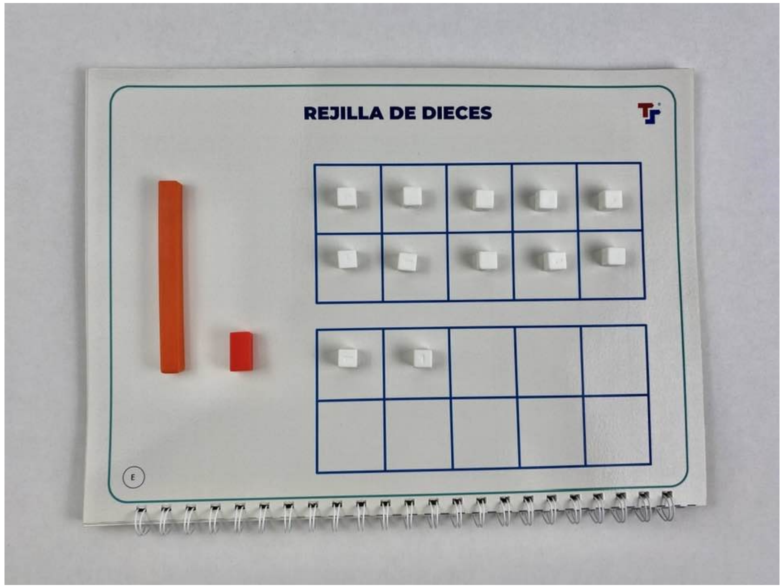
METAPLANOS DE VALOR POSICIONAL

Los niños se preguntan por qué al número diez le llamamos decena y más aún ¿Por qué tiene el 10 un 1 y un 0 cuando lo escriben? Vamos a aprender un juego. Utilizaremos regletas, un dado y el metaplano que se muestra en la imagen. El metaplano tiene un tablero grande (materiales) y un tablero pequeño (símbolos). Jugamos carrera al diez dentro de nuestro metaplano. Si nos toca un 4 en el dado, construimos una torre de cuatro en el tablero grande y escribimos 4 en el tablero pequeño. Así, hasta llegar a diez. Remplazamos por una regleta de diez. Preguntamos: *¿Cuántas unidades hay en el orden de unidades? Cero; ¿Cuántas decenas hay en el orden de decenas? Una. ¡Muy bien!, por eso el diez se escribe con 1 y 0.*

CONTAR HASTA 20

Una vez que se haya comprendido el concepto de decena, podemos construir números hasta el 20. Para ello, además de las actividades con las regletas que se encuentran dentro del proceso concreto, nuestros niños deben realizar dibujos o gráficos de lo aprendido. Por ejemplo, en la imagen se observa cómo se representa la estructura del número 14 que es un grupo de diez o decena y 4 unidades.

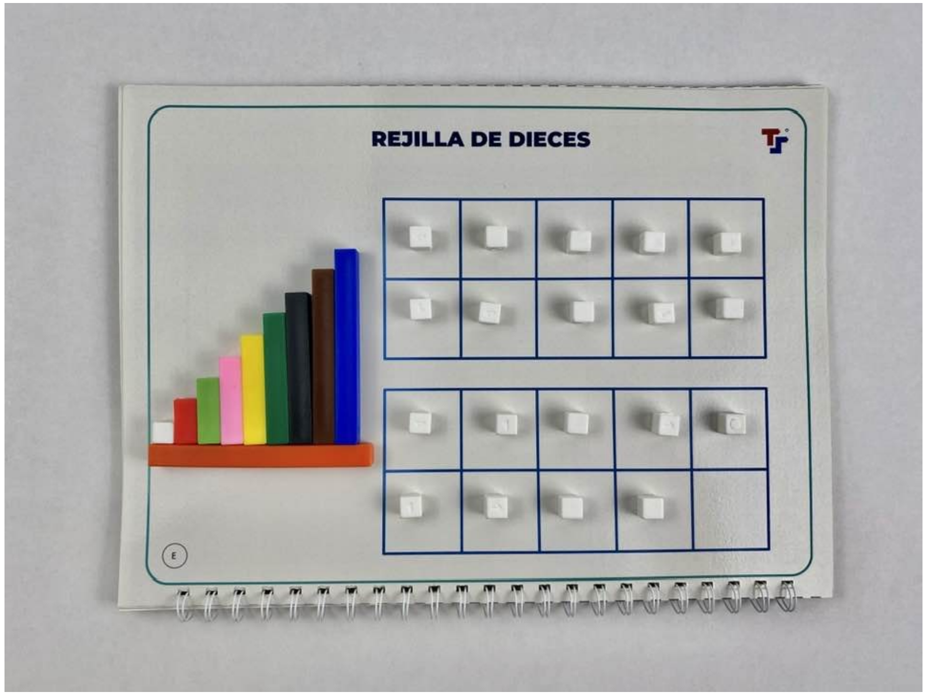
De esta manera, podemos representar los números desde el once hasta el 20 utilizando dos rejillas de diez.



VALOR POSICIONAL

Representamos las construcciones de cantidades mayores a diez con las regletas en el tablero posicional. En estas actividades se representan las cantidades en torres, es decir, la regleta como material concreto continuo.

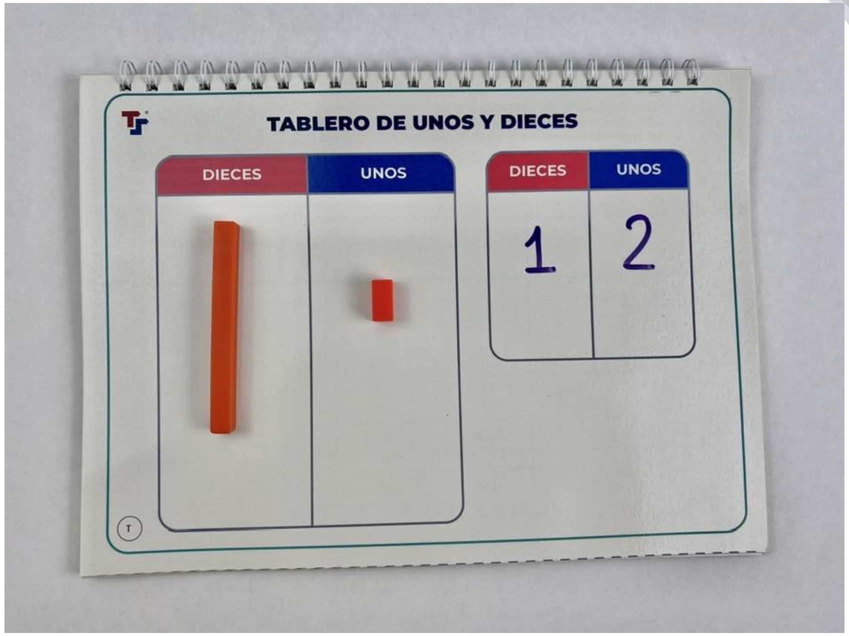
Las regletas utilizan, en su uso estándar, el color naranja para representar el 10. Representamos los números de dos cifras verbalizando: diez y uno, diez y dos, diez y tres.



VALOR POSICIONAL

Podemos seguir construyendo números más grandes que el 10 utilizando las regletas Cuisenaire. La regleta naranja representa una decena.

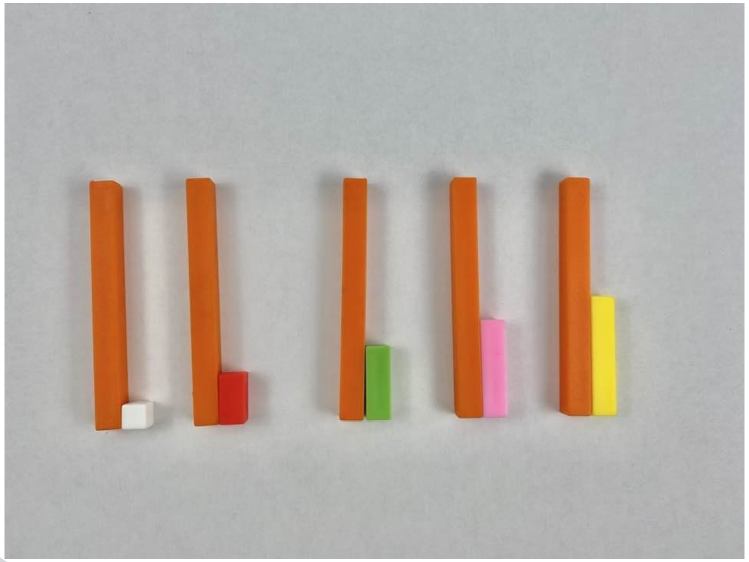
En el tablero del metaplano, se representan los órdenes como: unos y dieces, esto es muy útil como una introducción al concepto. Se forma un diez y dos, que también será luego un doce o una decena y dos unidades; El tablero, permite explicar, por qué el doce, se escribe con un uno y un dos en su escritura.



SECUENCIAS

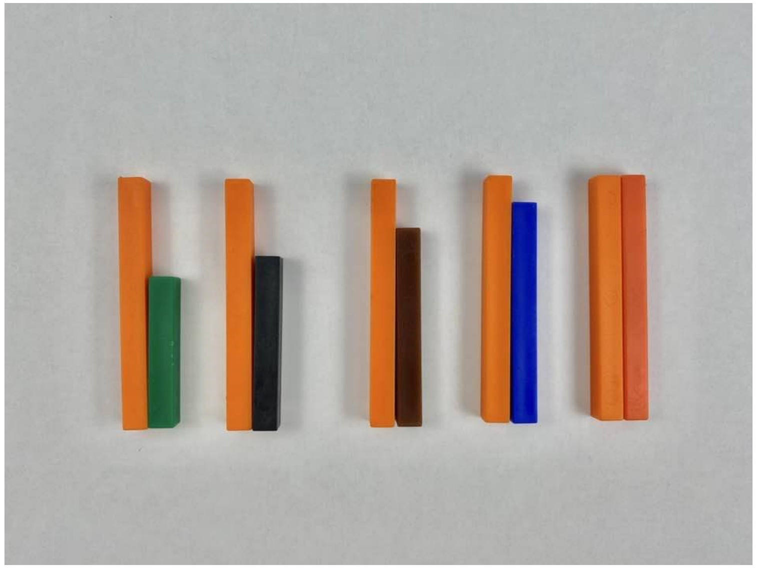
En las siguientes páginas exploraremos la comparación, secuencias, así como diferentes técnicas para sumar y restar. Las regletas nos permitirán explorar estos nuevos conceptos y relaciones matemáticas. Aquí, algunas consideraciones generales de lo que hemos aprendido de nuestro sistema numérico decimal.

Existen muchos sistemas numéricos, así como diferentes bases; incluso dentro del que estamos explorando de base 10, existen diferentes formas de abordar el sistema numérico de base 10 o decimal. La propuesta tiene como protagonistas el uso de las regletas y sus cualidades como material concreto.



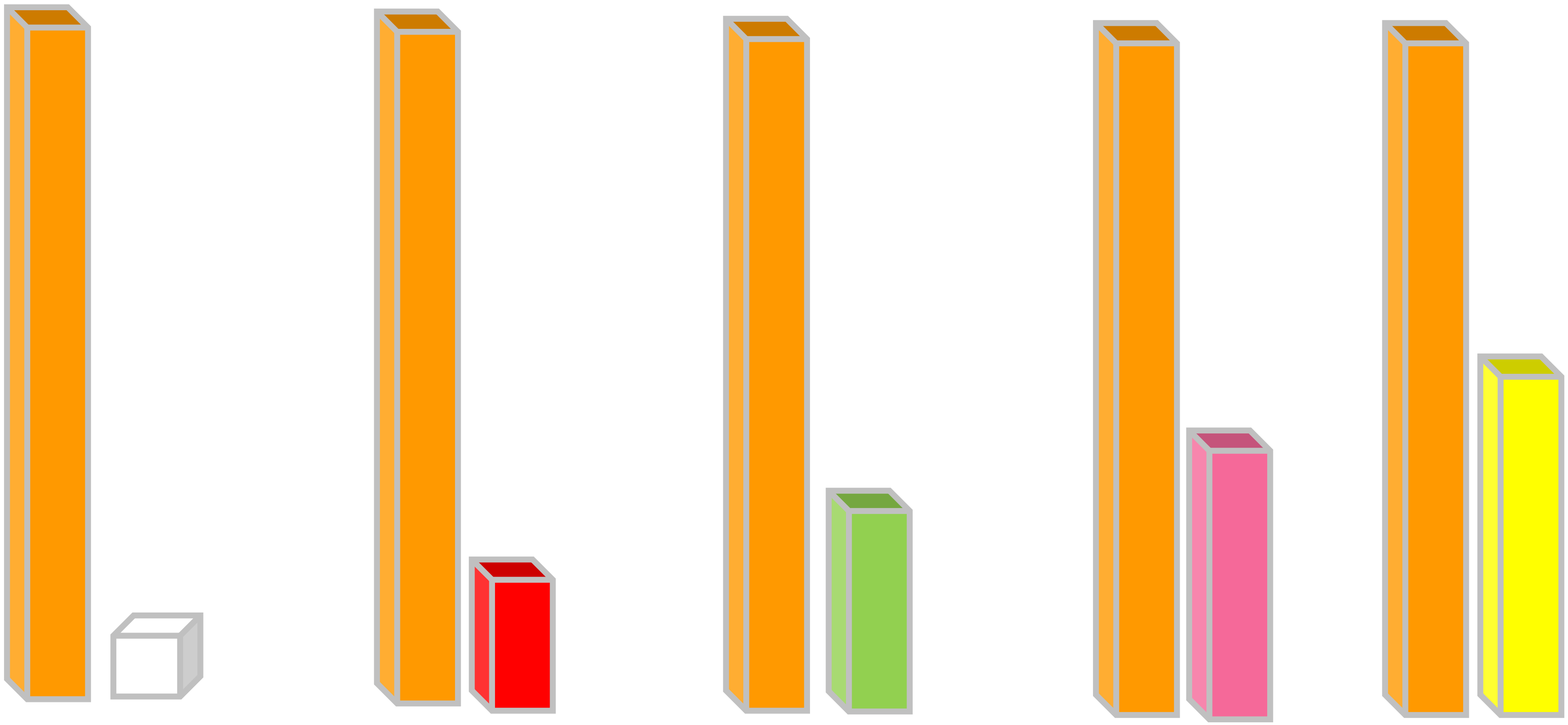
SECUENCIAS

A nivel perceptual, las regletas Cuisenaire ofrecen experiencias significativas para comprender el concepto de una secuencia en los números de dos órdenes. Sin embargo, es importante tener un protocolo en el lenguaje para comunicar las acciones que realicemos con las regletas. También nos apoyaremos para esta comprensión del diagrama de círculos o números conectados. Es importante partir de un lenguaje verbal sencillo de lo que los niños visualizan a un lenguaje formal. Por ejemplo: grupo de diez y tres unidades, luego una decena y tres unidades, trece.



SECUENCIAS

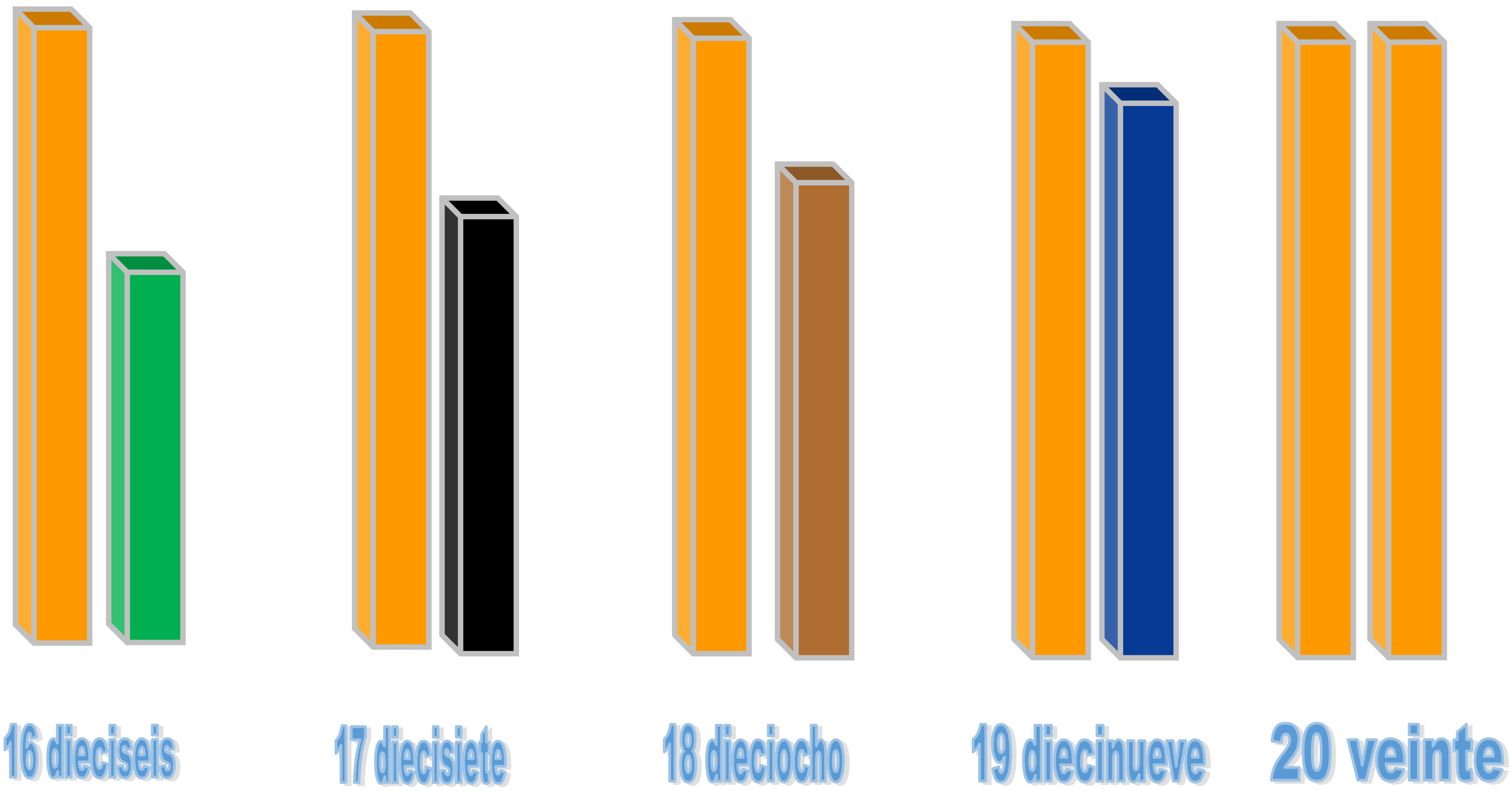
Agregándole números a una decena se forman números más grandes.



11 once   12 doce   13 trece   14 catorce   15 quince

SECUENCIAS

Agregándole números a una decena se forman números más grandes.

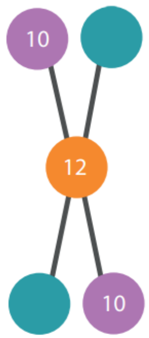


NÚMEROS DE DOS CIFRAS CONECTADOS

En la imagen se observa el diagrama de círculos, donde se descompone el número 12, como un 10 + 2 y 2 + 10 para que los niños reflexiones sobre la propiedad conmutativa de la adición y utilicen esta propiedad como parte de sus técnicas de cálculo. Se recomienda, entonces, realizar actividades donde los niños no solo descompongan un número , también reflexionen sobre esta propiedad. Para su aprendizaje pueden utilizar desde material concreto (regletas Cuisenaire), dibujos, así como, escribir y verbalizar la descomposición de un número de dos cifras, que son actividades que requieren mayor abstracción.

Descomponer números en centenas y decenas.

2 Empezamos con el 12



Entonces, 10 + 2 = 2 + 10.

SUMAR FORMANDO 10

En la actividad de la imagen, se presenta una adición: 8 + 5 = , para resolverlo se aplica una técnica llamada “sumar formando grupos de diez”, para guiar su desarrollo, se sigue un protocolo de preguntas: ¿Cuál de los dos números está más cerca de formar un diez?¿Cuánto le falta para formar diez?¿De dónde sacamos lo que le falta para formar diez?

Observamos que en la imagen, el número más cerca al diez es el ocho, le falta dos para formar diez y esos dos que le faltan lo obtendremos del cinco al descomponerlo. Esto nos permite operar de una manera eficiente.

2 Empezamos con el 8 + 5

8 + 5 ______________________ 10 + 3 = 13

2 + 3

SUMAR FORMANDO 10

En la primera actividad se presenta el reto: 8 + 5 =

Primer paso

8 + 5 =

Segundo paso

8 + 2 + 5 =

Tercer paso

10 + 5 = 15

En la segunda actividad se presenta el reto:10+ 7 + 5 =

Primer paso

10 + 7 + 5=

Segundo paso

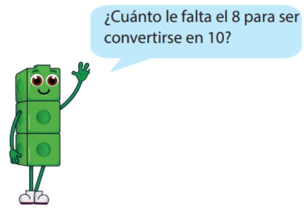
10 + 10 + 2 =

Tercer paso

20 + 2 = 22

Cada reto es acompañado con un protocolo de verbalización, como se indicó en la actividad anterior. Se utiliza las regletas Cuisenaire como soporte si el niño lo requiere.

2 Empezamos con el 8 + 5



8 + 5 ______________________ 10 + 3 = 13

2 + 3

43

Descomponer números para formar diez.

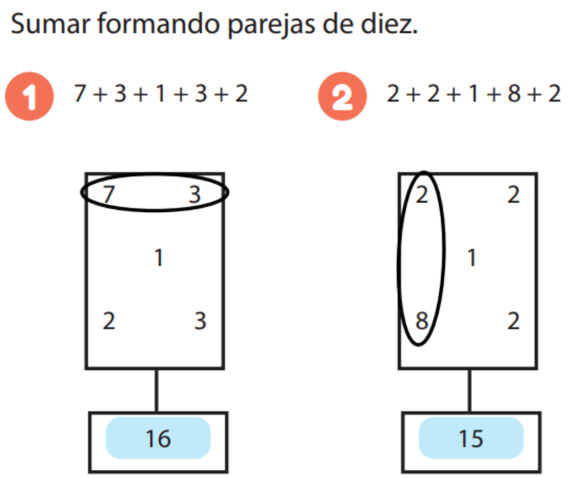
3 Empezamos con el 10 + 7 + 5

10 + 7 + 5 ______________________ 10 + 10 + 2 = 22

3 + 2

SUMAR EN CAJAS

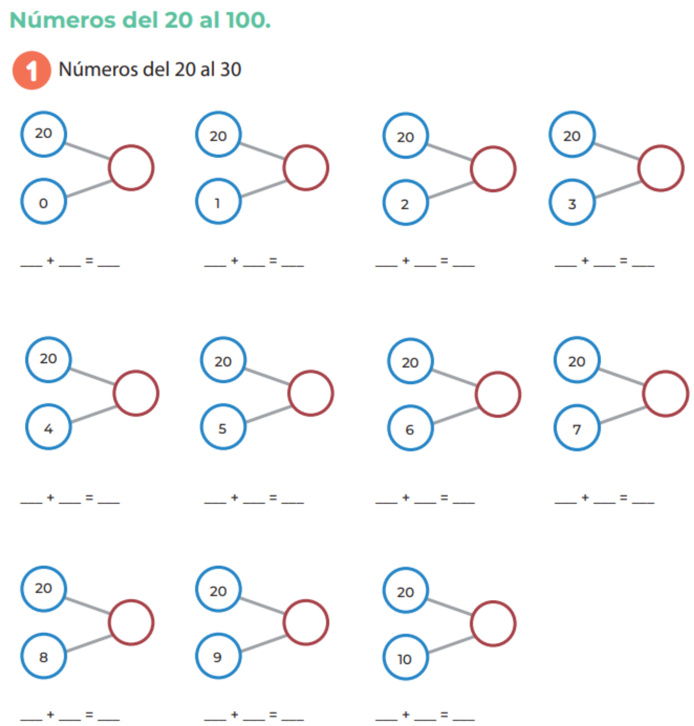
Utilizar la técnica de sumar formando grupos de diez, requiere dedicarle algún tiempo, hasta su consolidación. Por ello, es importante aplicar el principio de variabilidad matemática, propuesto por Zoltan Dienes. Se presenta a los niños distintas formas y retos donde ellos tiene que operar utilizando la técnica de agrupar de a diez como en la imagen donde se realiza una suma en cajas. En el reto los niños tiene que asociar con qué números pueden formar diez, encerrarlos en círculos. Luego lo pueden resolver como cálculo mental.



Algoritmos OAOA.

NÚMEROS DE 20 HASTA 100

El esquema de números conectados, nos permite explorar desde los números de un dígito hasta los números más grandes. Observamos en la imagen el modelo parte-parte-todo, donde en una de las partes aparece un grupo de 20 o 2 decenas y en la otra parte las unidades para ir formando una secuencia que irá desde el 20 hasta el 30. El mismo proceso se realiza con el 30 hasta 40; y luego hasta llegar a 100. Las regletas Cuisenaire, permiten explorar a partir de as decenas y unidades que representan esta actividad como experiencia sensorial.



ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN

La composición y descomposición de números hasta 10, es fundamental para construir los demás órdenes y comprender el sistema numérico decimal o de base diez. Por ello, podemos apalancar este conocimiento con los número de más cifras, en particular los que terminan en cero: “generalización de la descomposición de los números que terminan en cero”.

5 + 4 = 9, pero también 50 + 40 = 90 y 500 + 400 = 900 de la misma forma que 5000 + 4000 = 9000.

Observamos también que se utiliza la propiedad conmutativa en este proceso.

Relacionar y generalizar con el cero en sumas.

1 Generalizar: 5 + 4 =

5 + 4	______	50 + 40	______	500 + 400
4 + 5	______	40 + 50	______	400 + 500

Algoritmos OAOA.

SUMAS HORIZONTALES SIN REAGRUPAR

En la imagen se observa el reto 12 + 4 = , para resolver se realiza la descomposición de cada parte, lo que se busca aquí es que los niños demuestren su conocimiento sobre la estructura de cada número en el sistema de base diez. Es decir que expresen los números como grupos de diez o unidades.

Por principio de variabilidad matemática, invitamos a nuestros niños a resolver el mismo reto utilizando diversas técnicas o algoritmos.

Sumas horizontales sin reagrupación.

1 Sumamos 10 + 4

+ 12	=	10	+	2
4	=		+	4
		10	+ 6 =	16

SUMAS HORIZONTALES REAGRUPANDO

En el primer reto 18 + 2 = , se observa como se agrupan las unidades para formar una decena, obteniendo un total de dos decenas o 20.

En el segundo reto 18 + 7 = , al descomponer cada número en decenas y unidades, se agrupa las unidades (8 + 7), como una nueva decena con cinco unidades (10 + 5).

Cada niños explica el proceso que realizó hasta llegar a la respuesta. Les podemos pedir que expliquen ese proceso con dibujos o con sus regletas Cuisenaire para consolidar sus habilidades de comunicación en las matemáticas.

Es importante que el niño conserve en su protocolo de comunicación las palabras parte-todo para explicar el proceso de resolución.

Sumas horizontales reagrupando.

1 Sumamos 18 + 2

$$\begin{array}{rcccc} +18 & = & 10 & + & 8 \\ 2 & = & & + & 2 \\ \hline & & \boxed{10} & + & \boxed{10} = \boxed{20} \end{array}$$

Sumas horizontales reagrupando.

1 Sumamos 18 + 7

$$\begin{array}{rcccc} +18 & = & 10 & + & 8 \\ 7 & = & & + & 7 \\ \hline & & \boxed{10} & + & \boxed{10 + 5} = \boxed{25} \end{array}$$

SUMAS HORIZONTALES REAGRUPANDO

Las sumas horizontales reagrupando son formas de estructurar la adición para comunicar de manera más eficiente el desarrollo del mismo.

Se pueden utilizar en sumas de varios sumandos como en números de varias cifras.

Sumas horizontales reagrupando.

1 Sumamos 18 + 7 + 3

+ 18	=	10	+	8
7	=		+	7
3	=		+	3

10 + 10 + 8 = 28

SUMAS VERTICALES SIN REAGRUPAR

Con esta técnica realizamos la suma de las unidades con unidades y luego le sumamos la decena. Se observa también que se aplica la propiedad conmutativa de la suma.

Si bien, cada regleta puede asumir un valor diferente, en referencia a la regleta que se considere unidad. De manera estándar, los niños explican el proceso realizado con el apoyo de material concreto.

Sumas verticales sin reagrupar.

1 Sumamos 10 + 6 + 2

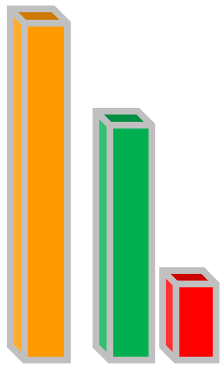
10 + 6 + 2

10 8

10 + 8

8 + 10

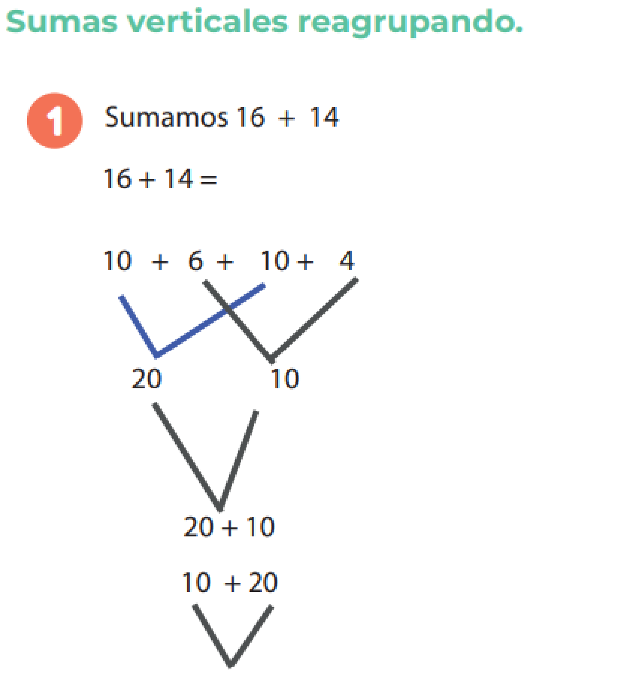
18

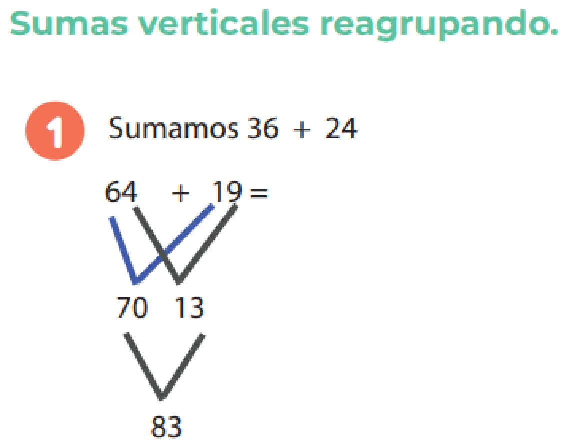


SUMAS VERTICALES REAGRUPANDO

En la actividad 1 se presenta el reto 16 + 14 =, se agrupan las decenas con decenas y unidades con unidades, obsérvese que se aplica la propiedad conmutativa en la resolución. Se realiza la descomposición completa de cada número antes de operar. Con motivos didácticos se utilizan líneas de diferente color para explicar los órdenes.

En la actividad 2 se presenta el reto 64 + 19 = , donde para operar, no se realiza la descomposición de los números, sino se opera directamente considerando el valor que tiene cada cifra, de acuerdo, a la posición que tiene. Tampoco se aplica la propiedad conmutativa. Es más una técnica de cálculo que de consolidación.





SUMAS LATERALES

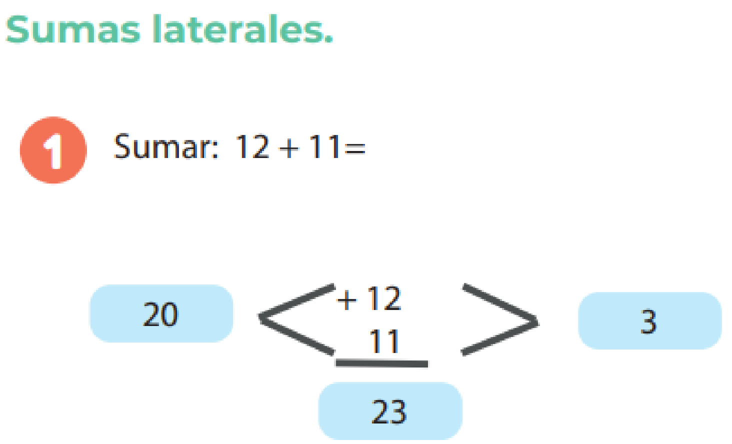
En la imagen se observa el reto 12 + 11 = , y se ejecuta mediante la técnica de sumas laterales. Esta técnica busca que los estudiantes comuniquen sus saberes acerca de el valor que tiene cada cifra dentro de un sistema de base diez.

Los niños explican que valor tiene el “1”, por qué a veces puede valer una unidad y otras veces una decena o centena.

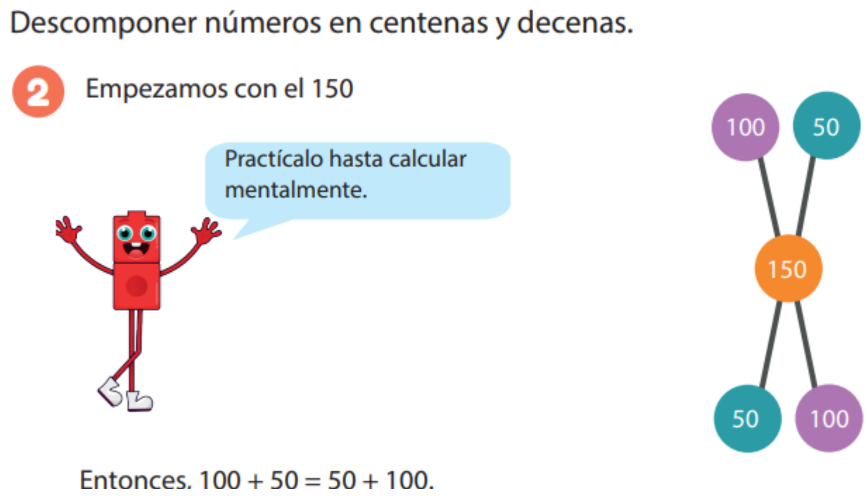
DESCOMPONER EN CENTENAS Y DECENAS

Con el esquema de los números conectados, se representa la descomposición de 150 como 100 + 50 o 50 + 100. También pueden descomponer los números de otras manera utilizando el mismo esquema: 120 + 30, 110 + 40, 141 + 9.

Sin embargo, debemos hacer énfasis en la agrupación considerando los órdenes, ya que es una herramienta útil para poder operar.

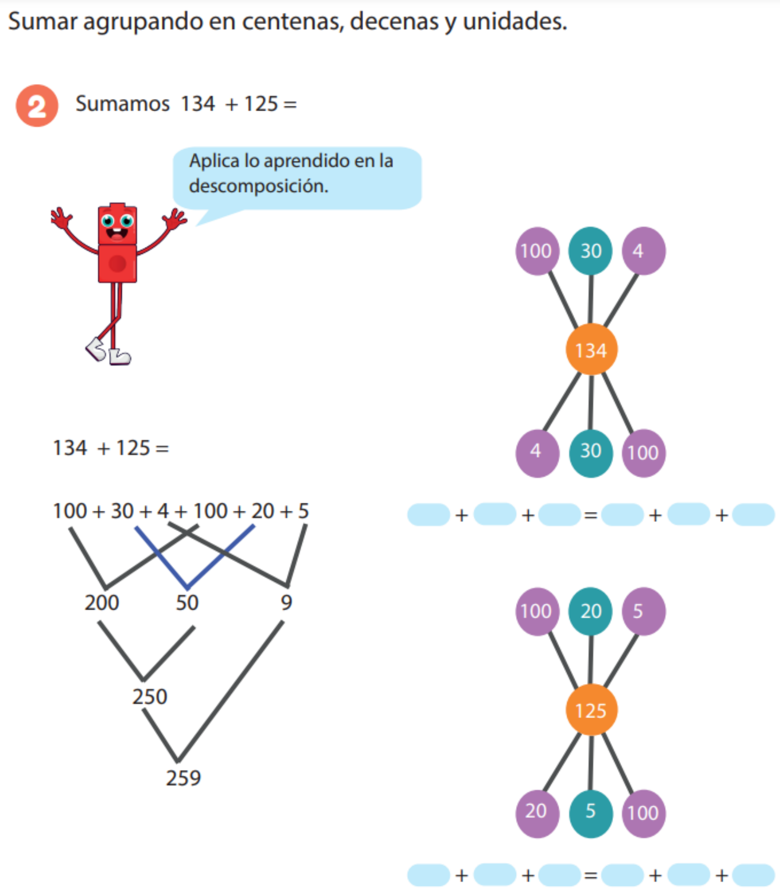


Algoritmos OAOA.



SUMAS VERTICALES SIN REAGRUPAR

En la imagen observamos una adición donde se descompone el número en centenas, decenas y unidades. En la imagen se observa también el esquema de números conectados como actividad previa.



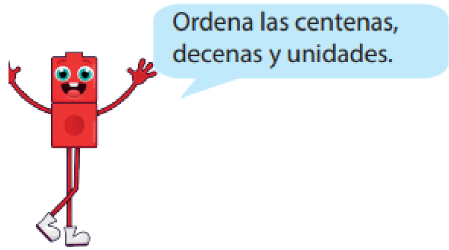
SUMAS HORIZONTALES SIN REAGRUPAR

En la imagen se desarrolla el reto 356 + 231, donde se descompone cada parte para hallar el todo.

Si bien las regletas Cuisenaire, principalmente nos permiten explorar los números hasta las decenas y los números que resulten de sus agrupaciones. También podemos combinar su uso con el material "Base diez" donde se representan además, las centenas, decenas o unidades de mil o con las fichas circulares numéricas como lo describe el profesor Juan Carlos Soto al inicio del capítulo.

2 Sumar: 356 + 231 =

+ 356	=	300	+	50	+	6	
231	=	200	+	30	+	1	
		500	+	80	+	7	= 587



COMPARAR Y ORDENAR NÚMEROS

En la actividad, vemos otra variante de sumar en vertical, descomponiendo cada número en decenas y unidades para luego ser operado. La descomposición en órdenes, se encierra en una caja para comunicar el proceso.

Sumas verticales sin reagrupar.

1 Sumar: 25 + 34 =

25 + 34 =

20	30
5	4

50
9

59

SUMAS EN SERIES

En esta actividad, los niños descomponen cada número en sus respectivos órdenes mentalmente, luego los colocan en una serie vertical.

Si bien, convencionalmente operamos desde las unidades, luego las decenas y centenas, en una adición sin reagrupación; en reto de la imagen, como en otros, no es necesario hacerlo así, ya que no altera el resultado. Algunos pueden comenzar operando por las decenas, luego las unidades y centenas. El objetivo es que los niños reconozcan el valor de cada cifra en la posición correspondiente.

Sumas verticales de series en cifras.

1 Sumar: 123 + 41 + 15 =

123 +
41
15

100
70
9

179

SUMAS CON REDONDEO

Es una técnica parecida a “sumar formando grupos de diez”, solo que utilizada para números mayores para poder redondearlos a su decena o centena más cercana. La cantidad total de unidades que se utilice para redondear, se restará esa misma cantidad, al resultado final. Obsérvese como se sumó: 3 + 1 + 2 y luego se restó 6 al total.

Intenta Sumar 9999+ 9999 utilizando esta técnica. Cuando los niños comprender el sistema numérico decimal, utilizan este conocimiento como herramienta en sus habilidades de cálculo.

Sumas horizontales con redondeo.

1 Sumar: 177 + 19 + 38 =

177 + 19 + 38 =

+ 3 + 1 + 2

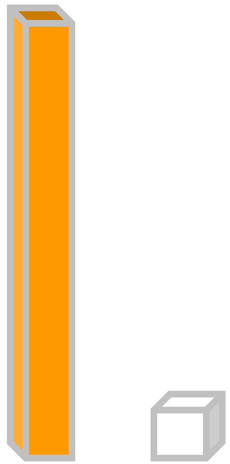
200 + 20 + 40 =

260 - 6 = 254

Algoritmos OAOA.

COMENCEMOS DEL DIEZ Y UNO

Se ha realizado una recopilación de técnicas para operar números de uno, dos, tres y cuatro cifras. Principalmente la adición y sustracción. Realizar las operaciones con éxito, es decir, comprendiendo y explicando el proceso, requiere que los niños hallan construido una buena base de los números del 0 hasta 10. Para ir construyendo los demás números en la estructura del sistema numérico decimal. Por ello, en las siguientes actividades, aprenderemos el paso a paso sobre como empezar con los números de dos cifras. En la imagen observamos dos regletas representando un diez y uno, que también son una decena y una unidad u once. Las regletas Cuisenaire permiten representar este número de muchas formas.



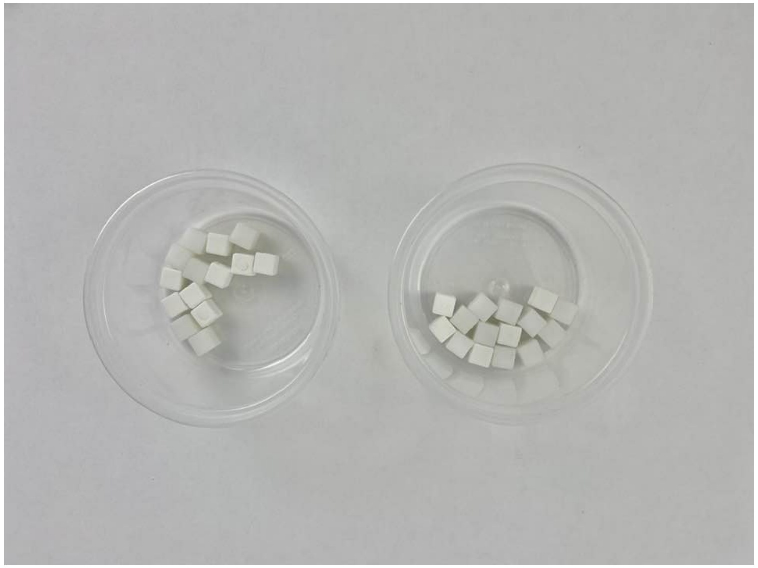
COMPARAR Y ORDENAR NÚMEROS

Utiliza metaplanos para comparar cuando un número es mayor, menor o igual que otro. Los niños pueden realizar comparaciones representando en sus metaplanos, por ejemplo, los números 16 y 14. Obsérvese en la imagen que en cada metaplano se representa un número. Para comparar, realizar los siguientes procedimientos:

- Representar en el metaplano los números

- Empezar comparando si en cada grupo hay decenas, si las hay, cuántas hay, si son iguales o hay más decenas en un grupo.

- Si son iguales las decenas, seguimos comparando las unidades.



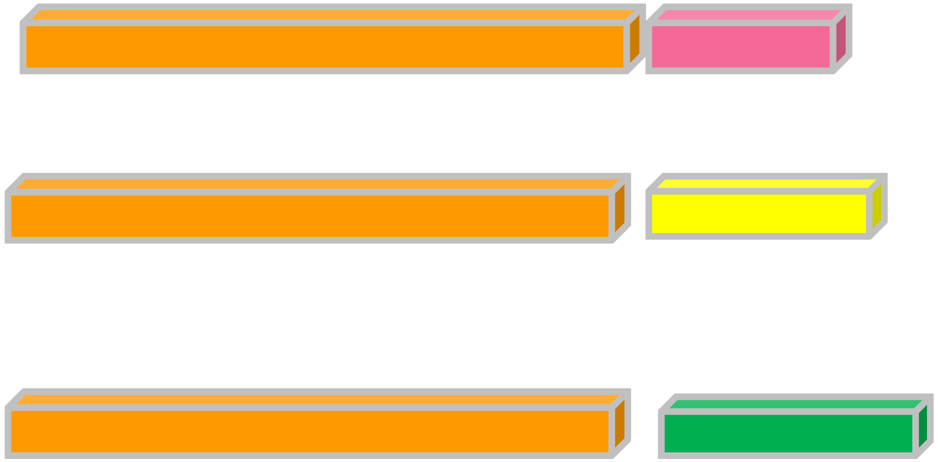
SECUENCIAS NUMÉRICAS

Al igual que la construcción del número, donde los números se construyen agregando una unidad más, podemos también encontrar secuencias en los números de dos cifras. Observar cómo el 15 se convierte en 16, si le agregamos una unidad más, pero también como se convierte en 14, si le quitamos una unidad. Entonces, hay una secuencia entre el 14, 15, y 16. También podemos agregar 2 o quitar 2 unidades para formar otras secuencias.

¿Cuánto es 1 más que 15? 1 más que 15 es 16

¿Cuánto es 1 menos que 15? Uno menos que 15 es 14

¿Cuánto es 2 más que...?¿Cuánto es 2 menos que...?



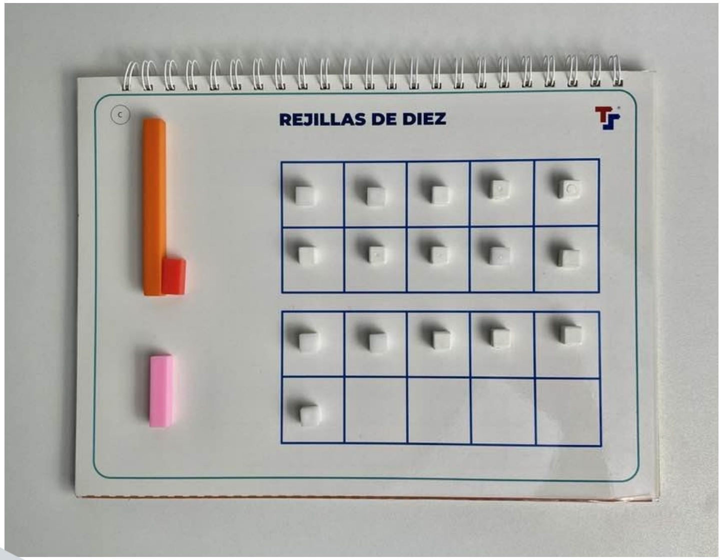
SUMAR CONTANDO HACIA ADELANTE

Con lo aprendido acerca de los números de dos cifras, la comparación y secuencia, vamos a realizar nuestras primeras sumas.

En la imagen se observa dos grupos de regletas de colores, el primer grupo se representa el 12, luego el 4. Vamos a sumarlos. La técnica a realizar se llama *“Sumar contando hacia adelante”,* porque será lo que haremos.

Procedimientos:

Ordenamos el 12 como un grupo de 10 y 2, luego al 2 le agregamos 4 unidades. Al final nos queda un grupo de 10 y 6 unidades.



SUMA COMPLETANDO 10

Esta técnica se llama *“Suma completando 10”,* porque será el procedimiento que realizaremos. Para esta técnica podemos utilizar rejillas de 10 para visualizar el proceso. En la imagen vamos a sumar 7 +5 =, obsérvese que se ha representado cada número en una rejilla. Realizaremos los siguientes procedimientos:

Representamos cada número en una rejilla

Observamos cuál es el número mayor, a este lo vamos a convertir en 10

Para convertirlo en 10, debemos tomar regletas del número menor.

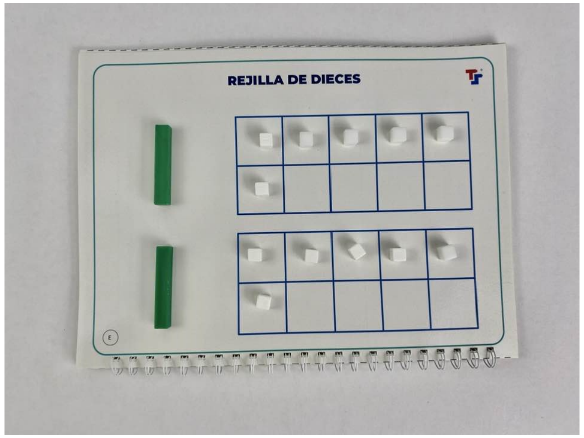
Finalmente, hemos formado un grupo de 10 y nos queda en la otra rejilla algunas unidades.

SUMA USANDO DOBLES

Esta técnica consiste en que cuando tengamos dos números para sumar podemos convertirlos en una suma de dos números iguales o dobles.
Suma de dobles con procedimiento: si tengo que sumar 4 + 8 =, observo que el 4 es diferente del 8; sin embargo, podemos tomar del 8, 2 unidades para darle al 4. Entonces al final obtenemos dos grupos de 6, es decir, 6 + 6 = 12.

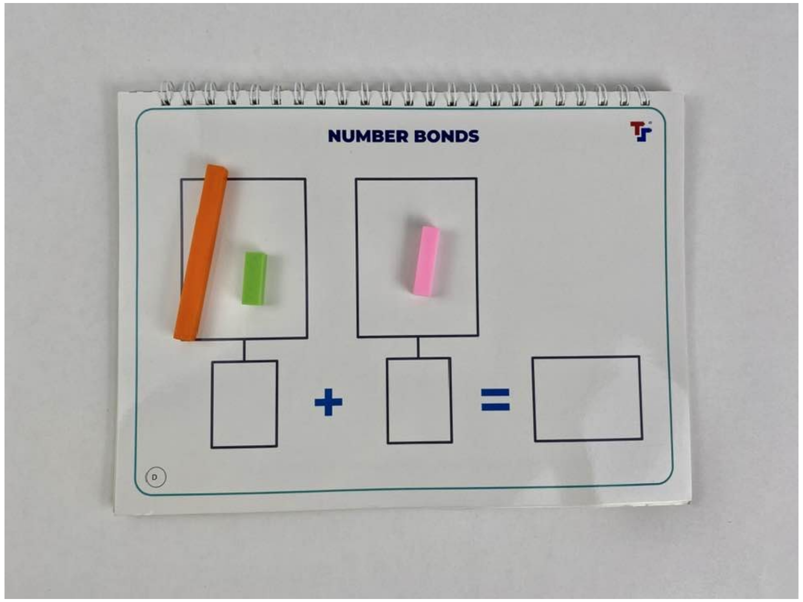
Las regletas nos ofrecen experiencias únicas, porque muchas veces podemos convertir una suma de dos números en suma de dobles.
Suma de dobles simple:

También suma de dobles en su sentido más amplio, es sumar dos números iguales, sin un proceso de igualarlos. En la imagen se observa sumas de dobles simple.



SUMA AGRUPANDO

Esta técnica consiste en realizar una suma, habiendo ya comprendido la noción de decenas y unidades. En la imagen podemos observar que se realiza la siguiente suma: 13 + 4 = , lo primero que se hace es agrupar correctamente el 13 en 1 decena y 3 unidades, luego le vamos a agregar 4 unidades. Podemos preguntar a nuestros niños *¿Se lo agregamos a las decenas o unidades?* Al final observamos que tenemos 1 decena y 7 unidades. Esta actividad se puede realizar también con el metaplano de dos tableros o esquema de números conectados.



RESTA CONTANDO HACIA ATRÁS

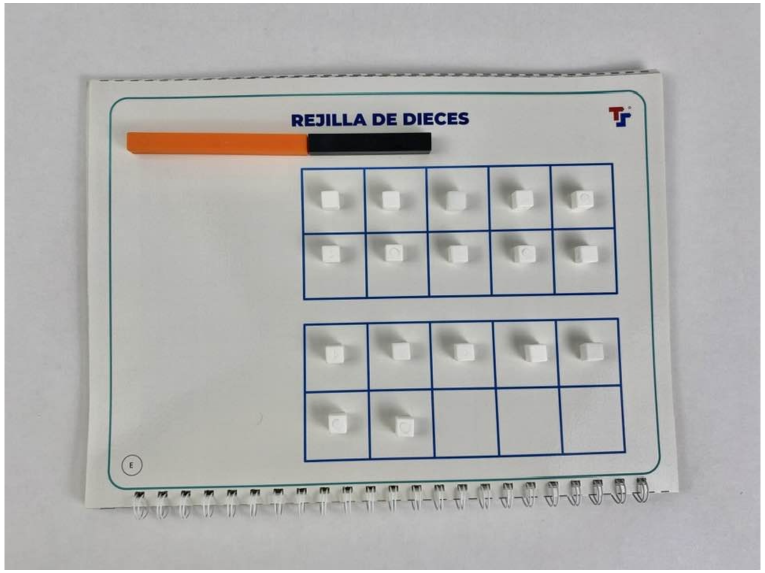
Vamos a considerar esta técnica para realizar sustracción a un número de dos cifras. Vamos a resolver el siguiente reto: 17—3 = ¿?.

En la imagen observamos un grupo de 17 regletas, el primer paso es ordenar ese grupo en decenas y unidades. Una vez realizado, procedemos a quitar 3 unidades. Lo vamos a hacer de uno en uno, así:

Tengo 17 policubos y uno menos, ahora tengo 16.

Tengo 16 policubos y uno menos, ahora tengo 15.

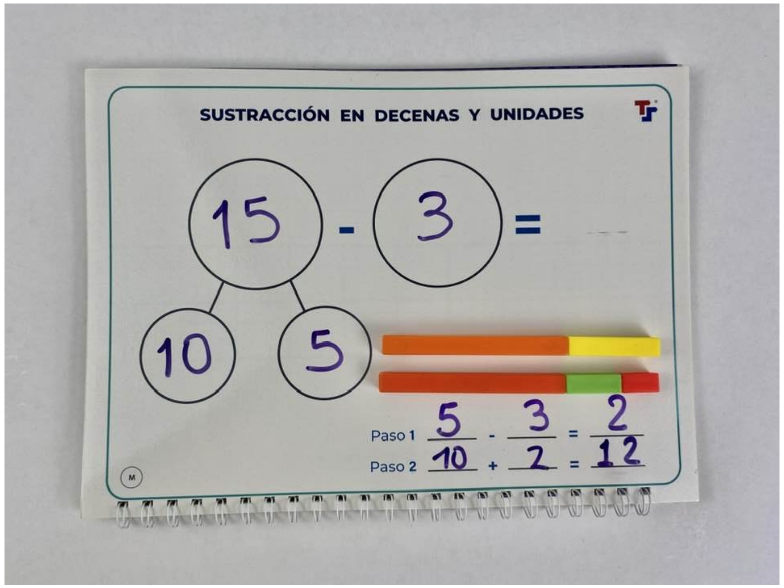
Tengo 15 policubos y uno menos, ahora tengo 14.



RESTA AGRUPANDO EN DECENAS Y UNIDADES

En esta técnica utilizaremos lo que hemos aprendido sobre las decenas y unidades para representarlo en nuestro esquema de números conectados. Vamos a resolver el siguiente reto 15—3 = ¿?.

El primer paso es ordenar un grupo de 15 unidades en decenas y unidades, tenemos 1 decena y 5 unidades. Luego vamos a quitar 3 unidades, lo haremos a las 5 unidades del 15. Este proceso lo vamos a realizar en nuestro esquema de números conectados. Aquí lo importante son las relaciones que se observan en las operaciones para hallar la respuesta.



RESTA FORMANDO UN GRUPO DE 10

La siguiente sustracción: 13—6 = ¿?, tiene un mayor grado de abstracción en su desarrollo, ya que si observamos el orden de las unidades del 13, tiene el número 3, al cual le debemos quitar 6 unidades, por lo que debemos realizar una reagrupación. Este reto lo podemos resolver sin dificultad, utilizando la técnica *“Resta formando un grupo de diez”,* consiste en descomponer el grupo de 13 en una decena y 3 unidades, luego vamos a quitarle las 6 unidades. Elegimos quitarle las 6 unidades al grupo de diez. En la primera imagen observamos los procedimientos.

RESTA FORMANDO UN GRUPO DE 10

En la técnica “Resta formando un grupo de 10”, trabajamos con las regletas como material discontinuo o como material continuo. En la imagen observamos a las regletas como material continuo, es decir, como torres.

Nos podemos ayudar de metaplanos para representar simbólicamente las relaciones matemáticas que ocurren cuando utilizamos las regletas.

Contar historias, crear retos nos ayuda a darle un contexto a las operaciones matemáticas.

ADICIÓN SIN REAGRUPACIÓN

Luego de explorar las diversas técnicas para realizar adiciones, reflexionamos que en realidad cada técnica supone una forma de pensar dentro de un mismo proceso. Esta forma de pensar progresa porque la técnica que utilizaré será más sofisticada. Ahora exploraremos la adición considerando el número de decenas y unidades del número que representamos. Para ello, podemos utilizar nuestro metaplano de dos tableros o el esquema de números conectados. En la imagen A, observamos la representación con material concreto de 13 como una decena y tres unidades y 16 como una decena y seis unidades.

ADICIÓN SIN REAGRUPACIÓN

En la imagen B, observamos una adición 14 + 3 = , tanto la forma como están estructuradas las regletas, los tableros de unidades y decenas refuerzan la estructura del sistema numérico decimal. Para diferenciar los números se suele colocar en los metaplanos una línea que diferencia la representación del 14 y del 3. Esto también es útil, luego para poder diferenciar las partes del todo en el esquema de los números conectados. Se observa que los retos propuestos son para sumas sin reagrupación. Primero presentamos situaciones de sumas sin reagrupar para luego presentar las sumas con reagrupación. La reagrupación consiste formar un grupo de diez o decena en el orden de las unidades para llevarlo al orden de las decenas.

SUSTRACCIÓN SIN REAGRUPACIÓN

En los problemas de sustracción se presenta una situación retadora para utilizar las técnicas aprendidas de sustracción. En la imagen podemos visualizar una sola torre de regletas, pero donde se diferencia la decena de las unidades. Vamos a resolver un reto: Juan compra 15 cajas de cartón, luego decide regalar 5 cajas ¿Con cuántas cajas se queda? Entonces podemos representar la sustracción 15—5 = , con una torre de regletas y en los números conectados. Es una sustracción sin reagrupación.

SUSTRACCIÓN SIN REAGRUPACIÓN

Hay un principio en didáctica de las matemáticas propuesta por Zoltan Dienes que es la variabilidad matemática. Se aplica la variabilidad matemática cuando presentamos una misma situación con diferentes materiales o estructuras. Por ejemplo en la imagen utilizamos el metaplano y las regletas como torres para representar una sustracción.

En la sustracción sin reagrupación de la imagen B: 15 - 5 = observamos que solo se representa con material concreto el 15, esto es porque el 5 que vamos a quitar se encuentra dentro del 15.

ADICIÓN CON REAGRUPACIÓN

En el siguiente reto 25 + 6 = , los pasos a seguir son:

Representamos el 25 en el tablero de materiales en decenas y unidades: 2 decenas y 5 unidades.

Representamos el 6 en el orden de las unidades. Observamos las unidades que tenemos que sumar 5 y 6, en total 11 unidades. Agrupamos las 11 unidades como una decena y una unidad, la decena la llevamos al orden de las decenas como las otras decenas. Nos queda en el orden de las unidades: 1. En el orden de las decenas sumamos las que hay 2+1=3.

En total observamos que tenemos 3 decenas y 1 unidad.

SUSTRACCIÓN CON REAGRUPACIÓN

En el siguiente reto 24 - 6 = , los pasos a seguir son:

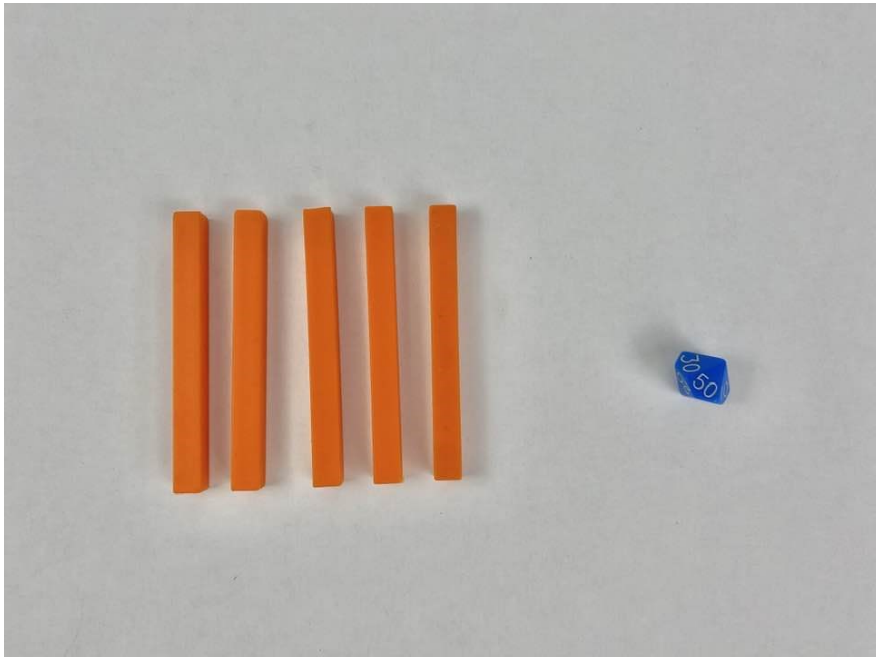
Representamos el 24 en el tablero de materiales en decenas y unidades: 2 decenas y 4 unidades.

Observamos en el orden de las unidades hay 4; y que debemos quitarle 6 unidades. Al no ser posible buscamos que haya más unidades. Como vimos es 24 tiene 2 decenas en el orden de las decenas, reagrupamos una decena y la llevamos al orden de las unidades como 10 unidades.

Entonces en el orden de unidades ahora tenemos 14 unidades. A las 14 unidades, le quitamos las 6 unidades y ahora nos quedan 8. En el tablero de las decenas solo una decena. En total nos queda 18.

NÚMEROS HASTA 40

Recordemos el juego "*Carrera al 10".* Podemos realizar ese mismo juego pero con el objetivo de formar 4 grupos de diez o 4 decenas. La transición del 20 al 40 es muy sencilla porque ya sabemos el concepto de decena; sin embargo, es muy importante realizar actividades relacionadas a comparar números hasta 40. Realizar secuencias hasta 40 nos permite visualizar que a medida que conocemos números más grandes, estos se siguen agrupando de diez.



VALOR POSICIONAL

Podemos formalizar las comparaciones o representaciones de los números en nuestro metaplano.

Aprendamos un juego:

Tener un juego de cartas del 0 al 4.

Las cartas deben estar volteadas, elegimos una primera carta y esta representará las decenas, elegimos la segunda y esta representará las unidades.

Representamos las unidades y decenas en nuestro tablero tanto en el tablero de números como en el tablero de regletas.

ADICIÓN SIN REAGRUPACIÓN HASTA 40

Representamos la siguiente operación 14 + 12 =¿? en el metaplano.

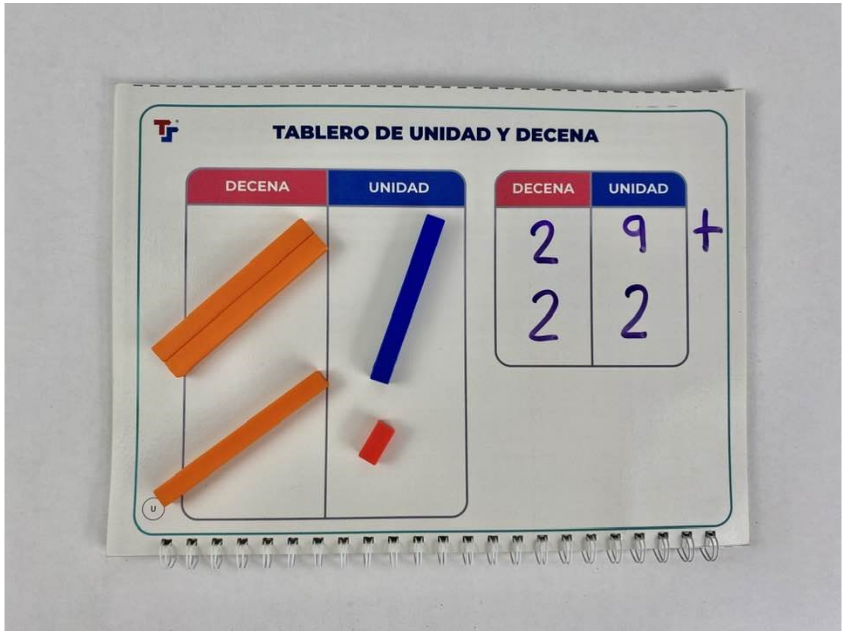
En las imagen A , se utilizan regletas para representar, de acuerdo al orden donde se encuentren.

Esta es una operación sin reagrupación, así que el aprendizaje está en reflexionar, luego de representado en el tablero ¿si a 4 le sumo 2 que obtengo?, si nuestro niño nos dice 6, repreguntamos ¿son 6 unidades o 6 decenas?. Esto es muy importante, ya que en esta etapa describimos cada proceso; igual en el siguiente orden 1+1 hacen 2 decenas.

ADICIÓN CON REAGRUPACIÓN HASTA 40

Para diferenciar los dos números que sumaremos, podemos realizar una línea punteada en el metaplano. También podemos reflexionar sobre las partes y el todo, es decir utilizar el diagrama de números conectados para reflexionar sobre la operación que realizamos.

Podemos sumar también tres o más números. Además en el tablero de materiales podemos representar mediante dibujos o gráficos las decenas y unidades, esto refuerza nuestro aprendizaje hacia la formalización de las matemáticas.



SUSTRACCIÓN CON REAGRUPACIÓN HASTA 40

En la imagen observamos la siguiente operación 23-14 = ¿? Realizamos los siguientes procedimientos : Representamos en el tablero el 23 en unidades y decenas.

Observamos que en el orden de las unidades hay 3; y que le debemos quitar 4 unidades. Nos faltan unidades.

Tomamos una decena y la reagrupamos como 10 unidades, ahora lo llevamos al orden de las unidades.

En el orden de unidades tenemos ahora 13 unidades, le quitamos las 4 unidades y nos queda 9. En las decenas nos queda solo 1. En total 19.

SUSTRACCIÓN CON REAGRUPACIÓN HASTA 40

Observamos la siguiente operación 35-20 = ,también podemos utilizar el esquema de números conectados para resolver la operación.

Obsérvese que podemos agrupar el 35 como 3 decenas y 5 unidades, esto para poder restarle las 2 decenas de la operación a resolver.

Si bien el diagrama de círculos o números conectados nos ofrece formas estandarizadas para descomponer un número, a medida que vayamos conociendo más podemos descomponer los números de muchas formas para hallar una misma solución.

RESTAS FORMANDO GRUPOS DE DIEZ

Para resolver seguimos el siguiente protocolo de preguntas: ¿Al número 13 qué le vamos a restar? Entonces reagrupamos el 13 como 10 + 3 , esto es, porque no podemos quitarle al 3, 6 unidades. Pero sí, le podemos quitar 6 unidades a 10. Observa que el reto es resuelto en tres partes que son explicadas por el niño.

Restas reagrupando en decenas y unidades.

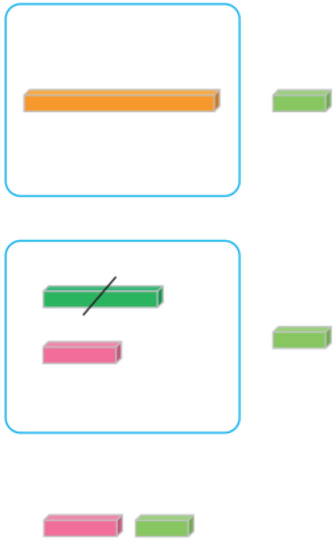
1 13 de 10 y 3.

13 - 6 = ?

10 3

2 No puedes restar
6 a 3.
Entonces, resta 6 a 10
10 - 6 = 4

3 Suma 4 y 3.
4 + 3 = 7
Entonces, 13 - 6 = 7.



RESTAS REAGRUPANDO PARA FORMAR DECENAS

En esta actividad, observamos el mismo reto, solo que será resuelto con otra técnica. Elegir entre una u otra, está en función del nivel de comprensión. Para utilizar esta técnica el niño debe haber consolidado la noción de decenas y unidades. Se observa, que el objetivo es formar 10 y se logra descomponiendo una de las partes.

Restas reagrupando para formar decenas.

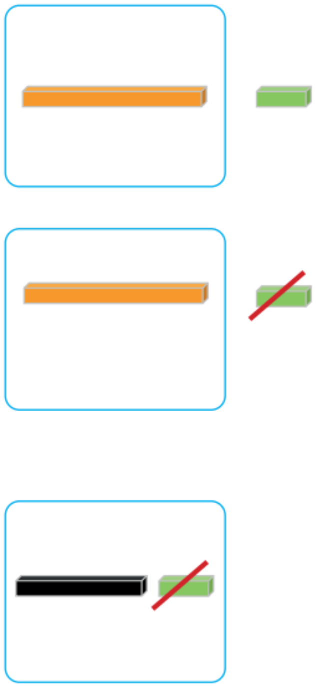
1 13 de 10 y 3.

13 - 6 = ?

3 3

2 Descomponemos el
6 para formar 10.
13 - 3 = 10

3 Entonces, 10 - 3 = 7.



RESTAS

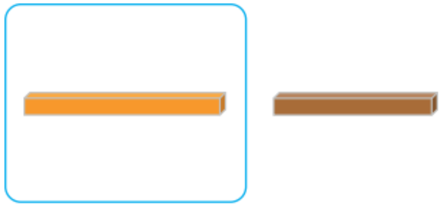
En la imagen, se muestra una sustracción donde no hace falta reagrupar las decenas, pero sí explicar como a las unidades se le restan unidades para obtener unidades. Observa las regletas y la forma como se utilizan para explicar el proceso.

Restas reagrupando en decenas y unidades.

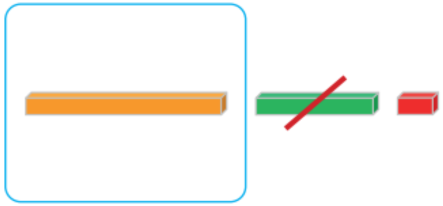
1. 18 de 10 y 8.

18 - 6 = ?

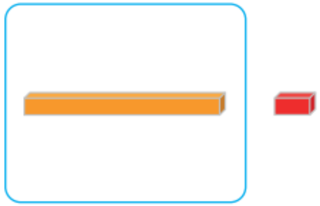
10 8



2. Restamos unidades con unidades.
8 - 6 = 2



3. Entonces, 10 + 2 = 12.



RESTAS HORIZONTALES

En el reto 98-56 =, se descompone cada número en decenas y unidades. Es importante que el niño comunique el proceso. Recordemos que sustracción como la adición son operaciones inversas, están relacionadas en su operacionalización.

Restas horizontales sin reagrupación.

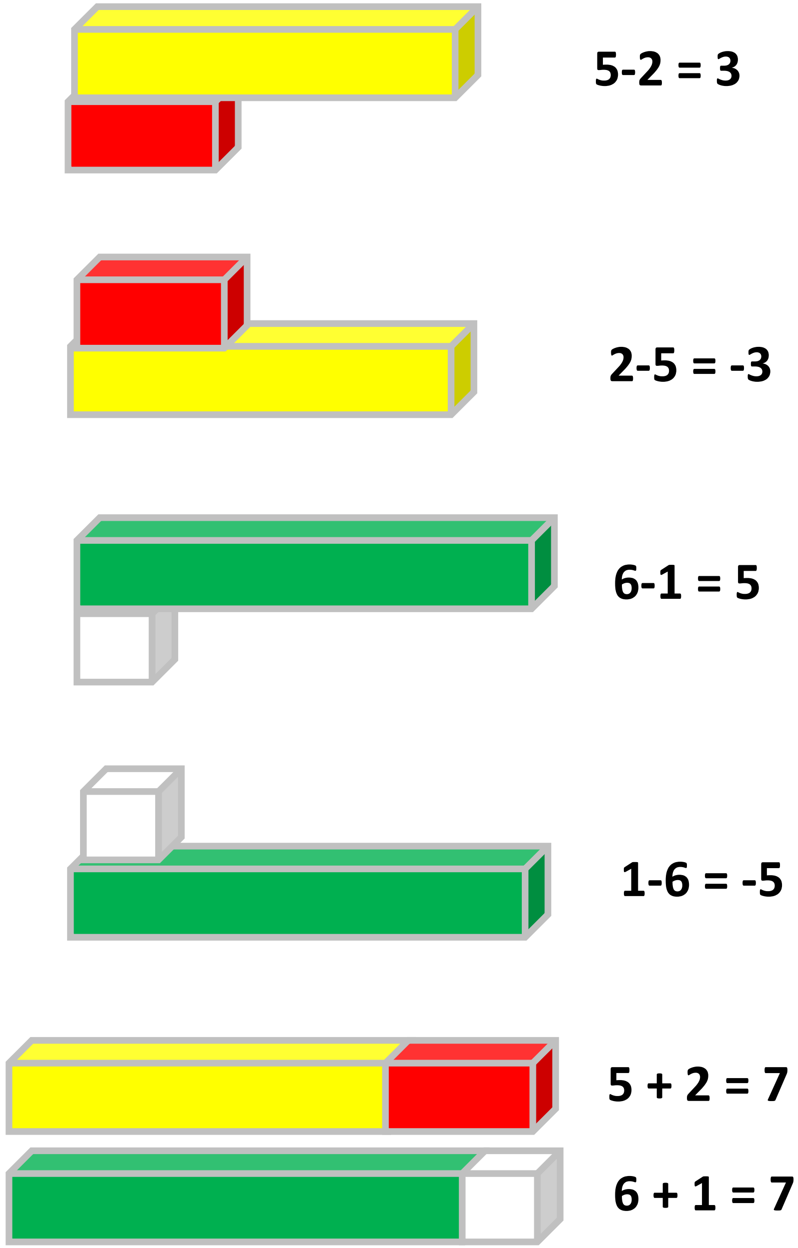
1. Empezamos con el 98 - 56

- 98	=	90	+	8
56	=	50	+	6

40 + 2 = 42

RESTAR CON NÚMEROS NEGATIVOS

Es muy importante el protocolo de verbalización como del uso de materiales para presentar un nuevo concepto. En la figura 1, se representa 5-2 = 3, el 5 representa el todo y 2 una parte que conocemos, donde se halla la parte que no conocemos (esquema parte-parte-todo). Observa que la regleta que representa el número mayor se coloca en un plano superior que la regleta menor, donde el resultado es un número positivo. Contextualizando podríamos decir tengo 5 caramelos, me comí 2 ¿Cuántos me quedan? En cambio en la figura 2, se presenta el reto 2-5= -3, donde la regleta menor se encuentra en un plano inferior respecto a la mayor, resultando un número negativo. La naturaleza de los números Enteros, requiere mayor profundidad que los Naturales, sin embargo, introducir este concepto es más habitual y cotidiano de lo que podríamos pensar, incluso su representación puede entenderse con claridad en un contexto: “Tengo solo 2 monedas de sol, fui a comprar a la tienda arroz que cuesta 5 monedas de sol. Mi vecina me dio el arroz, y quedé en pagar mañana lo restante”. En este contexto –3 representa un dinero que no tiene, pero debe. Observa en las otras imágenes un proceso similar con el 1-6 =; y la forma como se representa una suma con las regletas Cuisenaire.



RESTAR CON NÚMEROS NEGATIVOS

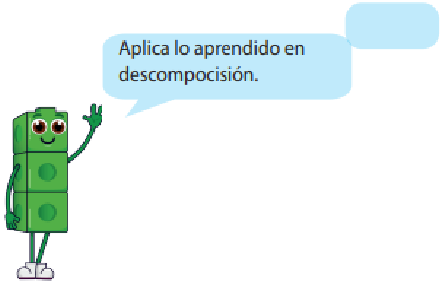
En la imagen se muestra una resta horizontal sin reagrupación, con la particularidad que los niños restan 5 de 6, dándonos como resultado –1. El uso de este recurso, se utiliza luego de la exploración y comprensión de los números enteros con las regletas Cuisenaire, a través de situaciones que sean cotidianas: un préstamo, una deuda, la temperatura, entre otros.

Restas horizontales reagrupando con números negativos.

1 Empezamos con el 85 - 56 =

- 85	=	80	+	5
56	=	50	+	6

30 + -1 = 29



RESTAS HORIZONTALES HASTA 1000

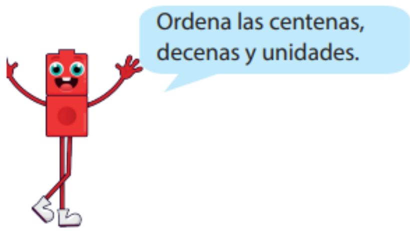
En la resta observamos una resta horizontal con números de tres cifras que se descomponen en sus respectivos órdenes. Esta técnica de restar se puede utilizar con números mayores, sin embargo, debemos recordar que su objetivo es comunicar la comprensión del sistema numérico y su operacionalización, más allá de ello no tiene un valor significativo en evidenciar algún aprendizaje, de acuerdo, con el objetivo planteado.

Restas horizontales hasta 1000.

1 Empezamos con el 546 - 132

- 546	=	500	+	40	+	6
132	=	100	+	30	+	2

400 + 10 + 4 = 414

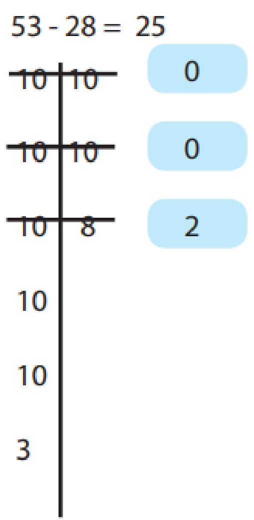


RESTAS EN DOS COLUMNAS

En el reto 53-28 = , se realiza la descomposición de cada número en decenas y unidades. Se divide por una línea vertical formando dos columnas. Obsérvese que se traza una línea horizontal para restar según corresponda, colocándose en el lado derecho el resultado. La suma de lo que haya quedado será el resultado final.

Restas en dos columnas.

1 Restar 53 - 28



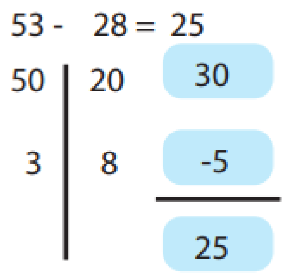
Algoritmos OAOA.

RESTAS EN DOS COLUMNAS CON NEGATIVOS

El reto a continuación, es el mismo que el anterior, lo que ha cambiado es que esta vez se descompone con un criterio de descomposición más eficaz, obsérvese que se realiza también una resta con negativos que facilita encontrar el resultado.

Restas en dos columnas con negativos.

1 Restar 53 - 28



RESTAS FORMANDO EL SUSTRAENDO

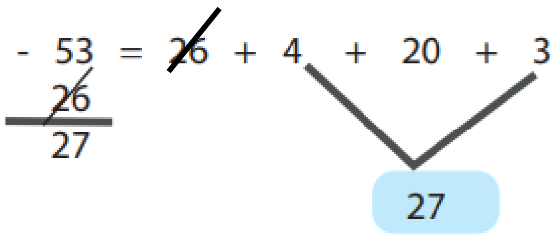
En el siguiente reto 53-26 = , se observa que el minuendo (53), se descompone estratégicamente en **26** + 4 + 20 + 3, uno de los números que forma parte de su descomposición es el **26,** que coincide con el sustraendo del reto. Esto es para poder restarlo y hallar la respuesta, que es lo que ha quedado. Para que los niños comprendan este procedimiento, es importante que manejen el protocolo del parte-todo.

RESTAS CON REDONDEO

Observamos la siguiente operación 65-47 = ,donde se descompone estratégicamente el minuendo (65), en 50 + 15. La técnica consiste en acercar a las decenas uno de los números que conforman la descomposición o redondear, para que se aproxime al sustraendo (47) y la resta resulte sencilla. Al final lo que quede será el resultado de la resta.

Restas formando el sustraendo.

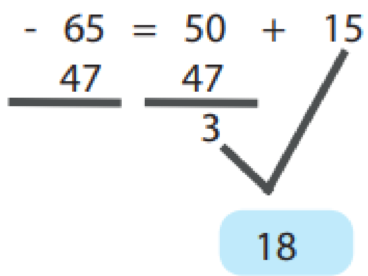
1 Empezamos con el 53 - 26



Algoritmos OAOA.

Restas con redondeo.

1 Empezamos con el 65 - 47



RESTAS LATERALES

En el siguiente reto 68-41 =, utilizamos la técnica de restar descomponiendo el minuendo y sustraendo por los lados laterales en decenas y unidades. Esta técnica es útil para operar números de dos dígitos principalmente. Su finalidad es que el niño explique el proceso que lo llevó a llegar al resultado.

Restas laterales.

1 Sumar: 68 - 41 =

20 < - 68 / 41 > 7

27

RESTAS REDONDEANDO

En el siguiente reto 134-87 = se busca hallar la diferencia de un modo más fácil de operar que es redondeando el minuendo (134) hasta convertirlo en 137, para ello se le agrega 3 unidades; para mantener la misma diferencia al operar, se le agrega la misma cantidad al sustraendo (87), de tal manera que se puede operar con cálculo mental.

Entonces, si agregamos estratégicamente la misma cantidad al minuendo y sustraendo se mantiene la misma diferencia, siendo un recurso muy útil.

Restas redondeando.

1 Empezamos con el 134 - 87 =

- 134 ——— +3 = 137
87 ——— +3 = 90

47

RESTAS VERTICALES EN SECUENCIA

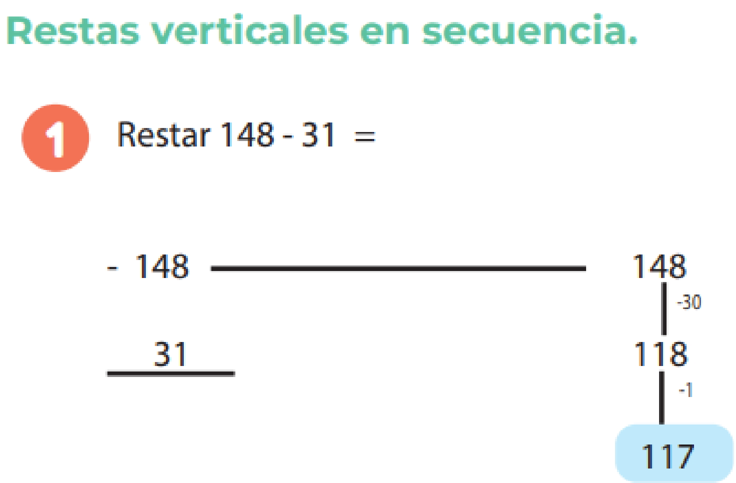
En el siguiente reto 148-31, al minuendo (148), se le quita el sustraendo (31) con la particularidad que se descompone solo el sustraendo de forma estratégica. Primero se quita 30 y luego se quita 1 unidad.

Para desarrollar esta habilidad de cálculo, es importante explorar con las regletas Cuisenaire las restas hacia atrás. Es decir, que los niños comiencen representando con sus regletas una cantidad, por ejemplo el 60, luego van quitando de diez en diez hasta llegar a 0. Luego ese mismo procedimiento lo escriben como en la imagen.

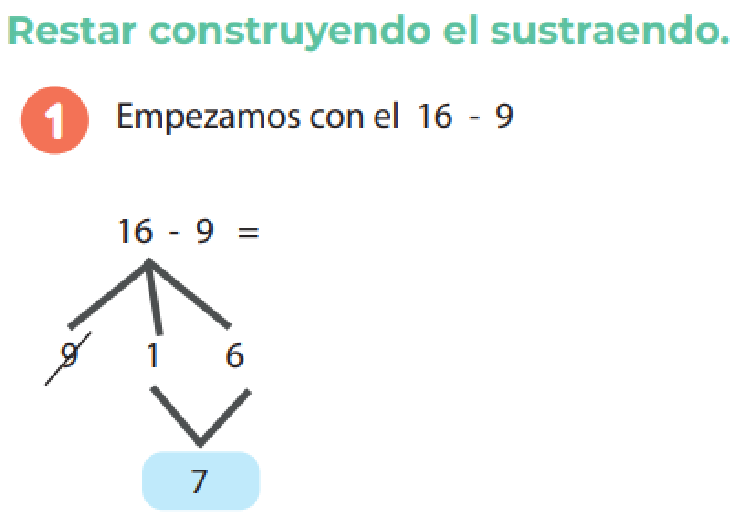
RESTAS FORMANDO EL SUSTRAENDO

Esta técnica, es una variante de la técnica mostrada anteriormente, esta vez, la descomposición se realiza hacia abajo, construyendo la misma cantidad que el sustraendo para facilitar el proceso. Lo que haya quedado, será la respuesta.

Utilizando el esquema parte-todo, se comunica el proceso de la siguiente manera: vamos a formar en el todo, la parte que conocemos para luego quitarla y hallar la parte que no conocemos.



Algoritmos OAOA.



CONTAR NÚMEROS HASTA 100

En las actividades anteriores hemos trabajado con las regletas como material discontinuo y continuo, en todos esos casos se ha utilizado como material concreto. En la imagen utilizamos las regletas para representar los números de tres cifras.

EXPLORANDO LOS NÚMEROS HASTA 100

En la siguiente actividad se representa en un metaplano con tres círculos, cada ciclo representa un diferente orden: unidad, decena y centena. En esta actividad las regletas son del mismo color, lo relevante aquí es el valor que adquiere cada regleta en función del grupo u orden en el que se encuentra. En la figura B, se representa el número 321 tanto la representación de la figura A y B son recomendables de utilizar por el principio de variabilidad matemática. Para una transición eficiente entre la transición de las regletas de material concreto a manipulativo, se debe haber trabajado las unidades y decenas con las regletas como

ADICIÓN DE TRES ÓRDENES

En la siguiente actividad utilizamos las regletas como material manipulativo, dentro del proceso abstracto del CPA, para representar la adición de dos números 153 + 131 = ¿? Los procedimientos a seguir son los siguientes:

Se representan los números en el tablero simbólico.

Se representan los números utilizando el código de colores.

Se suman las regletas que pertenecen al mismo orden. Es una adición sin reagrupación.

SUSTRACCIÓN DE TRES ÓRDENES

En la siguiente actividad utilizamos las regletas como material manipulativo, dentro del proceso abstracto del CPA, para representar la sustracción de dos números 164 - 52 =¿? Los procedimientos a seguir son los siguientes:

Se representan el 164 en el tablero simbólico.

Se representan el 164 utilizando el código de colores.

Se resta 52, en las regletas se quitan los colores que pertenecen al mismo orden. Es una sustracción sin reagrupación. Se recomienda utilizar también el diagrama de números conectados para resolver este reto.

CONTAR NÚMEROS HASTA 1000

Hacemos uso de un código de las fichas circulares Soto y de las regletas Cuisenaire para representar los números de tres cifras.

JUEGOS DE DECENAS

Aquí, podemos observar una variante del juego que encontramos en la página 30. Es un juego en pareja donde lanzaremos un dado y la cantidad de puntos del dado indica la cantidad que decenas que debemos representar en el tablero con las regletas. Podemos también modificar el tablero a unidades de centena o de mil y representarlo con regletas.

TABLERO DE DECENAS

10	20	60	20	10
50	10	40	20	40
20	50		30	10
50	10	10	20	50
10	60	10	30	10

CONTAR NÚMEROS HASTA 1000

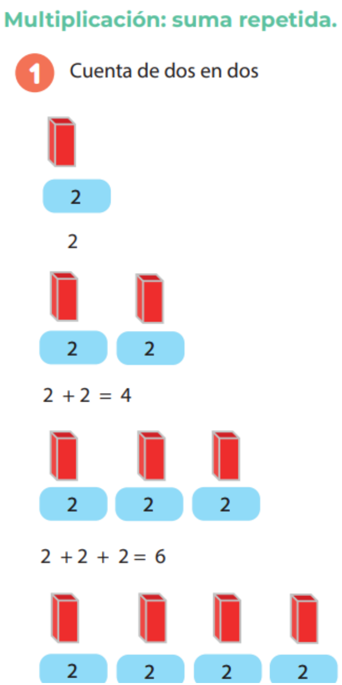
En la imagen A se representa una adición en el tablero de números 2456 + 1232 =, para su representación utilizaremos el código de colores nos permite enfatizar el valor que tiene cada regleta en el orden que corresponde. Es una adición con reagrupación, en el orden de las unidades observamos que se encuentran 6 unidades + 2 unidades, continuamos agrupando las decenas obteniendo 8 decenas, luego en las centenas obtenemos 6 y 3 unidades de mil.

EXPLORANDO LOS NÚMEROS HASTA 1000

En la imagen B observamos una sustracción 1314 –203= En el tablero de materiales solo debemos representar el número mayor. En el tablero de los símbolos se representan los dos números. Es una sustracción con reagrupación, el uso de las fichas numéricas permite la explicación de la operacionalización, es decir, es un material que acompaña al niño en el proceso de consolidación del aprendizaje.

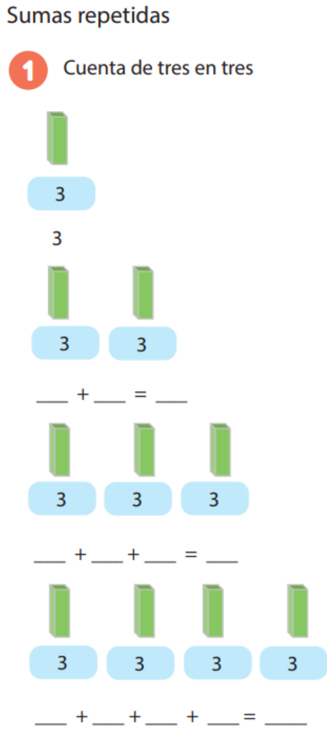
LA MULTIPLICACIÓN

La suma repetida del mismo número, asociar el número de veces que se cuenta ese número, el total de esa suma repetida, son nociones y relaciones que nos permiten comprender la multiplicación. Si se ha explorado con las regletas Cuisenaire, las nociones de cardinalidad, secuencia, composición y descomposición, será muy útil para explicar este concepto. En la imagen se observa una serie de sumas repetidas de 2.



LA MULTIPLICACIÓN

En la imagen observamos una secuencia de suma repetida del cardinal 3, representada por la regleta verde clara. Al principio los niños describen, en lo simbólico, como una adición repetida del 3. Luego asocian las veces que se suma el 3 y el resultado total de la suma. En la didáctica, sugerimos utilizar tres palabras para explicar estas relaciones: el número de grupos, el número de elementos por grupo y el total. Estos términos se desarrollarán en las siguientes páginas.

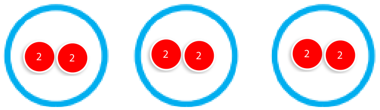


LA MULTIPLICACIÓN

En la imagen observamos las regletas rojas o fichas circulares rojas que representan el cardinal 2. Los círculos enfatizan la noción de grupos. Entonces podemos decir que hay tres grupos y que en cada grupo hay dos elementos y que hacen un total de 6. Observamos un protocolo de comunicación: “ 3 grupos de 2 es igual a 6”, “3 veces 2 es igual a 6”, “3x2=6”. En la siguiente imagen se verbaliza: “ 4 grupos de 2 es igual a 8”, “4 veces 2 es igual a 8”, “4x2=8”.

Sumas repetidas

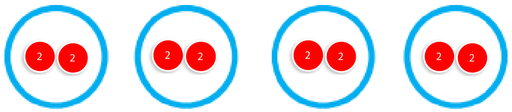
1 Cuenta los grupos y elementos que hay en cada grupo.



______ grupos de ______es igual a ______ .

______ veces ______es igual a ______ .

______ x ______ = ______ .



______ grupos de ______es igual a ______ .

______ veces ______es igual a ______ .

______ x ______ = ______ .

LA MULTIPLICACIÓN

En la imagen se representa una suma repetida del cardinal 6 con la regleta verde. Se lee: “Son 4 veces 6 es igual a 24”o “4x6= 24”. Observa que esta representación con las regletas, se realiza con las regletas separadas, es decir, en discontinuo. Intenta realizar una suma repetida utilizando las diferentes regletas Cuisenaire.

Multiplicación

Cuenta 4 veces 6 con tus regletas Cuisenaire.

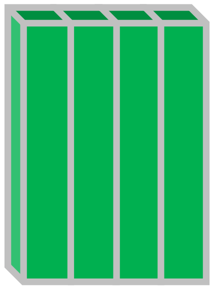
6 + 6 + 6 + 6 = 24

4 veces 6 es 24

4 x 6 = 24

LA MULTIPLICACIÓN

Podemos observar dos imágenes donde las regletas se estructuran como un continuo, a diferencia de las representaciones discontinuas anteriores. Esta estructura nos permite explicar una relación de filas y columnas que es útil para la multiplicación. Observamos en las imágenes la cantidad de filas y columnas. En la primera imagen hay 4 filas y 6 columnas, cuyo modelo matemático es 4x6=24; mientas que en la segunda imagen hay 6 filas y 4 columnas, 6x4=24.



LA MULTIPLICACIÓN

En la representación simbólica, según el contexto, representamos filas y columnas, grupos y elementos por grupo. La multiplicación como suma repetida, requiere que los niños manejen técnicas para sumar, que son as que hemos trabajado cuando exploramos la adición. En la imagen, se opera la suma repetida con la técnica de sumas horizontales.

Multiplicación: todo, grupos, veces y elementos por grupo.

Representa con tus regletas Cuisenaire cada multiplicación.
Escribe la suma repetida.

Cuenta 4 veces 2
2 + 2 + 2 + 2 =
4 veces 2 es 8
4 x 2 = 8

2 + 2 + 2 + 2 =
4 4
8

Cuenta 4 veces 8
8 + 8 + 8 + 8 =
4 veces 8 es 32
4 x 8 = 32

8 + 8 + 8 + 8 =
10 + 6 10 + 6
20 10 + 2
32

LA MULTIPLICACIÓN

En la imagen, encontramos el reto 8x2= , observamos que se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación. El 8 se descompone como un 5 + 3 y ambos se multiplican por 2. El 8, se puede descomponer de diferentes formas. En el siguiente reto 13x2= , también se descompone el 13, esta vez como 1 decena y 3 unidades para ser operado.
El aprendizaje de cardinalidad, descomposición, así como la noción de decena, son fundamentales para comprender y multiplicar.

Multiplicar con los números conectados.

Multiplicar:

1. 8 x 2 = 16

5 3

5 x 2 = 10
3 x 2 = 6
16

2. 13 x 2 = 26

10 3

10 x 2 = 20
3 x 2 = 6
26

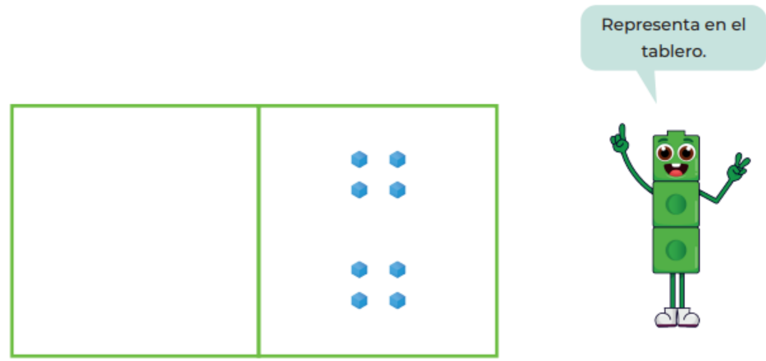
LA MULTIPLICACIÓN

En esta actividad utilizamos un metaplano, dividido en dos columnas, en la primera representamos las unidades y en el segundo las decenas. El reto consiste en multiplicar 2 x 4 =, para ello podemos representar el grupo de 4 con una regleta rosada. Es posible también representar el cardinal 4 con otra combinación de regletas. Verbalizar el proceso: “2 grupos de 4 es igual a 8”.

Multiplicar con la base diez.

Cuenta los grupos y elementos que hay en cada grupo.

1. 2 x 4 =



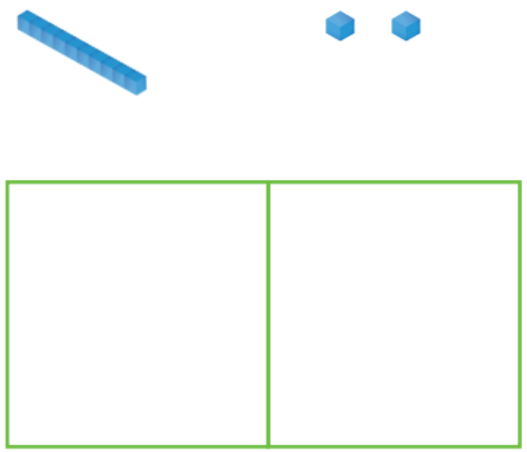
LA MULTIPLICACIÓN

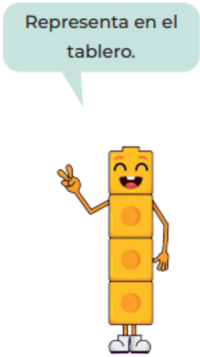
En el reto 2 x 12 = , representamos el doce con una regleta naranja (10) y una regleta roja. De esta manera podemos visualizar cada orden (decena y unidad). Procedemos a duplicar el grupo de 2 y la decena y hallamos el resultado. Se sugiere representar también con las fichas de regletas circulares.

Multiplicar con la base diez

Representa dentro del cuadro la multiplicación

1 2x 12 =





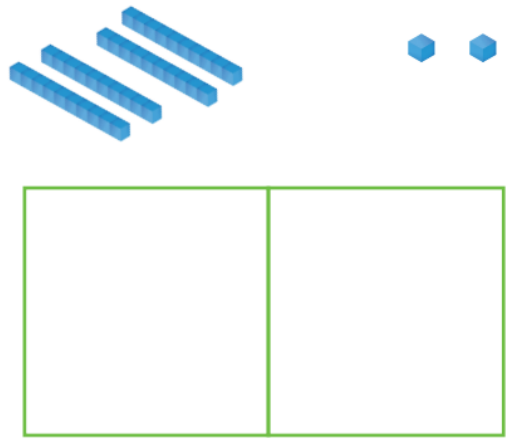
LA MULTIPLICACIÓN

En el reto 2 x 42 =, representamos con nuestras regletas Cuisenaire 4 decenas y 2 unidades y las duplicamos en nuestro tablero metaplano. Obsérvese que es solo un tablero dividido en dos columnas sin los rótulos de unidades o decenas.

Multiplicar con la base diez

Representa dentro del cuadro la multiplicación

5 2 x 42=



LA MULTIPLICACIÓN

En la imagen el reto 12 x 3 =, operado con un algoritmo estándar. Se recomienda utilizarlo, una vez que los estudiantes hayan manejado otras técnicas donde realicen descomposición, distribución, porque esta es una técnica que tiene la ventaja de ser fácil de operar, sin embargo es muy mecanicista y no asegura que los estudiantes comprendan el resultado o expliquen el proceso, aunque su respuesta al operar sea correcta.

Multiplicación estándar.

Representa dentro del cuadro la multiplicación

1 12 x 3 = ____

D	U	
1	2	x
	3	
3	6	

DECENAS	UNIDADES
3	6

LA MULTIPLICACIÓN

La comprensión de las relaciones multiplicativas, permite encontrar patrones en las matemáticas, estos patrones se pueden generalizar, facilitar el cálculo y la toma de decisiones. En la imagen observamos como 1x10=10x1, que es la propiedad conmutativa de la multiplicación, además que con esta referencia puedo generalizar el proceso para números con más cifras.

Abstracción y generalización del 10, 100, 1000.

1 x 10 = 10	1 x 100 = 100	1 x 1000 = 1000
10 x 1 = 10	100 x 1 = 100	1000 x 1 = 1000
2 x 10 = 20	2 x 100 = 200	2 x 1000 = 2000
10 x 2 = 20	100 x 2 = 200	1000 x 2 = 2000
3 x 10 = 30	3 x 100 = 300	3 x 1000 = 3000
10 x 3 = 30	100 x 3 = 300	1000 x 3 = 3000
4 x 10 = 40	4 x 100 = 400	4 x 1000 = 4000
10 x 4 = 40	100 x 4 = 400	1000 x 4 = 4000
5 x 10 = 50	5 x 100 = 500	5 x 1000 = 5000
10 x 5 = 50	100 x 5 = 500	1000 x 5 = 5000

LA MULTIPLICACIÓN

Aplicamos lo aprendido sobre la propiedad distributiva de la multiplicación. Recordemos que esta propiedad ha sido explorada con material concreto para luego ser explorada y operada en un plano simbólico. En multiplicación suelen utilizarse términos como factores, multiplicando y multiplicador para indicar las relaciones. Recomendamos hacerlas, pero antes utilizar un lenguaje más sencillo como "grupos", "número de veces" que describen mejor lo que visualizan con los materiales.

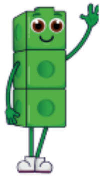
Multiplicaciones y la propiedad distributiva

1 Multiplicar: 4 x 15

$4 \times (10 + 5) =$

$$\begin{array}{cc} 10 & 5 \\ 10 & 5 \\ 10 & 5 \\ 10 & 5 \\ \hline 40 & 20 \end{array}$$

$$\underbrace{40 \quad 20}_{\boxed{60}}$$



LA MULTIPLICACIÓN

En el siguiente reto 4x15= , se multiplica aplicando la propiedad distributiva, de una forma más simplificada. En la parte superior se escribe el resultado de multiplicar el orden de las decenas y en la parte inferior de multiplicar las unidades.

Multiplicaciones laterales.

1 Multiplicar: 4 x 15

$$\overset{40}{\wedge}$$

$$4 \times 15 = \boxed{60}$$

$$\underset{20}{\vee}$$

LA MULTIPLICACIÓN

Aplicamos la propiedad distributiva de una forma simplificada. Obsérvese que las multiplicaciones parciales de cada orden se descomponen, de tal manera que resulte facilite la suma total.

Multiplicaciones laterales formando centenas, decenas y unidades.

1 Multiplicar: 86 x 3

200 + 40

86 x 3 = 258

10 + 8

2 Multiplicar: 86 x 9

700 + 20

86 x 9 = 774

50 + 4

LA MULTIPLICACIÓN

En el reto 221 x 4 =, se descompone el multiplicando en centenas, decenas y unidades para explicar el proceso de multiplicación y para facilitar el mismo.

Multiplicaciones horizontales.

1 Multiplicar 221 x 4

221 = 200 + 20 + 1

4

$\boxed{800 \quad + \quad 80 \quad + \quad 4}$

884

LA MULTIPLICACIÓN

En el reto 121 x 3 =, se descompone el multiplicando en centenas, decenas y unidades formando una columna. Es una técnica recomendad para consolidar y explicar la multiplicación donde no se reagrupe algún orden.

Multiplicaciones por bloques sin reagrupación.

1 Multiplicar 121 x 3

```
121 x
  3
----
300
 60   >   369
  9
```

Algoritmos OAOA.

LA MULTIPLICACIÓN

En el reto 456 x 4 =, se descompone el multiplicando en centenas, decenas y unidades formando una columna. Es una técnica recomendad para consolidar y explicar la multiplicación donde se deba reagrupar unidades de un orden para convertirlo en otro orden.

Multiplicaciones por bloques reagrupando.

1 Multiplicar 456 x 4

```
456 x
  4
----
400 ———— 1000 + 600
 50 ————      200
  6 ————       20 + 4
           ----------
              1824
```

LA MULTIPLICACIÓN

Para facilitar la explicación de esta técnica de multiplicación, se recomienda antes explorar la base diez o las fichas circulares de regletas. La ventaja de este esquema es que los niños pueden representar las relaciones multiplicativas con dibujos o símbolos dentro de los tableros, además del material concreto. Permite comunicar, la comprensión que tiene sobre los órdenes al operarlos. Obsérvese que el multiplicando se descompone en el lado de las filas, mientras el multiplicador en el lado de las columnas. Manejar un claro protocolo de representación, facilita la comunicación en el aula. Puede utilizarse también este esquema con las barras de regletas Cuisenaire para las multiplicaciones de números menores como introducción.

Multiplicando en el tablero de doble entrada.

1 Multiplicar 12 x 12

	10	2
10	100	20
2	20	40

144

3 Multiplicar 21 x 213

	200	10	3
20	4000	200	60
1	200	10	30

4491

LA MULTIPLICACIÓN

En la adición y sustracción aprendimos a utilizar técnicas de redondeo que nos facilitan el cálculo mental. En el siguiente reto 25 x 19 =, observamos que los número que terminan en 8, 9 o cercanos, son más fáciles de operar si le agregamos 1 o 2, según corresponda; y los convertirlos hacia su decena más cercana. La regla de operar es la siguiente: al factor que se le agrega una vez más (+1), se le considera el número de veces o grupos del otro factor, por lo que este último será restado del total tanta veces haya sido agregado.

Multiplicando redondeando.

1 Multiplicar: 25 x 19

25 x 19 = 475

+1

25 x 20 = 500

\- 25

Algoritmos OAOA.

LA MULTIPLICACIÓN

En el reto 215 x 34 =, cada cifra del multiplicador opera a cada cifra del multiplicando, representándose en dos columnas el proceso. Esta técnica se recomienda como actividad previa a la multiplicación con esquema estándar. Se puede utilizar como soporte visual las fichas circulares de regletas Cuisenaire en el metaplano.

Multiplicando en dos columnas.

1 Multiplicar: 215 x 34

215 x

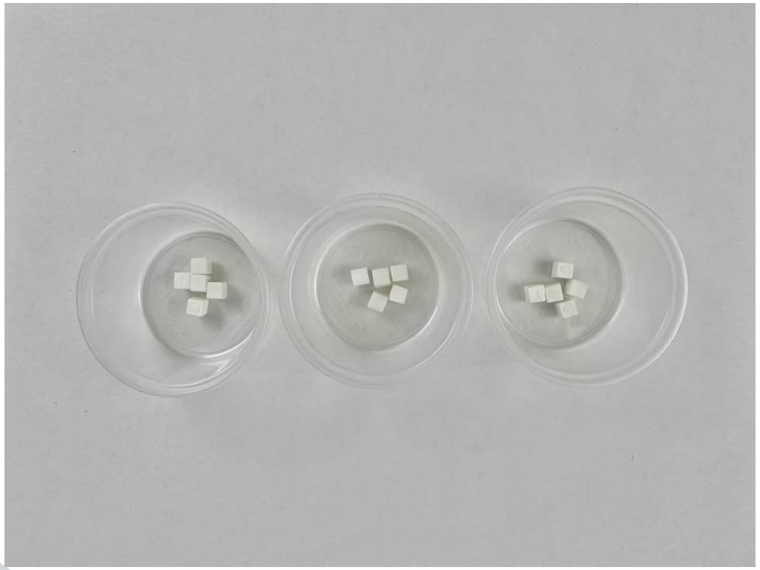
34

6000	800
300	40
150	20

7310

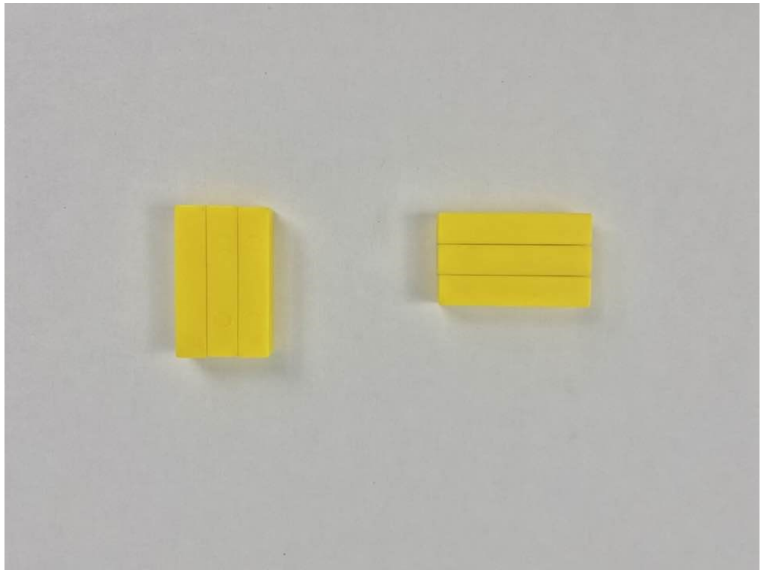
LA MULTIPLICACIÓN

Para aprender a multiplicar, generalmente se ha recurrido a las tablas de multiplicar. Pero, ¿qué es la multiplicación? ¿Será lo mismo multiplicar 3x5 que 5x3? Muchos suelen decir que son los mismo, porque cuando ven las tablas el resultado es 15. Sin embargo, en la siguiente figura vemos la representación de 3 x 5 como tres grupos de cinco. Cómo crees que sería la representación de 5x3.
Ahora bien, esta es una forma de representar mediante la relación de grupos (vasos) y elementos por grupo (regletas).Donde claramente vemos que representan dos modelos matemáticos diferentes.



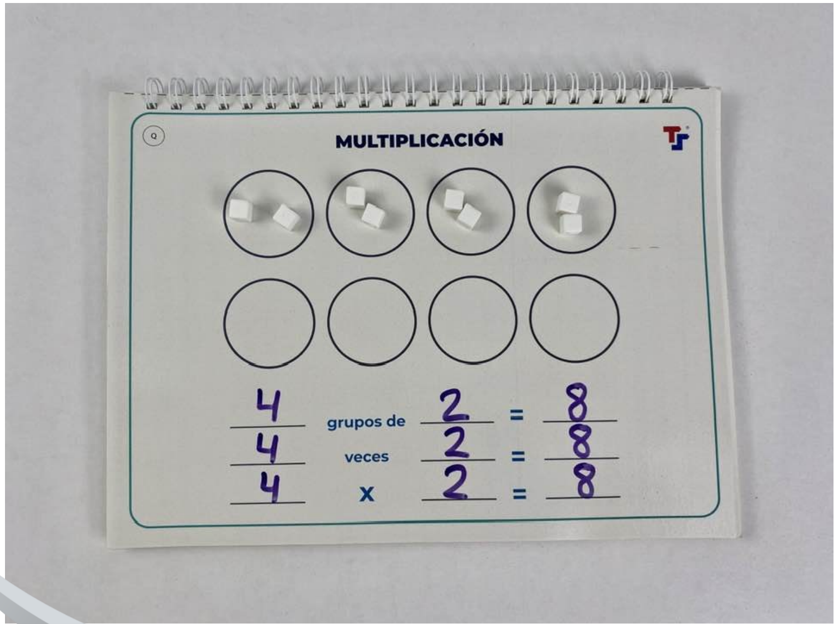
LA MULTIPLICACIÓN

A continuación, vamos a explorar el concepto de la multiplicación desde una relación de columnas y filas y filas. En la siguiente figura observamos una estructura de regletas de forma rectangular de 3 filas por 5 columnas, en la siguiente se observa otro rectángulo de 5 filas por 3 columnas ¿Qué ha cambiado si ambos posen igual 15 regletas? Podemos ver que ha cambiado su orientación. Entonces este modelo matemático nos da un panorama de las relaciones espaciales que podemos comunicar a través de la multiplicación.



LA MULTIPLICACIÓN

En la figura A se presenta un metaplano con círculos que representan cada uno, un grupo. Podemos establecer relaciones entre los grupos que seleccionemos y el número de elementos (regletas), que se represente en cada grupo. En la figura se visualiza 3 grupos de dos elementos. Enfatizamos que cada grupo debe tener siempre la misma cantidad de elementos. Encontramos el protocolo de verbalización “grupos de”, “veces” y luego la frase matemática formal. Este metaplano nos permite explorar la tabla de multiplicar hasta el 8.



LA MULTIPLICACIÓN

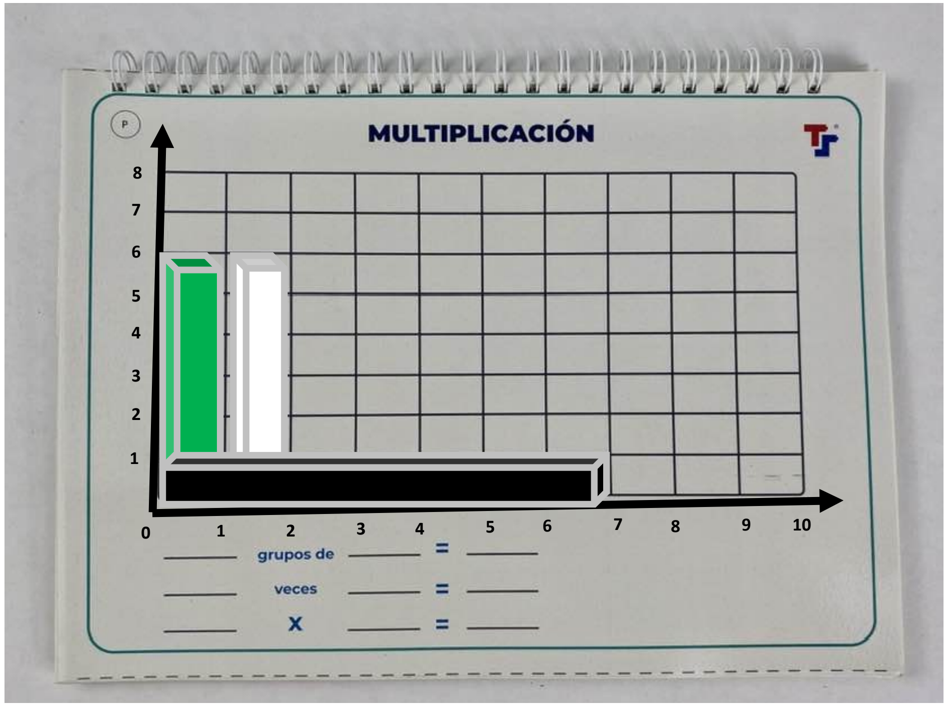
En la figura B, observamos un metaplano donde se relacionan las filas y columnas para construir la noción de la multiplicación. El metaplano funciona también como pizarra por lo que se puede escribir y borrar con plumón acrílico las filas y columnas. Antes de debe representar con regletas como en la figura: 2 filas con 4 columnas con las regletas. Encontramos el protocolo de verbalización “grupos de”, “veces “ y luego la frase matemática formal. Este metaplano nos permite explorar la multiplicación hasta la tabla del 10. Podemos explorar en él las diferencias, por ejemplo , de 3x5= y 5x3=, en la relación de filas y columnas.

LA MULTIPLICACIÓN Y LA SUPERFICIE

La multiplicación nos permite también comprender mejor la noción de superficie de cuerpos planos: *el área*, ya que para hallar el área se requiere multiplicar los elementos de las figuras, Aquí un juego que podemos realizar en casa sobre una superficie con cuadrículas. Se puede jugar con dados de diferentes colores, donde uno de ellos indica las filas y otro las columnas. También, un niño puede decir 2x3 (columnas por filas) y el otro dibujar en la cuadrícula. Es importante, luego pintar o construir con las regletas el área que se formó.

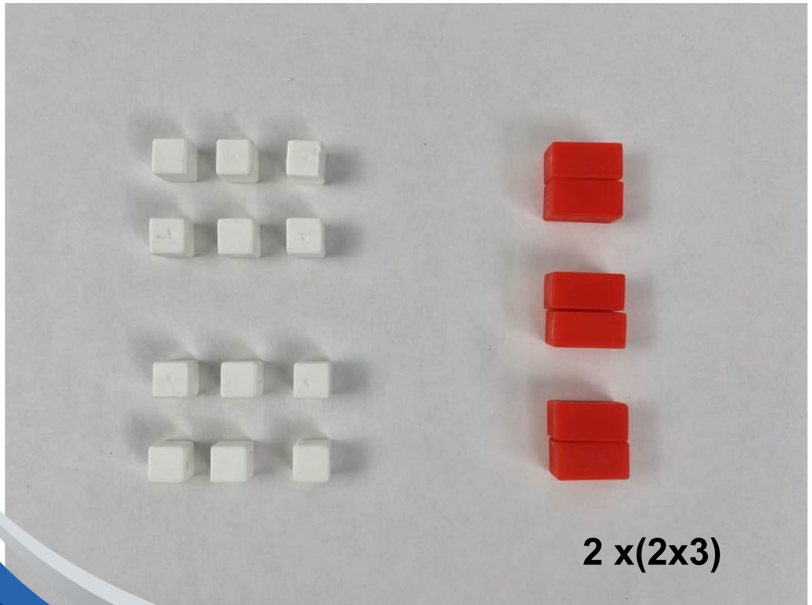
LA MULTIPLICACIÓN Y EL PLANO CARTESIANO

La multiplicación también nos puede ayudar a orientarnos en el espacio con más precisión con el *plano cartesiano*. Utilizaremos los dados para indicar las coordenadas: las abscisas y ordenadas (x,y). Luego las trazaremos en el plano. Como vemos, la multiplicación nos indica algo más que solo un resultado, por eso es importante comprender las matemáticas antes que memorizarlas.



PROPIEDAD ASOCIATIVA

Cuando utilizamos las regletas para explorar las matemáticas, logramos una real comprensión de las propiedades de la multiplicación. A partir de una construcción, podemos observar la propiedad asociativa de la multiplicación. Observen la expresión: 2 x (3x2). Más allá de la respuesta, lo importante es comprender cómo se formar 2 grupos y cada uno de esos grupos tiene una estructura de 3 columnas por dos filas. Por otro lado, en el modelo 3 x (2x2), observamos cómo se formar tres grupos y cada grupo tiene una estructura de 2 columnas y dos filas. Podemos así, ir creando asociaciones hasta generalizar esta propiedad.



PROPIEDAD CONMUTATIVA

Observen cómo podemos cambiar el orden de los factores y el producto seguirá siendo el mismo. Anteriormente descubrimos las distintas relaciones entre los objetos para entender la multiplicación. Un rectángulo de 5x3 y otro de 3 x 5 pueden cambiar de orientación pero conservará la cantidad de elementos que lo componen y su superficie. Luego de haber construido utilizando los las regletas , para que ese descubrimiento no se olvide, es importante que los pequeños dibujen sus construcciones y escriban la frase matemática que representa lo que han construido.

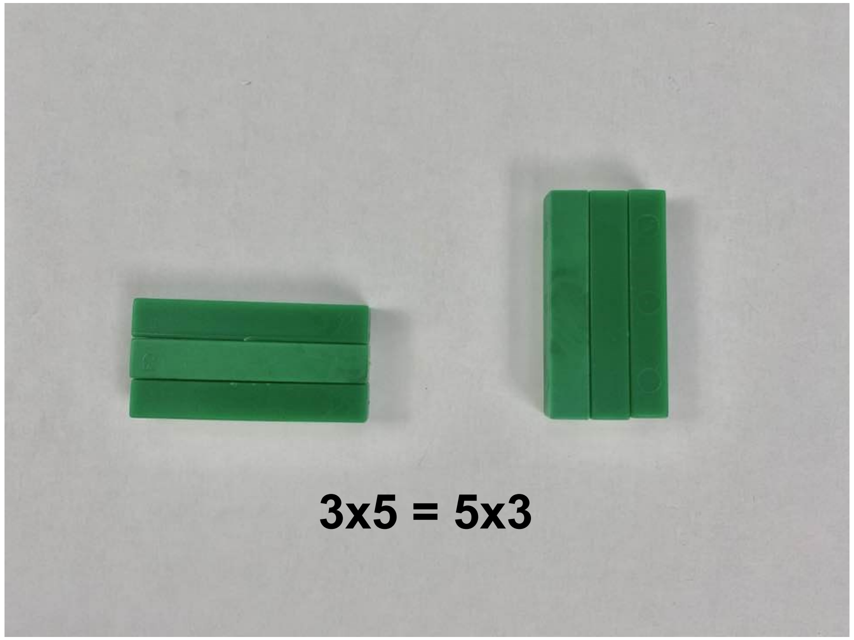


TABLA DE MULTIPLICAR DEL 2

El metaplano de la figura A nos ayuda a representar con las regletas y a la vez formalizar las relaciones de filas y columnas. Observamos que en la estructura hay muchas filas, pero en todos los casos siempre hay 2 columnas. Representamos de la siguiente manera: 1 fila de 2 columnas son 2 regletas, dos filas de dos columnas son 4 regletas, tres filas de 2 columnas son 6 regletas.

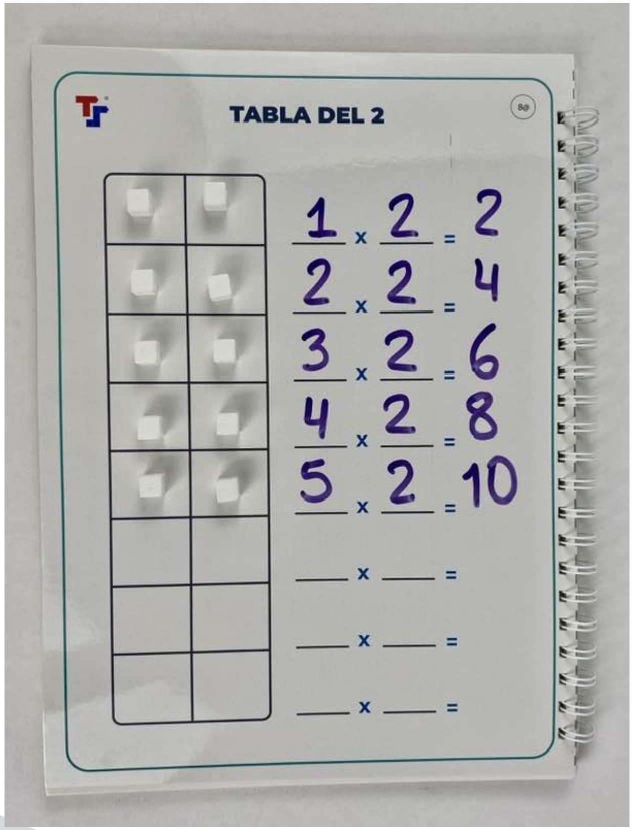


TABLA DE MULTIPLICAR DEL 3

En la figura B tenemos un metaplano que nos facilita la construcción de la tabla del 3. Podemos empezar a represetar1 fila de 3 y representar, al lado, la formalización 1x3=3, 2 filas de 2, 2x3=6. Una vez completadas todas las filas y columnas, reflexionamos sobre lo que se repite en todas las construcciones: *todas las filas tienen 3 columnas*. Por eso es la tabla de multiplicar del 3.

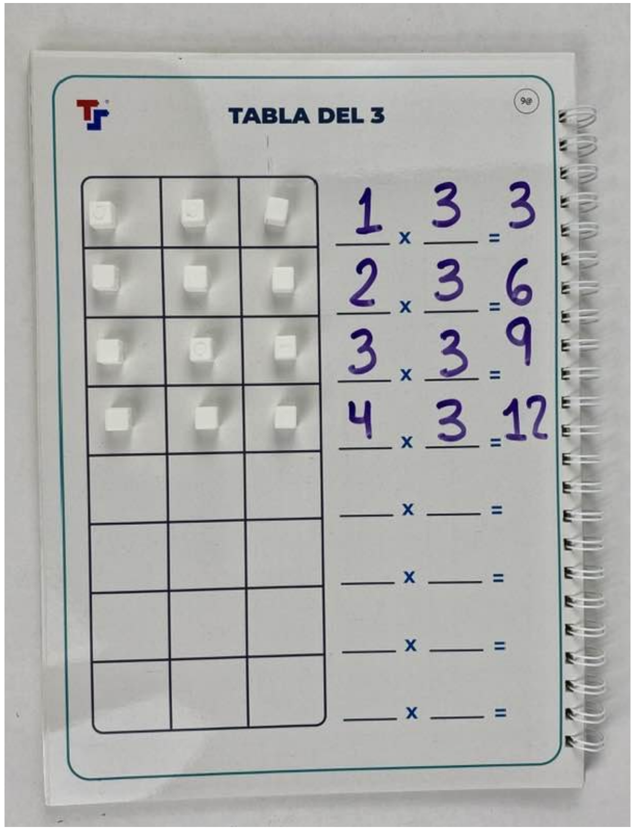
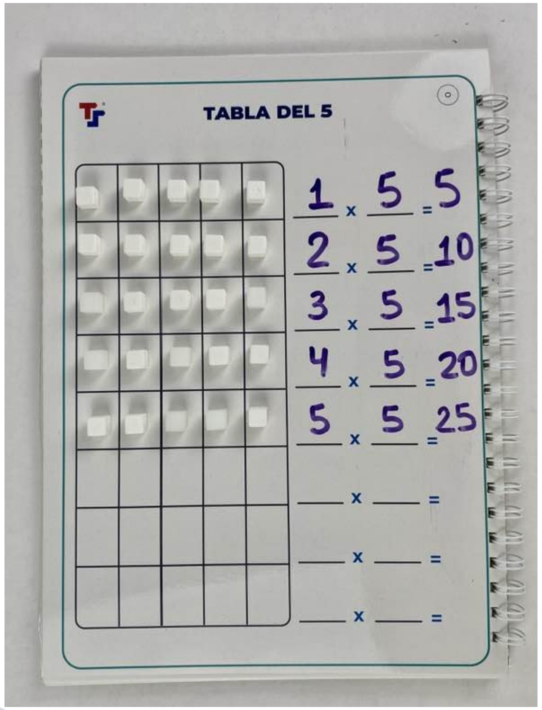


TABLA DE MULTIPLICAR DEL 5

Luego de realizar juegos de exploración de la noción de multiplicación, se recomienda empezar con las tablas del 2, 3 y 5, ya que con estas tablas los niños pueden construir las demás tablas. En este metaplano seguimos las mismas indicaciones que las anteriores tablas. Se recomienda siempre la verbalización: 1 fila de 5 hacen 5. 2 filas de 5 hacen 10, 3 filas de 5 hacen 15, 4 filas de 5 hacen 20; es decir, expresar lo realizado con los materiales. La formalización de las matemáticas no solo es el símbolo, si no también el lenguaje formal.

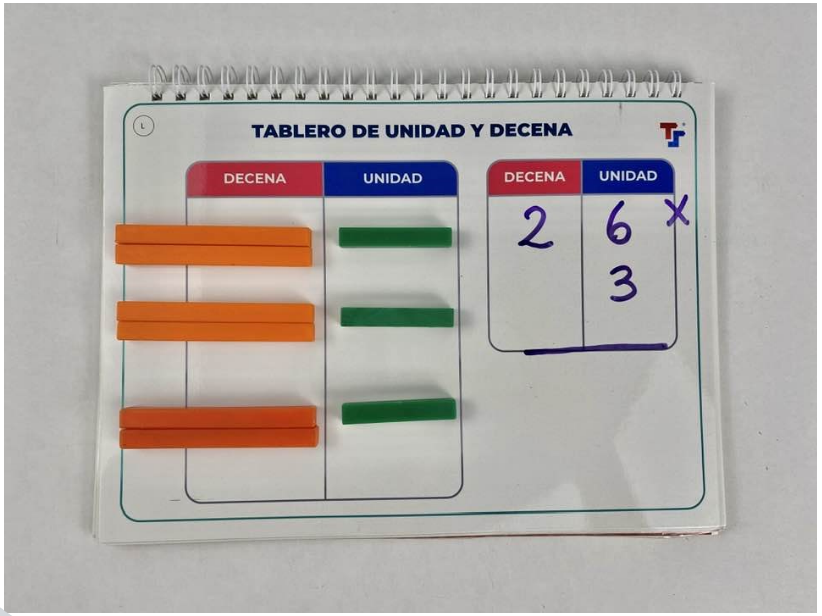


MULTIPLICACIÓN SIN REAGRUPAR

En la imagen B observamos la siguiente multiplicación 12 x 3 = ¿? Es una multiplicación sin reagrupación y donde las regletas se trabajan como material manipulativo. Los niños utilizan regletas para representar las unidades y decenas respectivamente. Se ha representado en el tablero de símbolos la multiplicación y luego en el tablero de materiales 2 regletas para las 2 unidades y 1 regleta para 1 decena. Cada uno de estos órdenes se va a multiplicar por 3. Al final sumamos todas las unidades y decenas, y lo representamos en el tablero de los símbolos.

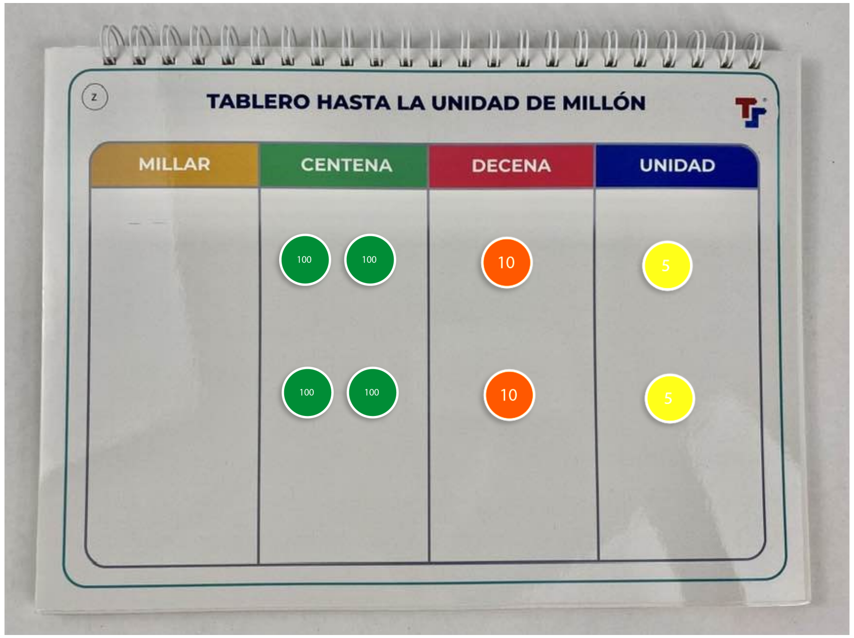
MULTIPLICACIÓN REAGRUPANDO

En la imagen A, observamos la siguiente multiplicación: 25 x 3 = , es una multiplicación con reagrupación. Representamos el número 25 con las regletas siguiendo el protocolo de colores. Debemos de multiplicar cada orden por 3 como en la imagen. Podemos ayudarnos con líneas punteadas para visualizar mejor la multiplicación. Luego sumamos todas las unidades y observamos que tenemos 15 unidades, por lo que las agrupamos como 1 decena y 5 unidades. Llevamos la decenas con las otras 6 decenas y quedan 5 unidades en el orden de las unidades. En total obtuvimos 75.



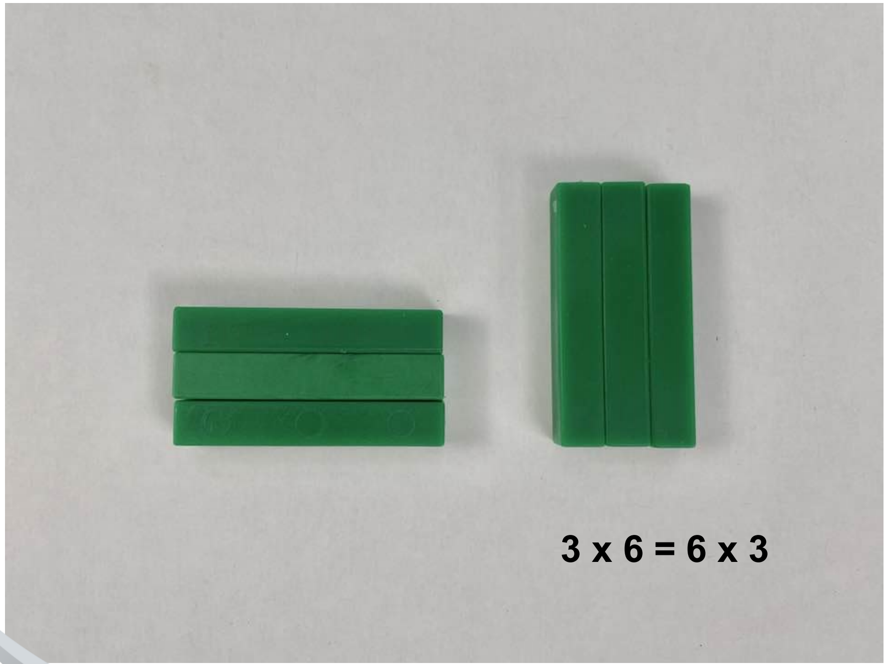
MULTIPLICACIÓN REAGRUPANDO

En la imagen B, observamos la siguiente multiplicación: 125 x 2 = , es una multiplicación son reagrupación. Esta se ha representado en el tablero de los símbolos, por lo que representamos luego en el tablero de materiales. Luego de representar el 215 multiplicamos por 2, lo que en los materiales es duplicar cada regleta en su respectivo orden. Vemos que en las unidades tenemos 10, por lo que lo agrupamos como 1 decena. Llevamos la decena con el orden de las decenas quedándonos al final 0 regletas azules, 5 regletas rojas y 2 regletas verdes que en números representan al 250.



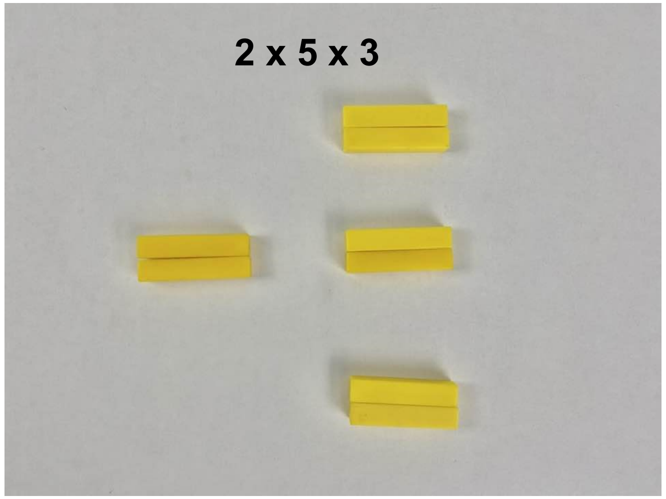
PROPIEDAD CONMUTATIVA

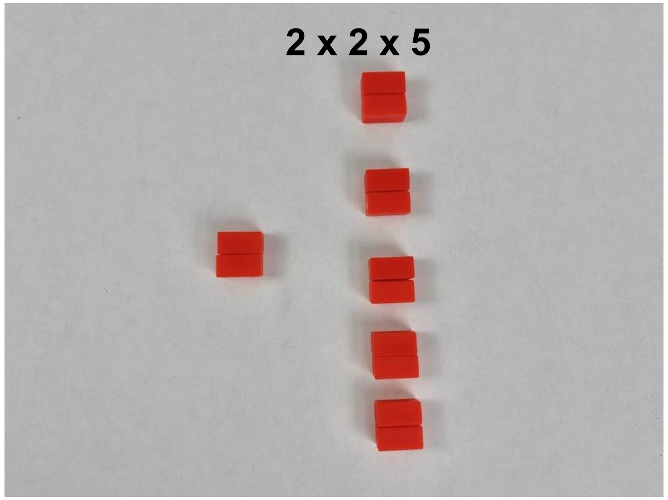
En la siguiente frase matemática 3 X 6 = 6 X 3 podemos ver la propiedad conmutativa de la multiplicación: cuando dos números se multiplican su orden puede cambiar, sin alterar el resultado. Para explorar esta propiedad los niños deben tener con el uso de material concreto en su estructura discontinua y continua. Podemos observar que esta relación se cumple cuando representamos las regletas en la relación de grupos y elementos por grupos; y como filas con columnas.



PROPIEDAD ASOCIATIVA

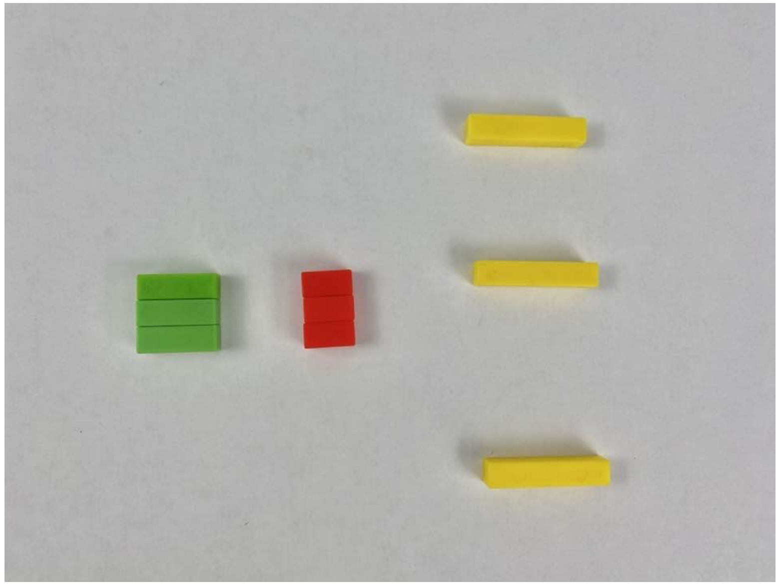
Si multiplicamos primero 2 x 5 y el resultado lo multiplicamos por 3 nos da igual que si multiplicamos primero 2 x 3 y después multiplicamos por 5.

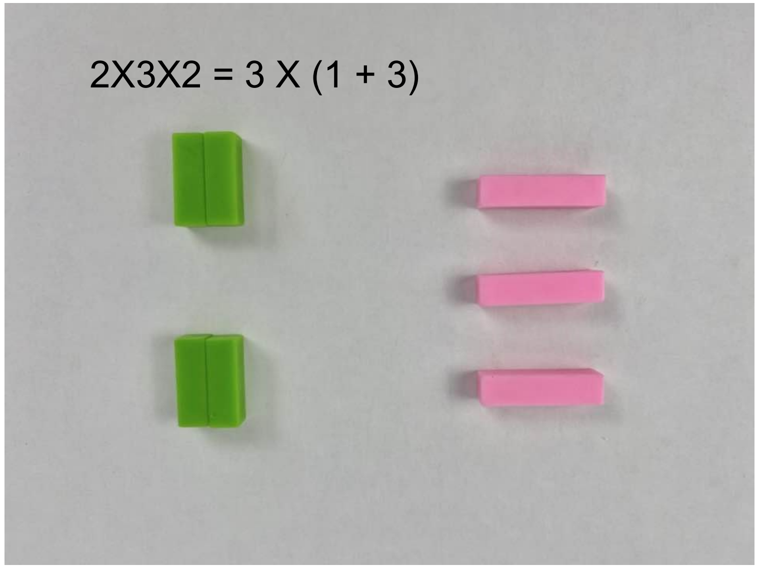


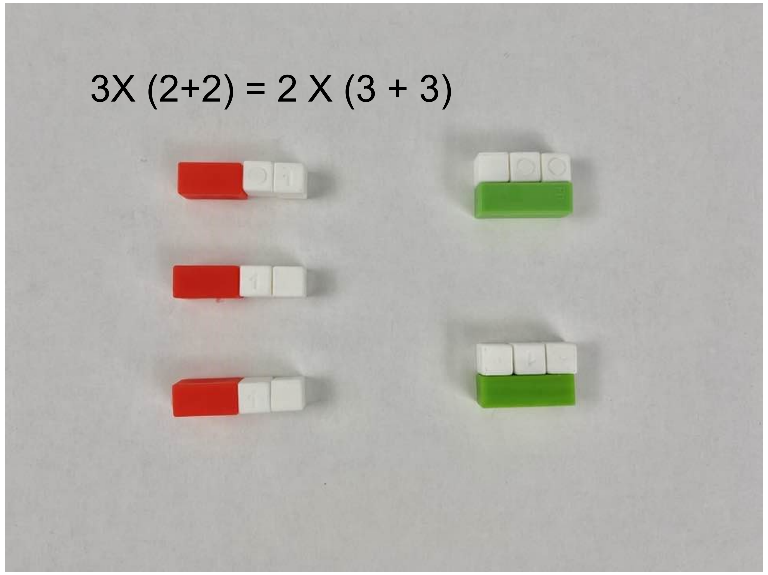


PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

En esta propiedad observamos que la multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos. En la siguiente operación: 3X3 + 3X2= 3 X (2 + 3). En la imagen A podemos representar con las regletas en forma discontinua para representar un conjunto y con las regletas en forma continua o bloques para representar una relación multiplicativa.







PROPIEDAD DEL 1

Esta propiedad quiere decir que el producto de 1 con cualquier número es ese número . Por ejemplo, 1 × 1, 2x1, 3x1, 4x1 el producto en todos los casos es igual a 1.

Esta exploración la podemos realizar como una torre de 1 fila, que aparece en la figura A, donde observamos que hay 10 filas y cada una de ellas tiene una columna:

1 fila de 1 columna es 1

2 filas de 1 columna es 2

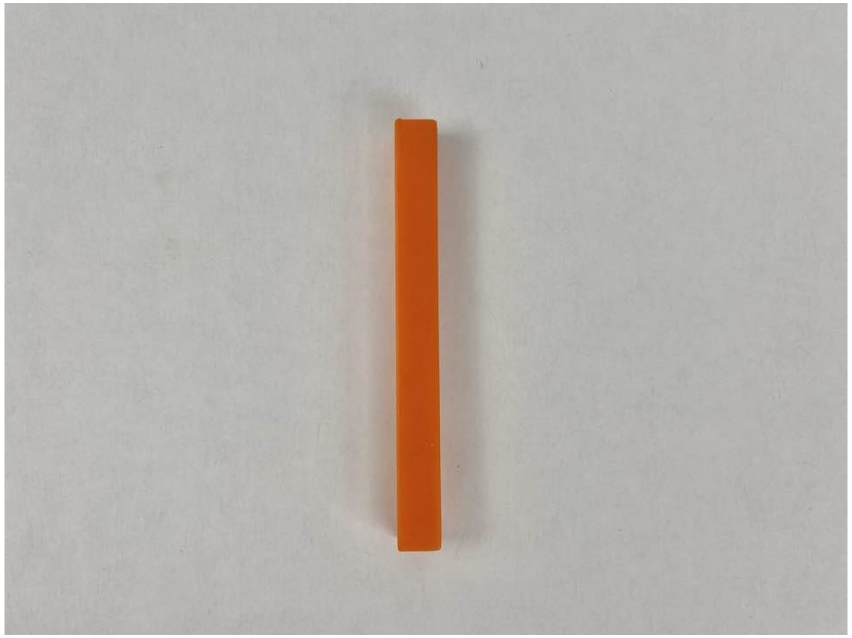
3 filas de 1 columna es 3

En la imagen B, observamos la relación de grupos representados por bandejas y elementos por 1 regleta:

1 grupos de 1 elemento es 1

2 grupos de 1 elemento es 2

3 grupos de 1 elemento es 3

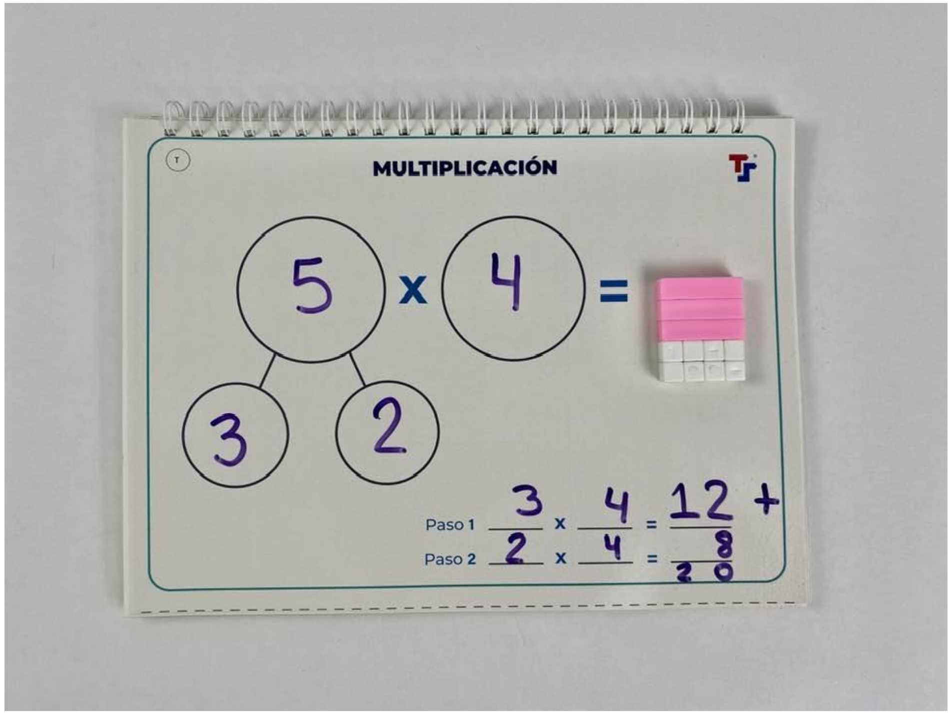


PROPIEDAD DEL 0

La propiedad de producto cero establece que si a x b=0, entonces a o b es igual a cero. Si un número es multiplicado por cero, el resultado es cero: 1 X 0 = 0, 2 X 0 = 0, 3 X 0 = 0, 4 X 0 = 0. Esta propiedad la podemos visualizar mejor cuando representamos las regletas como material discontinuo, es decir, como grupos y elementos por grupos.

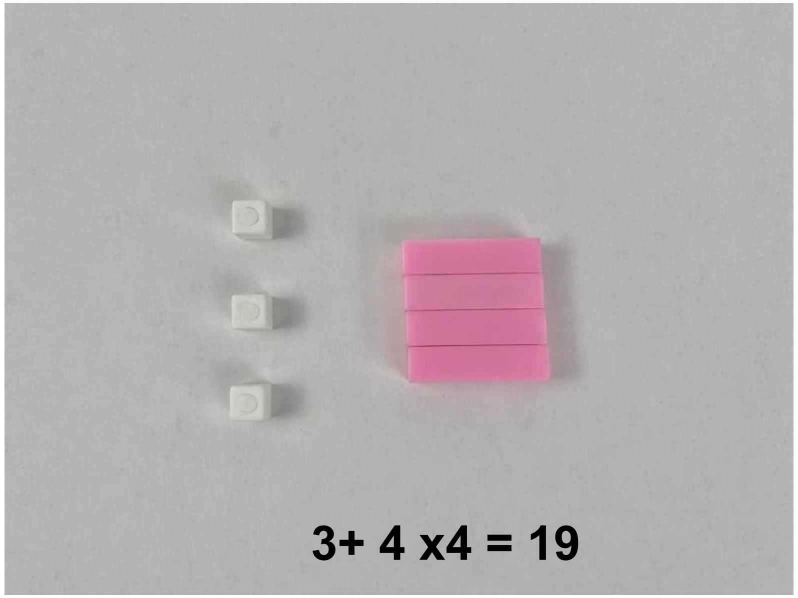
METAPLANOS Y MULTIPLICACIÓN

Podemos utilizar el esquema de los números conectados para explorar las propiedades de la multiplicación de manera simbólica. Es recomendable, representar con regletas, para visualizar mejor cada proceso.



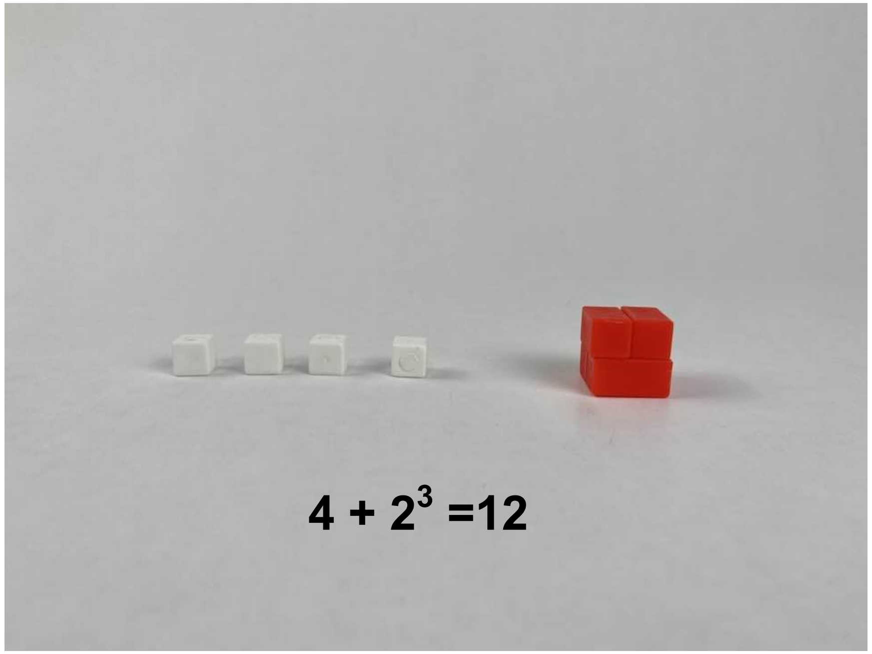
OPERACIONES COMBINADAS

En las operaciones combinadas podemos observar las distintas formas de agrupar los conjuntos. En esta frase matemática, por ejemplo : 3 + 4 x 3 , el tres forma un conjunto mientras que la estructura de 4 columnas por tres filas representa otro conjunto (un modelo multiplicativo). Podemos llegar a esta conclusión luego de haber construido desde el principio el concepto del número, la noción de conjunto y agrupación. Es importante resaltar que aquí podemos observar por qué se le suma 3 , después de multiplicar y no antes.



OPERACIONES COMBINADAS

En esta operación combinada podemos observar que en la frase matemática se suman un conjunto de cuatro elementos y una potencia al cubo . En el caso del conjunto cuatro se puede observar que es presentado como una cantidad discreta y el otro conjunto que está estructurado como una potencia de tres (cubo), como continuo. Es muy pedagógica la visualización , ya que observamos no solo el procedimiento para resolver un 2 al cubo : 2x2x2 , también podemos ver a qué se debe su nombre. Si juntamos todos sus elementos podemos obtener un cubo.



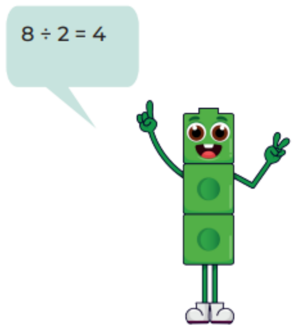
DIVISIÓN POR REPARTO SIN RESTO

En la siguiente actividad, se explora la noción de división como un reparto equitativo. Donde se conoce el total de elementos a repartir y el número de grupos. Lo que se busca es cuánto le corresponde a cada grupo luego de repartir a todos por igual. En didáctica, podemos utilizar las siguientes palabras para explicar el proceso: el todo, para referirnos al total, el número de grupos, el número de elementos por grupo. En la actividad el todo es 8, el número de grupos es 2, luego de repartir descubrimos que a cada grupos le corresponde 4.

División sin resto: reparto equitativo.

1 Reparte las siguientes bloques en dos grupos iguales. ¿Cuántos bloques quedan en cada grupo?

$8 \div 2 = 4$



Quedaron 4 bloques en cada grupo.

DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO SIN RESTO

En la siguiente actividad, el todo es 6, representado por una regleta verde. Conocemos los elementos por grupo que son dos (los que le va a corresponder a cada grupo), lo que no sabemos es cuántos grupos se requiere para cumplir con esas condiciones. Entonces, el todo es 6, el número de elementos por grupos es 2, y luego de agruparlos tenemos un total de 3 grupos formados.

División sin resto: agrupamiento.

1 Si la siguiente cantidad la agrupamos de dos en dos ¿Cuántos grupos formamos?

___ ÷ ____ = ____

Formamos ______ grupos.

DIVISIÓN COMO REPARTO SIN RESTO

En los siguientes retos, se realiza el reparto en una etapa simbólica. No se profundiza en los rótulos de dividendo, divisor, cociente, resto; más sí en que el niño comprenda que el número ha sido repartido en partes iguales. Se realiza el reparto con los números de una, dos y más cifras, así como las generalizaciones exploradas en páginas anteriores con las otras operaciones.

División sin resto

1 $10 \div 2 =$

5 5

7 $4 \div 2 =$

DIVISIÓN COMO REPARTO CON RESTO

Las regletas Cuisenaire, por sus cualidades, permiten representar el cardinal de un número de forma continua como discontinua. En el reto, se representa el cardinal de 7 con la regleta negra, también con 7 regletas blancas. Esta última forma de representar nos, permite visualizar el proceso donde el todo es 7, el número de grupos es 2, los elementos por grupo son 3 y nos queda un bloque sin repartir, que es el resto 1.

División con resto: reparto equitativo

3 Reparte las siguientes cantidad en dos grupos iguales. ¿Qué cantidad queda en cada grupo?

___ ÷ ____ = ____

Quedaron ______ en cada grupo.
Quedó ______ bloque sin grupo.

DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO CON RESTO

Se representa con la regleta naranja y verde clara el número 13 que es el todo. Luego de ordenarlos de tres en tres, que son los elementos por grupo, formamos 4 grupos y nos queda uno sin poder formar un grupo que es el resto. Para visualizar mejor el proceso podemos representarlo con 13 regletas blancas u otra combinación que permita visualizar mejor la división por agrupamiento.

División con resto: agrupamiento

1. Si la siguiente cantidad la agrupamos de tres en tres ¿Cuántos grupos formamos?

___÷ ____ = ____

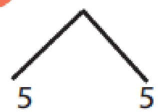
Formamos ______ grupos
Quedó ______ sin agrupar.

DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO CON RESTO

En la siguiente actividad, de etapa simbólica, se divide el todo, quedándonos algunos elementos sin agrupar. La contextualización de retos es importante, tanto de la forma como el docente las presenta, como la manera como los estudiantes crean historias o sucesos para contextualizarlas.

División con resto

1. $11 \div 2 =$



resto: 1

7. $17 \div 3 =$

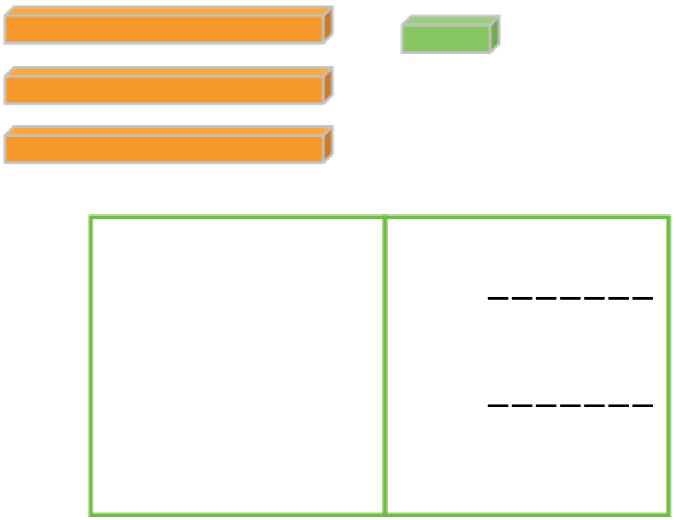
resto: 2

DIVISIÓN CON METAPLANOS

En el reto utilizamos nuestros metaplanos de dos columnas para separar las unidades de las decenas en el reparto. Observa que en el metaplano se trazan dos segmentos de líneas punteadas para representar los tres grupos con los que repartiremos 33, luego de realizar el reparto tenemos que cada grupo tiene 11.

Dividimos con metaplanos.

3. $33 \div 3 =$



DIVISIÓN COMO REPARTO SIN RESTO

El siguiente reto, se presenta con un algoritmo estándar para hallar el cociente. Es práctico en cuanto a lo mecánico, sin embargo, debemos asegurar antes de utilizarlos que nuestros niños hallan comprendido las relaciones entre el todo, el número de grupos y el número de elementos por grupo.

División estándar.

1. $75 \div 5 =$ ____

$$\begin{array}{rcc|cc}
 & D & U & & \\
 & 7 & 5 & 5 & \\
\hline
- & 5 & & D & U \\
\hline
 & 2 & 5 & 1 & 5 \\
- & 2 & 5 & & \\
\hline
 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

DIVISIÓN Y GENERALIZACIÓN

En la siguiente actividad se explora primero la propiedad conmutativa de la multiplicación, utilizando el protocolo de verbalización: el todo, grupos y elementos por grupo; para luego explorar su relación inversa que es la división. Solo entonces se generaliza este proceso como recurso para las habilidades de cálculo.

Realizar la división conectada, abstracción y generalización.

1 Observa la propiedad conmutativa de la multiplicación que aprendimos. Relacionar con la división.

2 x 6 = 12	2 x 4 = 8	4 x 6 = 24
6 x 2 = 12	4 x 2 = 8	6 x 4 = 24
12 ÷ 6 = 2	8 ÷ 4 = 2	24 ÷ 6 = 4
12 ÷ 2 = 6	8 ÷ 2 = 4	24 ÷ 4 = 6
120 ÷ 6 = 20	80 ÷ 4 = 20	240 ÷ 6 = 40
120 ÷ 2 = 60	80 ÷ 2 = 40	240 ÷ 4 = 60
1200 ÷ 6 = 200	800 ÷ 4 = 200	2400 ÷ 6 = 400
1200 ÷ 2 = 600	800 ÷ 2 = 400	2400 ÷ 4 = 600

DIVISIÓN Y GENERALIZACIÓN

Recordemos que en el enfoque CPA, es un modelo que explica como las personas construimos conceptos, dando énfasis a el uso de experiencias sensoriales y culminando con los símbolos en su etapa de mayor abstracción. Al dividir y generalizar, se pueden utilizar material concreto, pero con otra finalidad, por ejemplo, de consolidar o de explicar lo que se ha comprendido o un nuevo descubrimiento que hallan realizado los niños y el material sea su soporte en la comunicación de sus ideas.

Dividir y generalizar.

1 Dividir: 24 ÷ 4

24 ÷ 4 =

6 6 6 6

240 ÷ 4 =

60 60 60 60

2400 ÷ 4 =

600 600 600 600

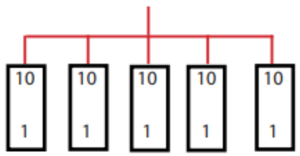
DIVISIÓN Y GENERALIZACIÓN

Los conceptos aprendidos sobre cardinalidad, descomposición y de sistema numérico, nos permiten explicar la multiplicación como la división como procesos inversos. Nos permite también entender modelos o nuevos algoritmos para resolver retos. En esta actividad, se divide y generaliza, puede utilizarse como recurso las fichas circulares de regletas.

Dividir y generalizar

1 Dividir: 55 ÷ 5 =

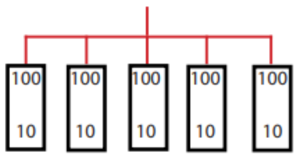
55 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 11

Resto: 0

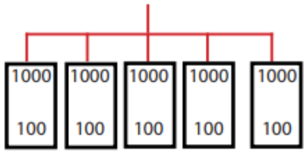
550 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 110

Resto: 0

5500 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 1100

Resto: 0

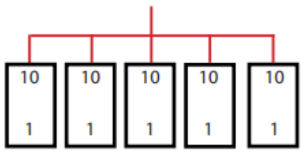
DIVISIÓN Y GENERALIZACIÓN

En esta actividad se divide y generaliza. Observamos también que tiene un resto diferente a cero. Le invitamos a realizar divisiones con resto diferente de cero y generalizarlas. Es importante que los niños utilicen material concreto al inicio del proceso. El primer reto puede ser representado con las regletas Cuisenaire, el segundo con la base diez y el tercero con las fichas circulares de regletas.

Dividir y generalizar.

1 Dividir: 56 ÷ 5 =

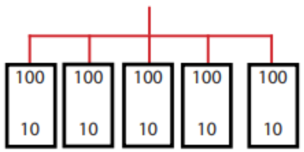
56 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 11

Resto: 1

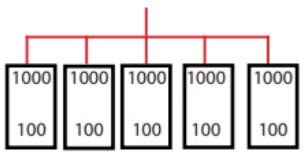
560 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 110

Resto: 10

5600 ÷ 5 =



Cada grupo tiene: 1100

Resto: 100

DIVISIÓN Y GENERALIZACIÓN

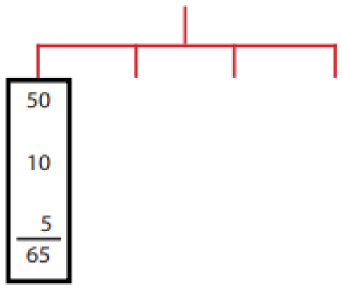
En el siguiente reto 260 ÷ 4, reconocemos el todo y el número de grupos (asumiendo que es por reparto), para hallar la cantidad de elementos por grupo vamos a descomponer 260 en centenas y decenas, de tal manera que se más útil para que cada una de esas partes sean repartidas en 4 grupos. Como vemos, utilizar este recurso requiere conocer muy bien el sistema de base diez y los divisores y múltiplos explorados en la multiplicación.

Dividir y generalizar.

1 Dividir: 260 ÷ 4

(200 + 40 + 20) ÷ 4

260 ÷ 4 =



Cada uno tiene: 65

Resto: 0

Algoritmos OAOA.

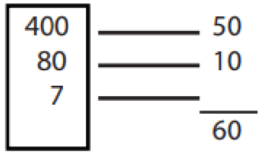
DIVISIÓN Y DESCOMPOSICIÓN

Este reto, utiliza una técnica parecida a la anterior, solo que tiene como resto 7. En algunos programas se culmina con explicar que queda un resto sin poder dividir, mientras que en otros se explora con la calculadora el resultado de dividir 7 ÷ 8 = 0.875. ´Dando como resultado un número entero y un racional (decimal). En las siguientes páginas, se explorará paso a paso, cada uno de los conceptos y relaciones matemáticas que son necesarias para comprender la división.

Dividir con descomposición en centenas, decenas y unidades.

1 Dividir: 487 ÷ 8

487 ÷ 8 =

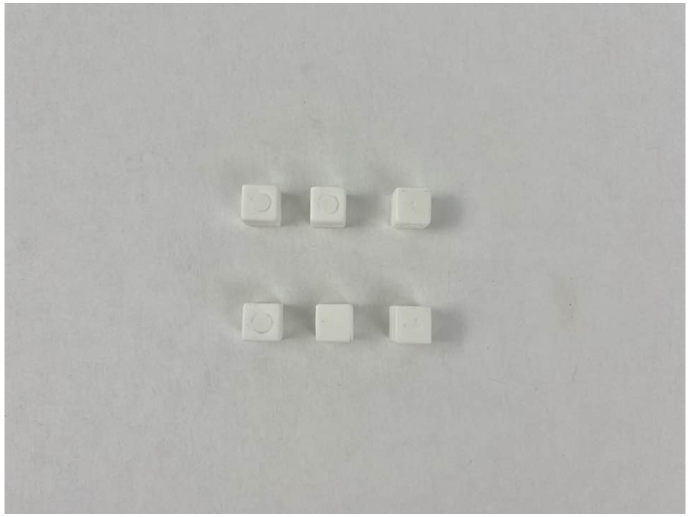


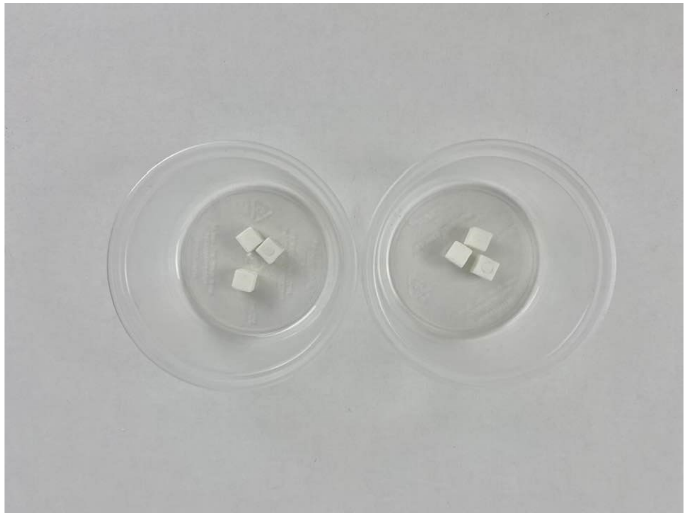
Cada uno tiene: 60

Resto: 7

DIVISIÓN COMO REPARTO SIN RESTO

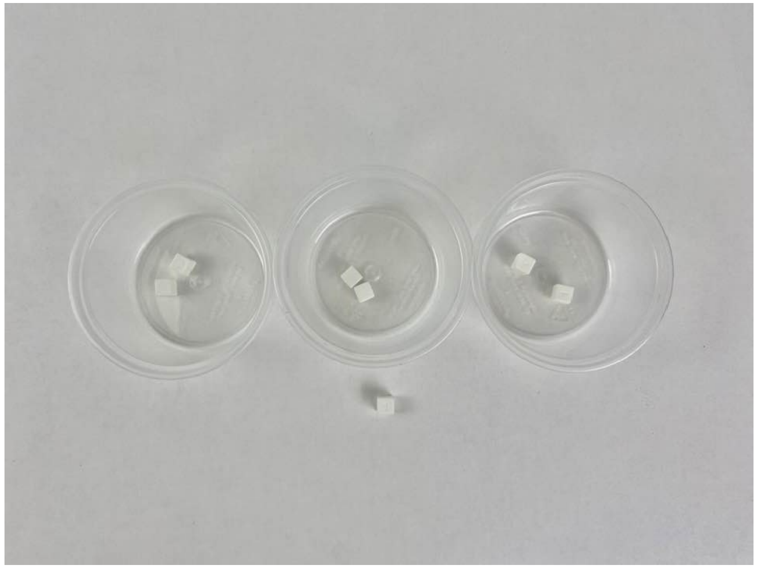
Debemos comenzar a trabajar este concepto como reparto en parte iguales. Lo importante aquí , es que los pequeños vivan la experiencia de repartir objetos concretos como las regletas . En la siguiente imagen se reparte 6 (total de los elementos) en tres vasos (cada vaso representa a un grupo), luego se observa cuántos cubos hay en cada vaso (la cantidad de elementos por grupo). En otra exploración se reparten estos 6 regletas pero en 2 vasos y se observa cuántos cubos hay en cada vaso. La estructura de la división : 6 :3 =2
Total de elementos : número de grupos = número de elementos por grupo.

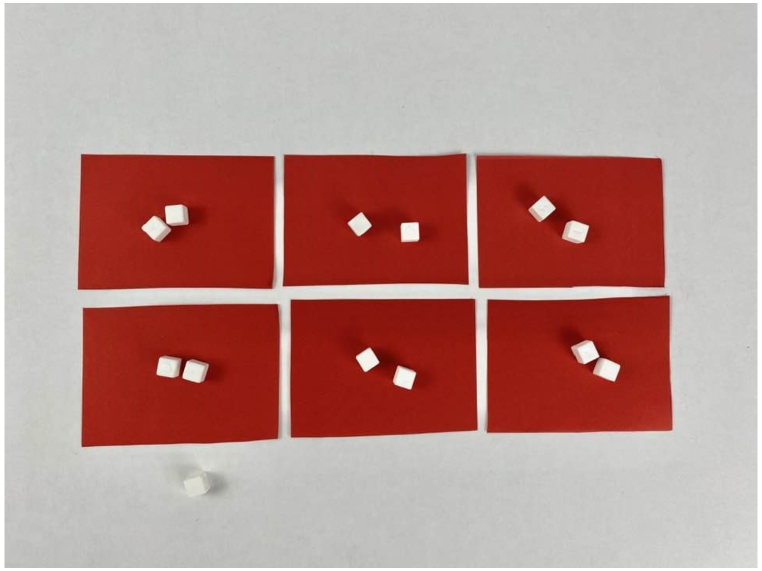




DIVISIÓN COMO REPARTO CON RESTO

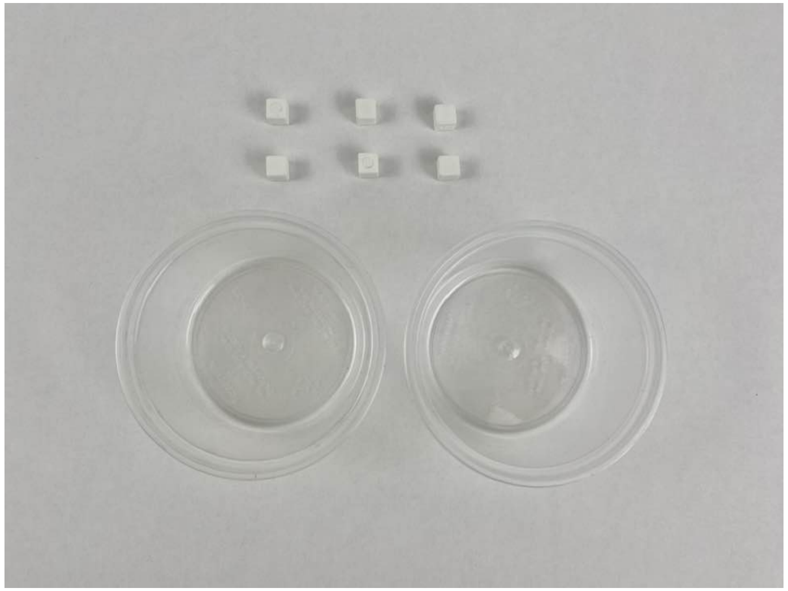
En las siguientes figuras podemos explorar las siguientes frases matemáticas :
7 : 3 = 2 con resto 1 y 13 : 6 = 2 con resto 1. Lo importante cuando realizamos la construcción de conceptos es que los estudiantes puedan comprender a qué nos referimos cuando decimos : total de elementos, número de grupos y total de elementos por grupo. Antes que los estudiantes aprendan el símbolo de la división deben haber explorado las distintas formas de relacionar los grupos y el total de elementos porque esa es la base para comprender la división. Cuando trabajamos este concepto utilizamos regletas, además para resaltar la idea de grupo podemos usar vasos u hojas cuadradas. El reparto se realiza de unidad en unidad hasta que se haya repartido todo. En este caso quedará siempre algún residuo y ellos tienen que verbalizar todos los elementos que intervienen: En la segunda imagen veo un total de 13 elementos, repartidos en 6 grupos, en cada grupo veo 2 elementos y queda uno restante sin poder repartirlo. Para las divisiones de 2 o más cifras el proceso es el mismo solo que intervienen las agrupaciones y descomposiciones en decenas y centenas.





DIVISIÓN POR REPARTO EQUITATIVO

La división es el proceso inverso a la multiplicación. Para explorar la noción de la división podemos abordarlo como un reparto equitativo o un agrupamiento. En esta primera parte abordaremos el reparto equitativo. Los materiales que vamos a utilizar son regletas y unas bandejas o platos como en la imagen A. Vamos a utilizar un protocolo de comunicación para referirnos a los grupos y acciones. En el ejemplo vemos a una cantidad a repartir que es el 6, al que llamaremos el todo. El todo lo vamos a repartir en dos grupos que son representados por los dos platos. Empezamos a repartir de forma equitativa, es decir, de uno en uno para cada grupo. En la imagen B observamos que se ha realizado el reparto equitativo y en cada grupo hay 3 elementos. A continuación preguntas para retroalimentar lo aprendido:



¿Cuál es el todo?

¿En cuántos grupos debemos repartir?

Luego de repartir ¿Cuántos elementos hay en cada grupo?

En este tipo de reparto conocemos desde el inicio el todo y los grupos, mas no el número de elementos por grupo.

DIVISIÓN POR REPARTO EQUITATIVO

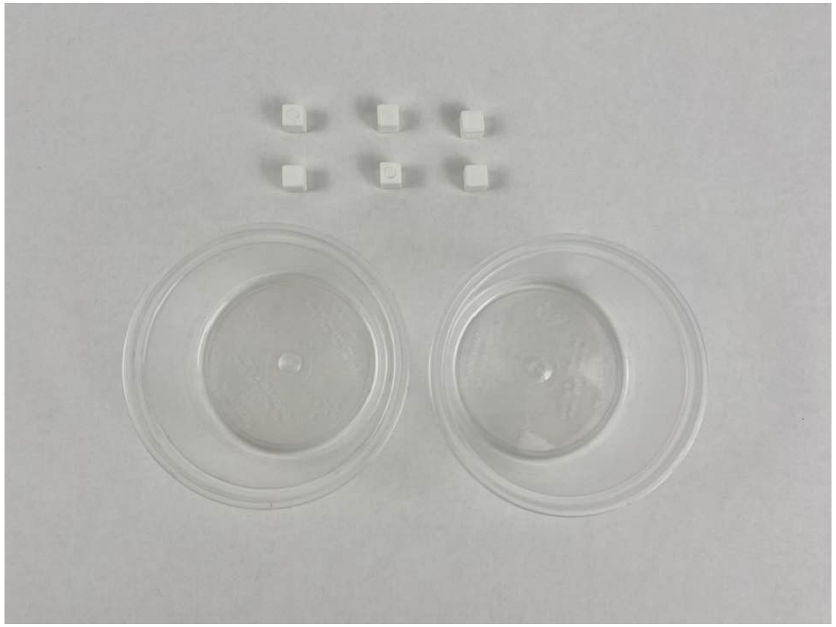
La división es el proceso inverso a la multiplicación. Para explorar la noción de la división podemos abordarlo como un reparto equitativo o un agrupamiento. En esta primera parte abordaremos el reparto equitativo. Los materiales que vamos a utilizar son regletas y unas bandejas o platos como en la imagen A. En esta actividad observamos que el todo es 6 y se va a repartir en 3 grupos que son representados por los platos. Luego de realizar de repartir en los grupos observamos que en cada grupo hay 2 elementos.

Todo:6

Número de grupos: 3

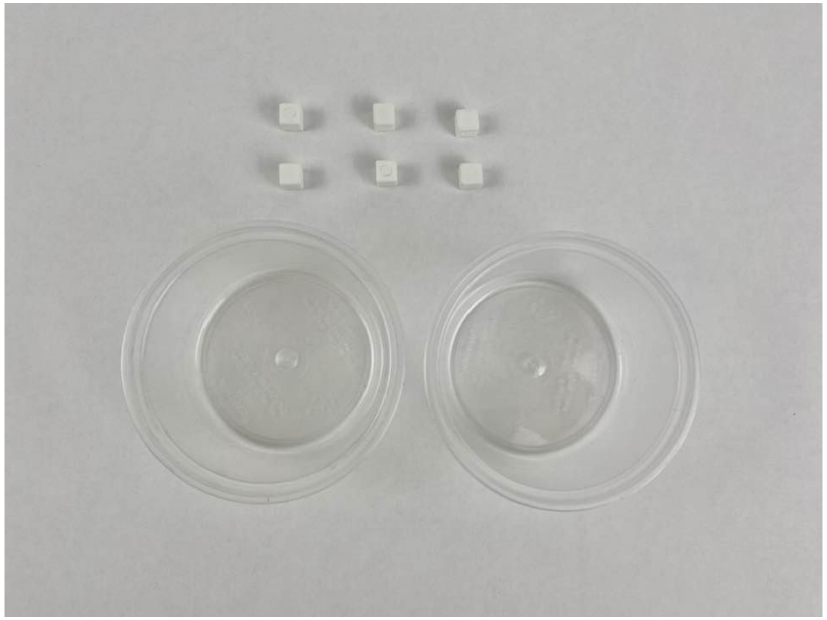
Número de elementos por grupo: ?

En el enfoque CPA pasamos de la representación con material concreto a la representación gráfica, para finalmente representar la frase matemática 6÷3=2.



DIVISIÓN POR REPARTO EQUITATIVO

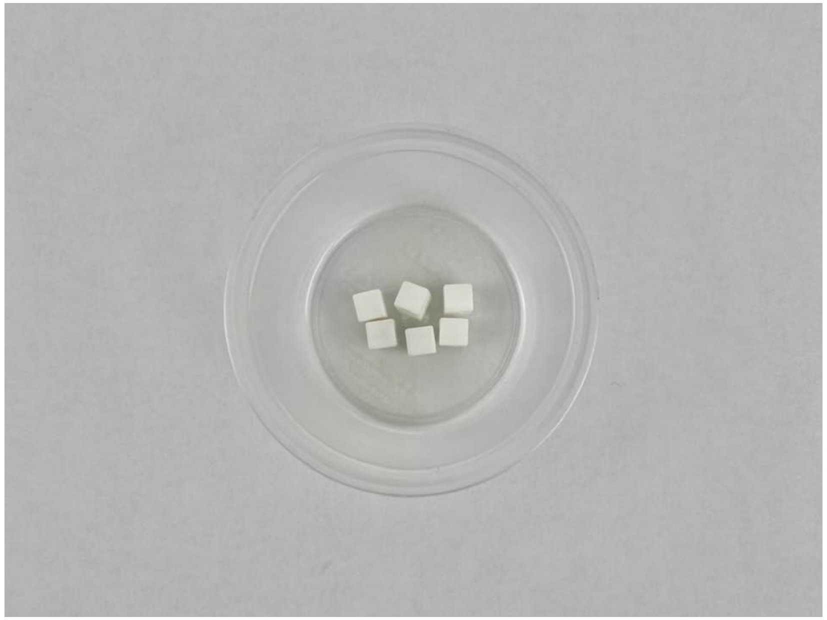
La división es el proceso inverso a la multiplicación. Para explorar la noción de la división podemos abordarlo como un reparto equitativo o un agrupamiento. En esta primera parte abordaremos el reparto equitativo. Los materiales que vamos a utilizar son regletas y unas bandejas o platos como en la imagen A. En esta actividad observamos que el todo es 6 y se va a repartir en 1 grupo que es representado por un plato. Luego de repartir, en el grupo hay 6 elementos.



Todo:6

Número de grupos: 1

Número de elementos por grupo: ?



En el enfoque CPA pasamos de la representación con material concreto a la representación gráfica, para finalmente representar la frase matemática 6÷1=6.

Como podemos observar una misma cantidad, el todo, puede ser repartido en diferentes grupos y la cantidad de elementos cambiará en función de los grupos a repartir. Esta es la relación que tienen que aprender los niños en la división: la relación que hay entre el todo, los grupos y los elementos por grupo. Luego se puede formalizar y hablar de dividendo, divisor, cociente y resto.

DIVISIÓN POR REPARTO EQUITATIVO CON RESTO

Ahora que aprendimos sobre la noción de división como reparto equitativo, vamos a explorar el siguiente reparto en la imagen A:

Todo: 7

Grupo : 2

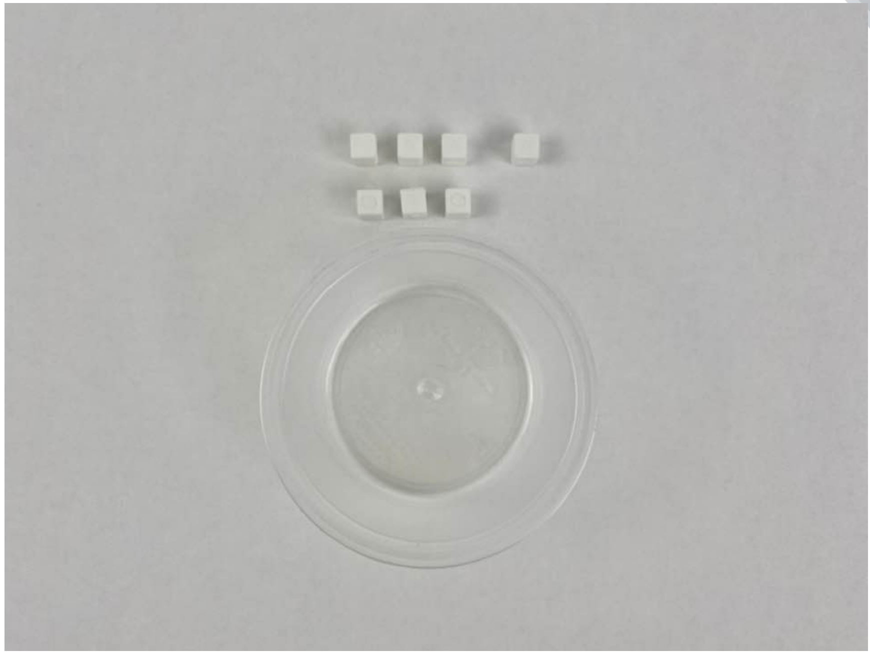
Elementos por grupo: ?

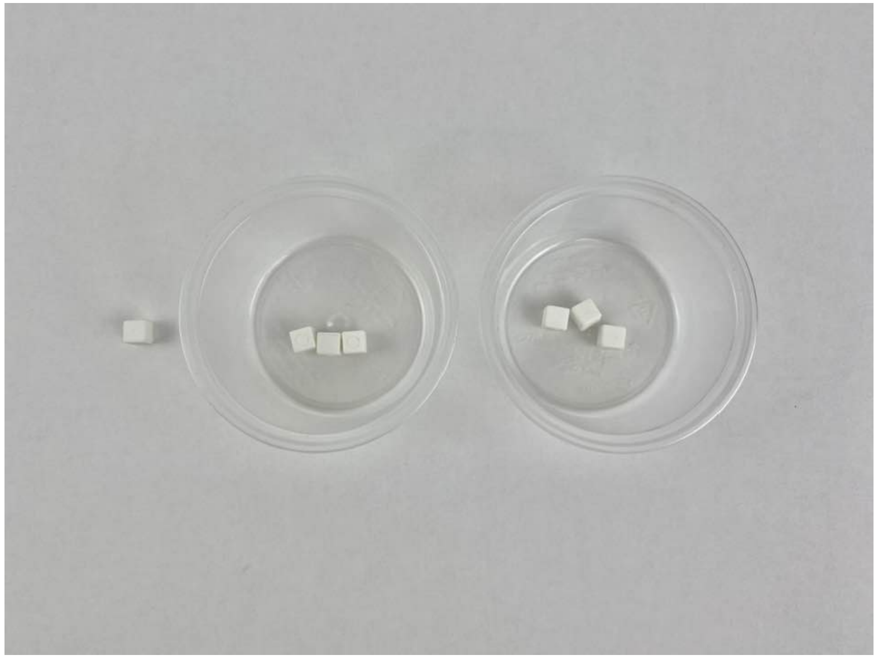
Para ello repartimos el todo, observamos que al repartir equitativamente nos queda 3 elementos por cada grupo. Pero nos ha quedado 1 elemento, regletas, sin repartir, porque en la noción de reparto equitativo solo puedo repartir un elemento a un grupo, si le puedo repartir un elemento también para el otro grupo.

Entonces estamos hablando de un reparto equitativo con resto, porque hay una cantidad que no podemos repartir matemáticamente en los números naturales.

Le llamamos resto o residuo a esa cantidad.

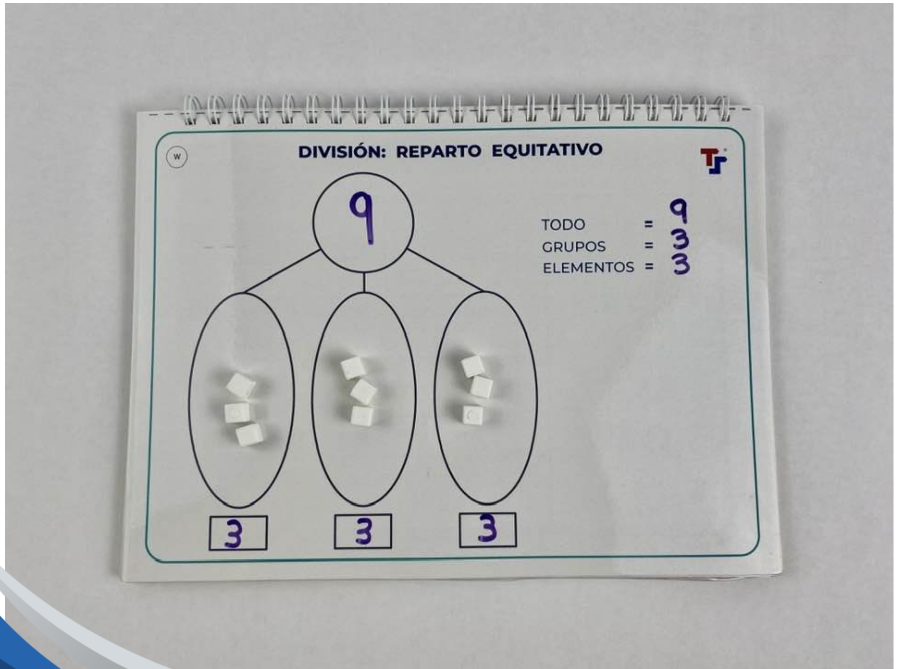
Formalmente representamos: $7 \div 2 = 3$ y $r = 1$





DIVISIÓN POR REPARTO EQUITATIVO

Utilizando los metaplanos podemos representar de forma concreta, pictórica y simbólica el reparto. En la imagen A, se observa que el todo, 6, se representa como símbolo y que los elementos a repartir como material concreto. Esto es posible, a medida que lo niños han demostrado que comprenden la relación entre el todo, los grupos y elementos por grupo. Podemos también repartir cantidades que puedan tener un resto.



DIVISIÓN POR AGRUPAMIENTO

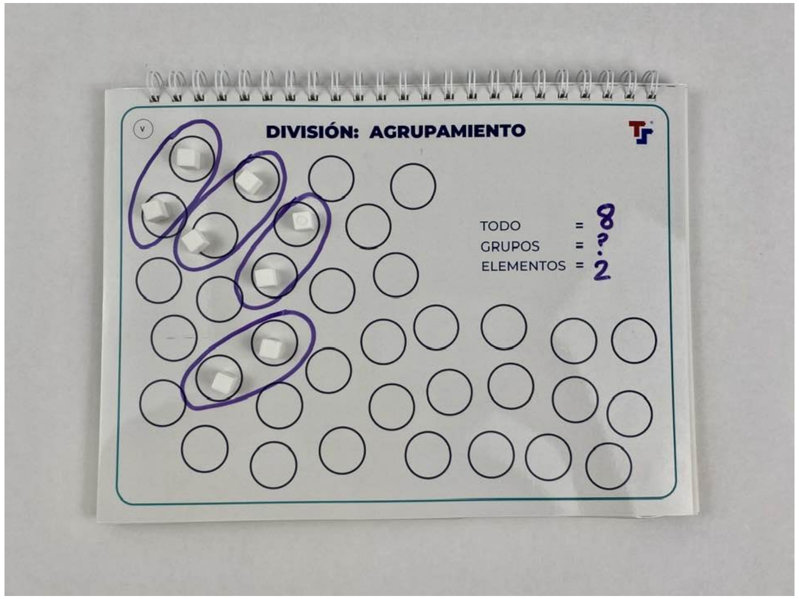
La noción de la división como agrupamiento es muy fácil de comprender, cuando se ha trabajado antes el reparto equitativo. En el siguiente reto: “Juan tiene 6 manzanas y las debe guardar de dos en dos en cajas ¿Cuántas cajas necesitará?”

Todo: 6

Grupos: ?

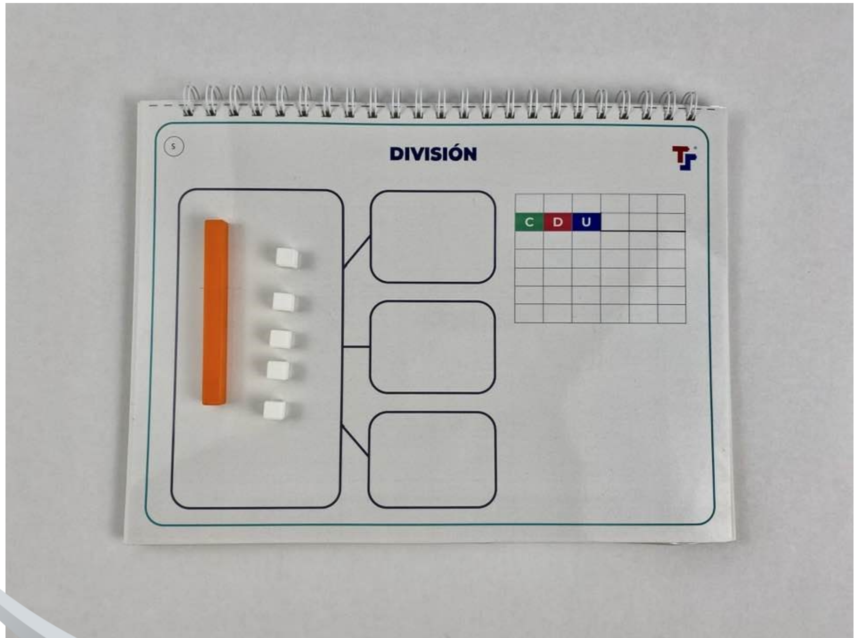
Elementos por grupo: 2

Como se observa. Aquí en este reto tenemos la información sobre el todo y los elementos, mas no del número de grupos que será lo que debamos calcular.



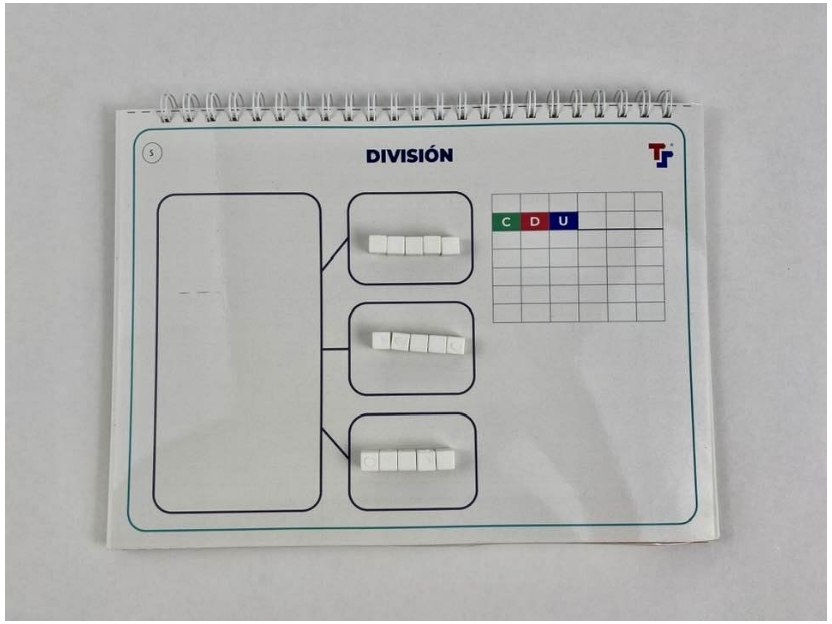
DIVISIÓN DE DOS CIFRAS SIN RESTO

En la imagen A, encontramos la siguiente operación 15÷3= , se representa el todo, como una decena con 5 unidades, la que debemos repartir en 3 grupos. En el metaplano a utilizar, encontramos un esquema para representar con las regletas y un esquema para representar con los símbolos. Lo que se recomienda es primero explorar solo con el esquema de materiales y repartir y luego que se haya comprendido este proceso, asociar lo que se representa con materiales con el proceso simbólico.



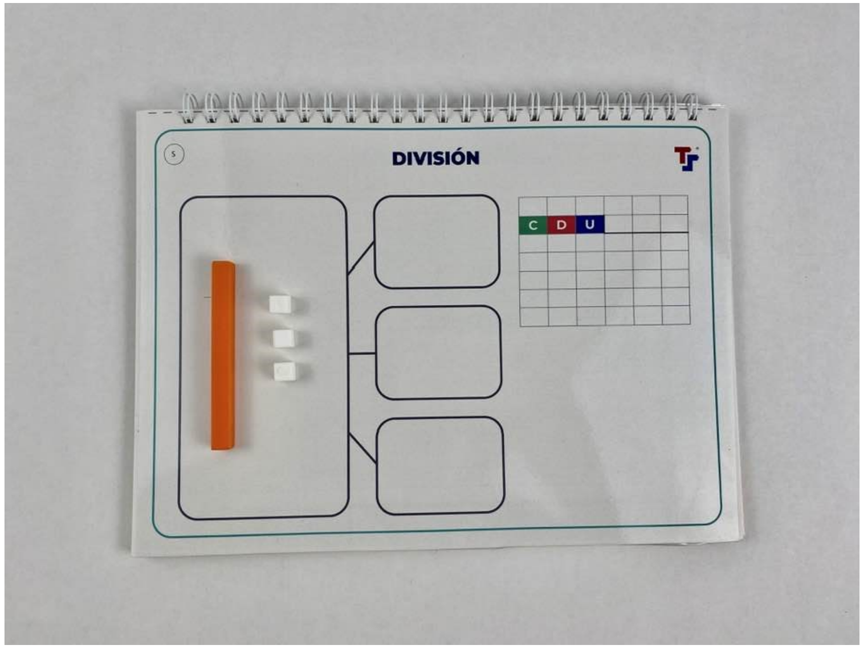
DIVISIÓN DE DOS CIFRAS SIN RESTO

Es importante en cada proceso de exploración con los materiales explicar cada acción realizada. Por ejemplo: cuando se va a repartir 15÷3= , preguntar ¿Cómo vamos a repartir el 15?¿Repartimos primero unidades o las decenas?. Como no se pueden repartir las decenas, porque solo hay una para ser repartida en 3 grupos. Procedemos a reagruparlas, de tal manera que tengamos 15 unidades que repartir. En la imagen B, observamos que luego del reparto equitativo, cada grupo tiene 5 unidades. Podemos volver a realizar la acción de repartir, pero esta vez a cada acción le corresponde una representación en el tablero de los símbolos.



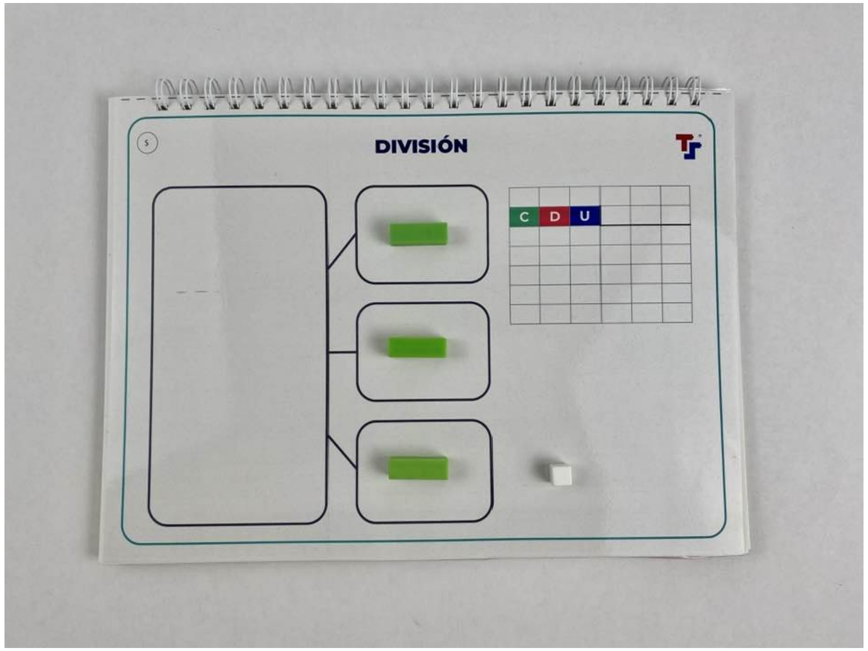
DIVISIÓN DE DOS CIFRAS CON RESTO

Se presenta el siguiente reto 13÷3 = , representamos con material concreto y lo tenemos que repartir en 3 grupos. Realizamos la reagrupación de las decenas en unidades y repartimos las 13 unidades. Luego, observamos que nos ha quedado un elemento, regleta, sin repartir. Es una división con resto. Recordemos que estuvimos utilizando el lenguaje protocolar: el todo, los grupos y los elementos por grupos. Ahora podemos volver a rotular los conceptos como dividendo, divisor, cociente y resto.



DIVISIÓN DE DOS CIFRAS CON RESTO

Como vemos, las regletas representan las cantidades con un solo color y cumpliendo la función de material concreto. Solo es posible la comprensión de esta división de 2 cifras si se ha consolidado el concepto de decena, ya que en adelante podemos también utilizar este esquema para realizar divisiones de números de dos cifras hasta el 99. Por lo que podemos estar repartiendo también decenas tanto como unidades en cada grupo.



DIVIDIR UN NÚMERO DE TRES CIFRAS CON RESTO

En la siguiente actividad se muestra el reto 145 ÷ 3 =, donde se utilizan las fichas numéricas para operar, dentro del programa de regletas Cuisenaire. En la figura 1, se representa 145, las fichas naranja y amarillo coinciden con el código de colores de las regletas. Esta cantidad las repartiremos en 3 grupos, como se muestra en el metaplano. En la figura 2, como no se puede repartir una unidad de centena en tres grupos, se reagrupa como 10 decenas a las que le agregamos las otras 4 decenas que había, es decir, tenemos 14 decenas que repartir en 3 grupos. En la figura 3, se ha repartido las decenas; y quedan 2 decenas sin repartir y 5 unidades.

En la figura 4, tenemos 25 unidades por repartir, representadas por 5 fichas amarillas. En la figura 5, repartimos y nos quedan 10 unidades por repartir.

En la figura 6, se reparte las unidades en cada grupo, quedándonos solo una unidad sin repartir que es el residuo o resto.

Figura 1

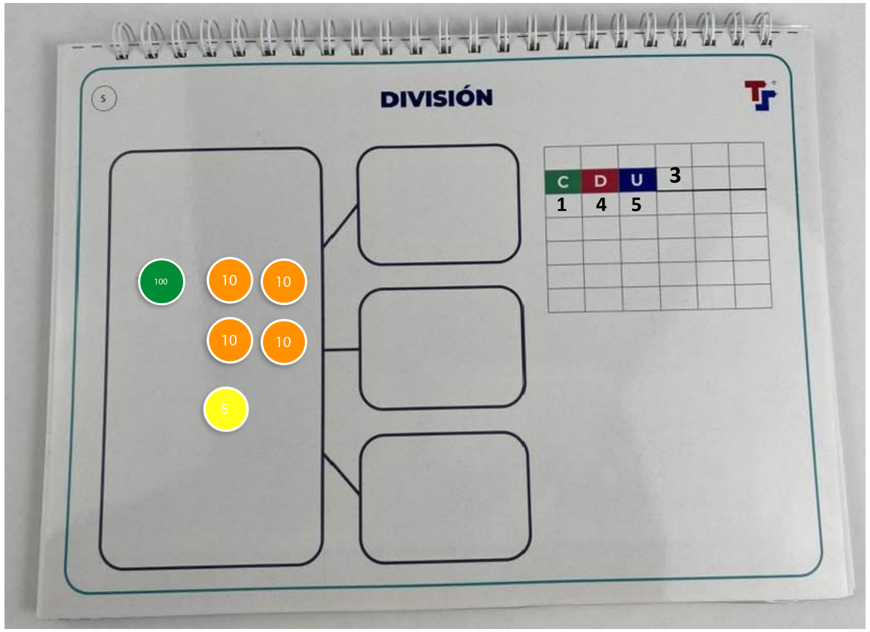


Figura 2

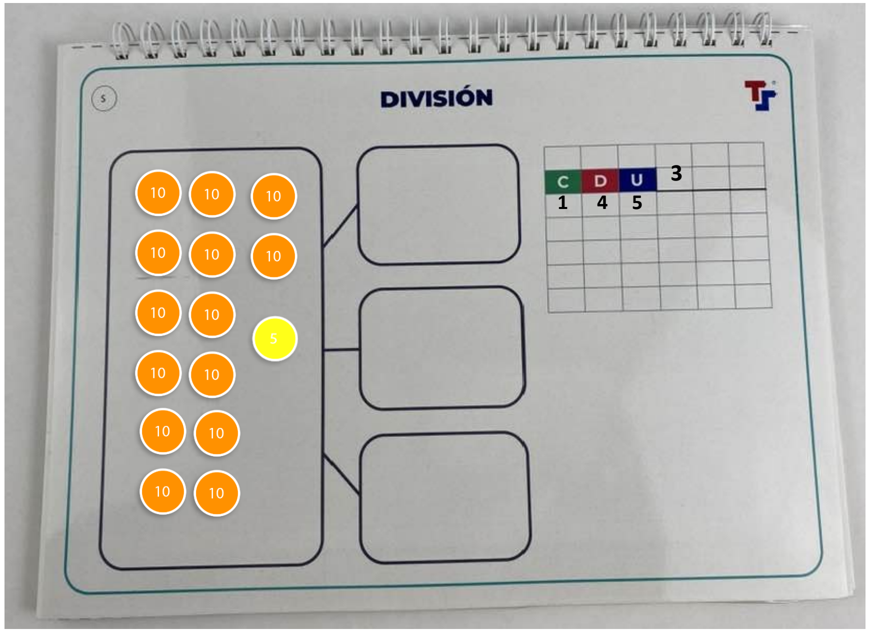


Figura 3

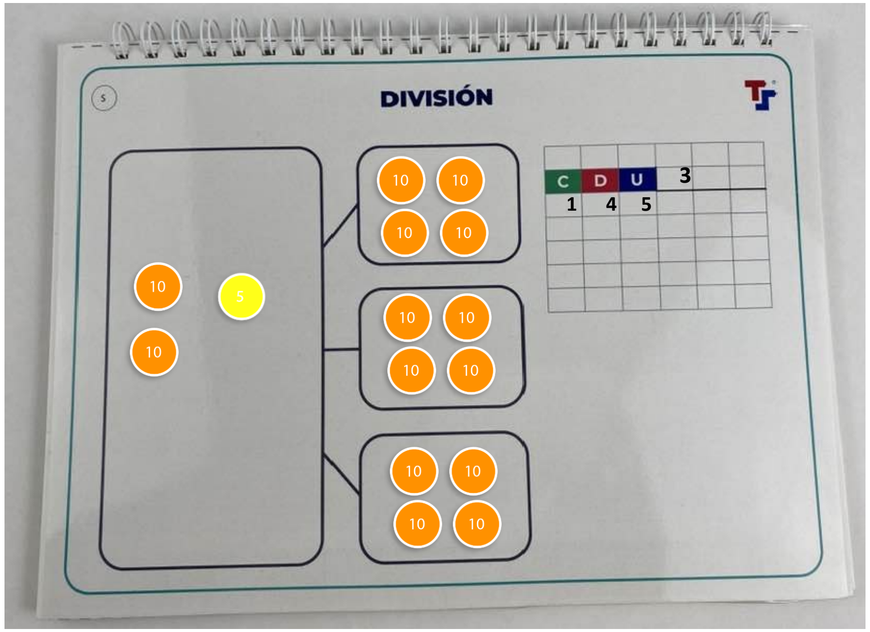


Figura 5

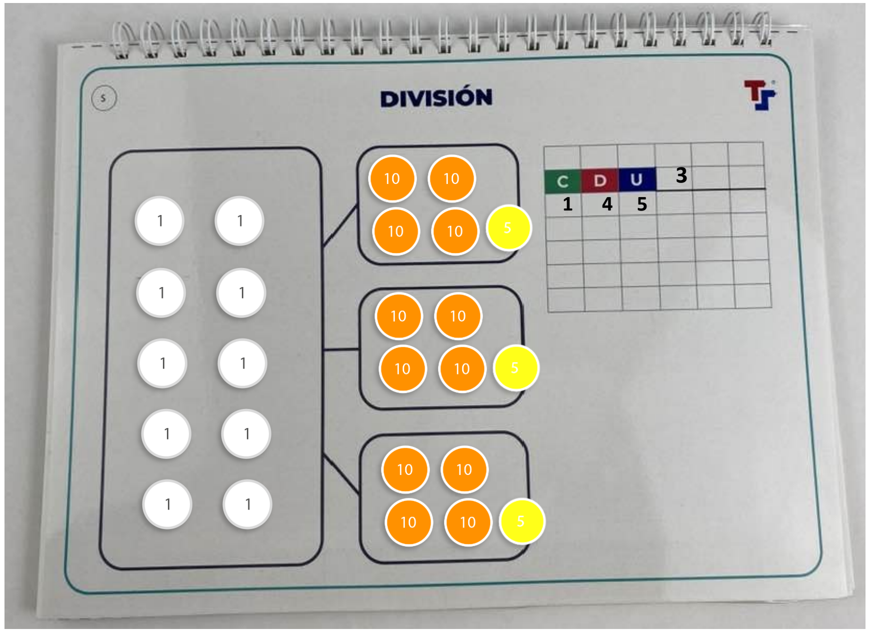


Figura 4

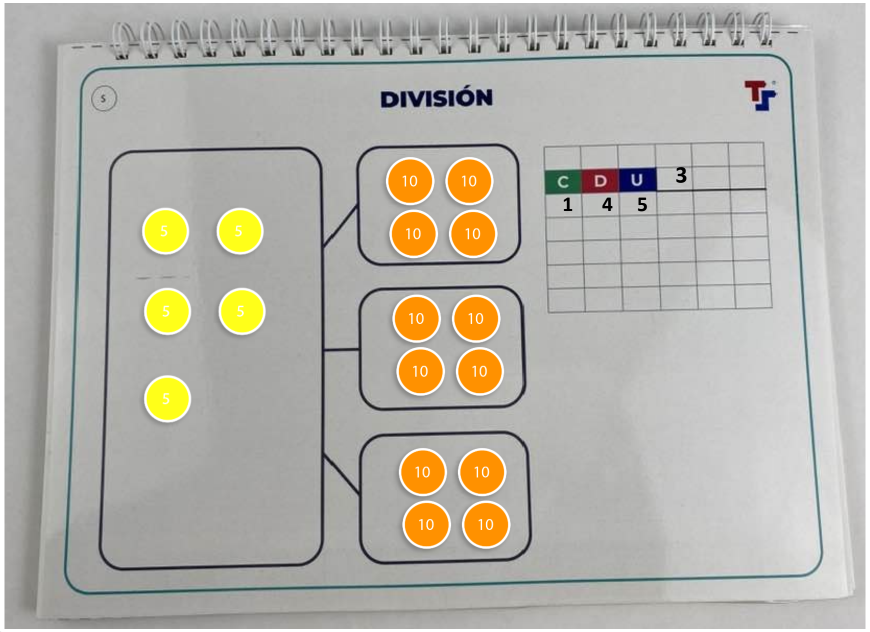
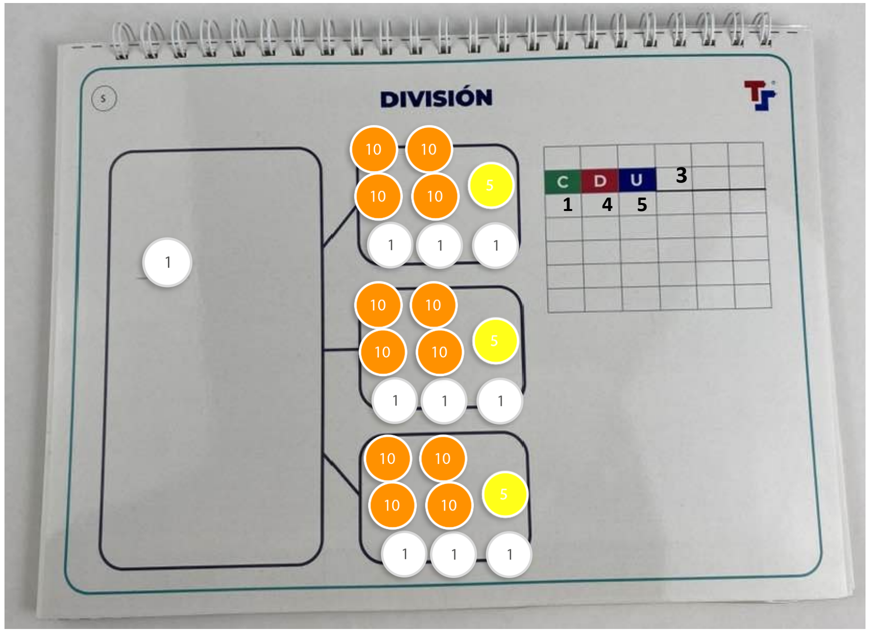
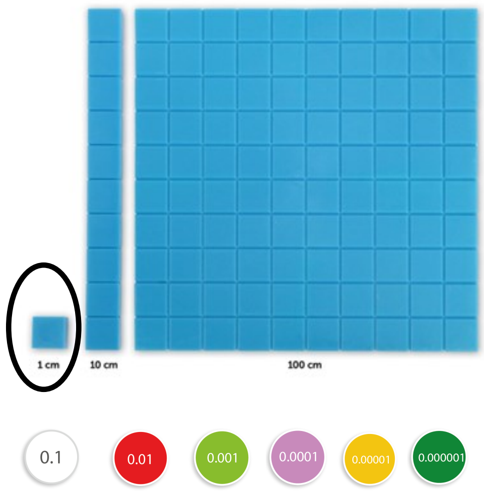


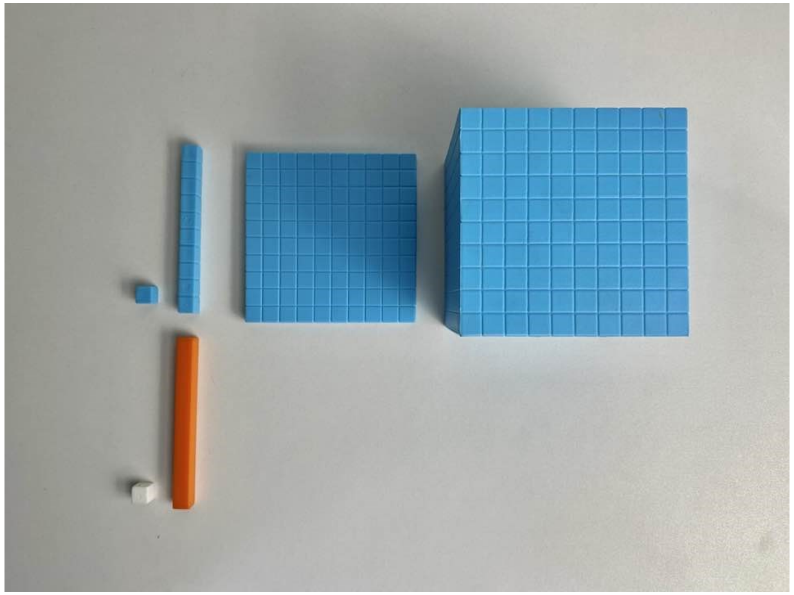
Figura 6



FRACCIONES

Las regletas Cuisenaire, por sus cualidades, nos permiten explorar los números Racionales: las fracciones y decimales, a partir de las relaciones y referentes que utilicemos como entero y sus partes. En esa misma línea, se sugiere agregar un bloque del mismo tamaño del bloque blanco que representa la unidad en las regletas Cuisenaire, como en la imagen 1, donde se agrega un bloque del mismo tamaño y dimensiones, pero en color celeste. Esto potencia, como veremos más adelante su uso para diferentes modelos y relaciones matemáticas en los números Racionales, como lo veremos a continuación. También el útil su complemento con las fichas circulares de decimales. Estas tienen por objetivo la consolidación y ser material de apoyo en la exploración matemática y como comunican los niños su descubrimiento.

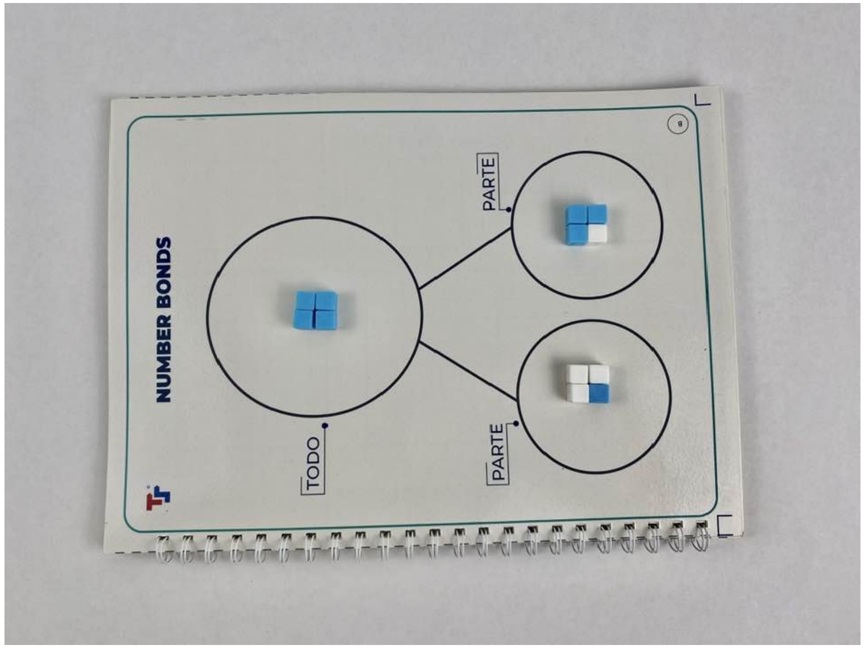


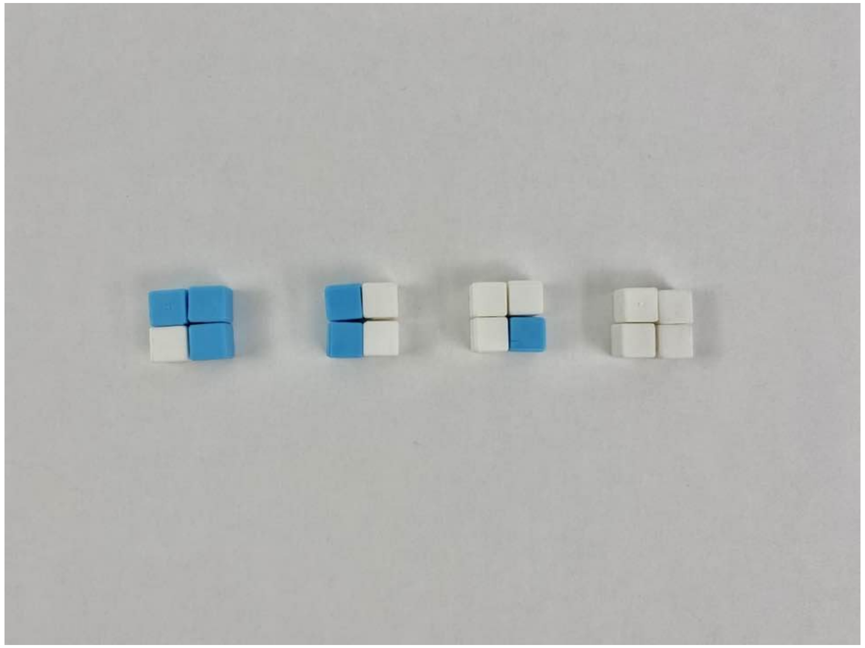


FRACCIONES

Las fracciones rompen aparentemente con todo lo que conocíamos sobre los números naturales: Si habíamos aprendido que el 6 es mayor que el 5, cuando vemos en las fracciones que mientras mayor es el denominador, mayor es el número y viceversa. Cuando multiplicamos las fracciones se convierten en números más pequeños y cuando las dividimos se convierten en números más grandes. Los niños que no llegan a comprender el concepto de fracción es porque no han construido o han tenido problemas para construir el concepto del número.

Esto es porque las mismas leyes que rigen para los naturales no necesariamente rigen para los racionales (fracciones) ya que muchos de los sucesos que estudiaremos ocurren dentro de la unidad. Los policubos ofrecen una hermosa experiencia para trabajar las fracciones. Observen en la primera figura como todo lo que hemos aprendido en el diagrama de círculo y sus relaciones del todo y sus partes nos ayudarán a construir el concepto de fracción. En la siguiente figura el cuadrado formado por los colores azul y amarillo representan : 1/4 , 2/4, 3/4, 4/4 respectivamente.

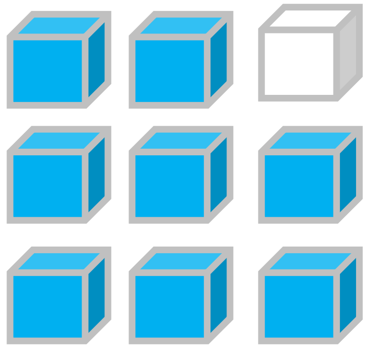




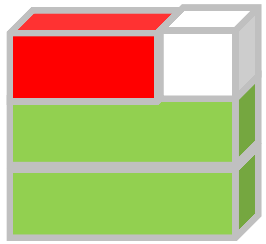
FRACCIONES

Para comprender el concepto de fracción debemos observar el todo y ver en cuántas partes de igual medida está constituido. En la primera figura por ejemplo podemos observar que una barra está dividida en ocho partes de igual medida. Si pintamos de celeste representan tres partes de ocho partes de igual medida; si pintamos las amarillas representan cuatro partes de ocho partes de igual medida. Ahora bien, si sumamos todas las partes tenemos ocho partes de ocho partes de igual medida que es el entero o la unidad. Luego de utilizar ese lenguaje sencillo para rotular los procesos matemáticos daremos el salto a términos como 3 / 8 para representar las tres partes de ocho de igual medida y así sucesivamente. Utilizando regletas podemos construir y realizar operaciones con fracciones homogéneas, heterogéneas, propias, impropias.

$$\frac{3}{8} + \boxed{} = \frac{7}{8}$$



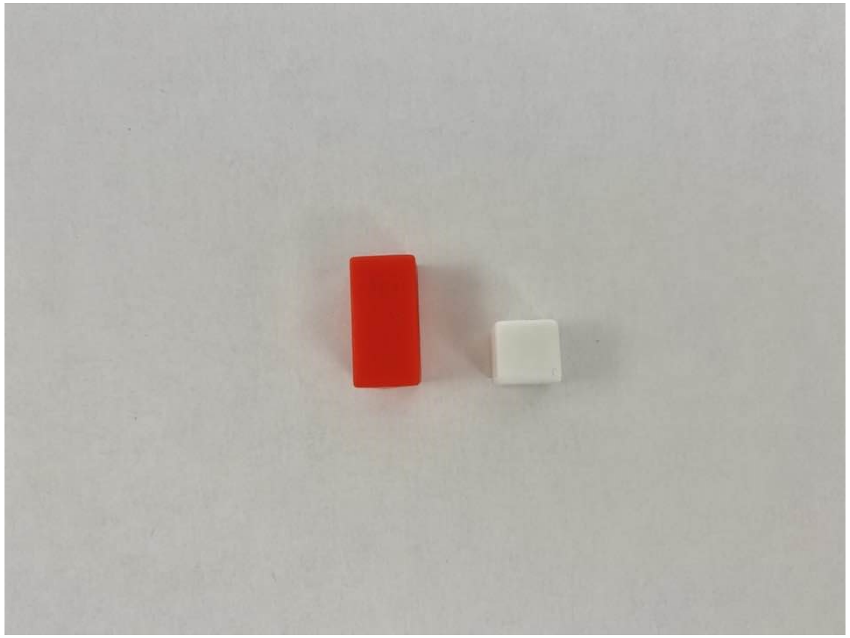
1 / 9

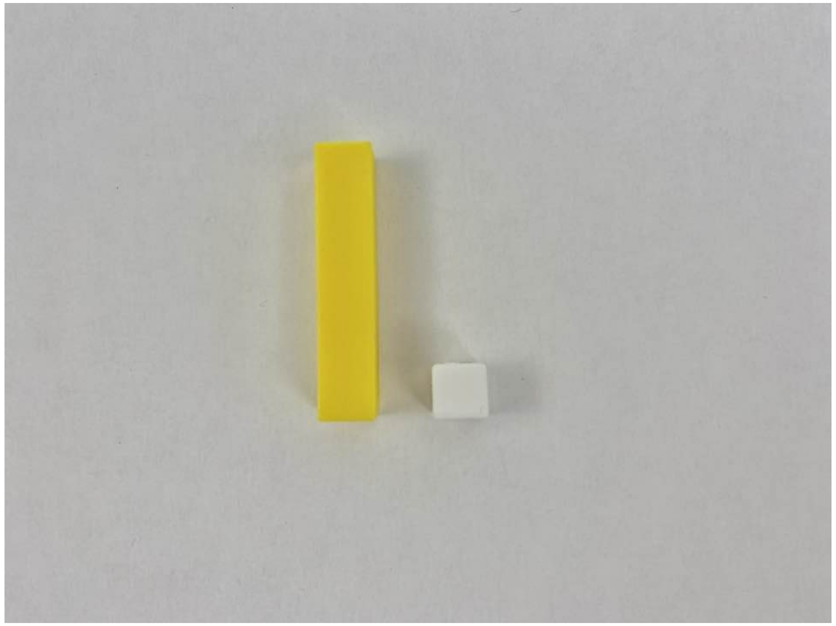


1 / 9

REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

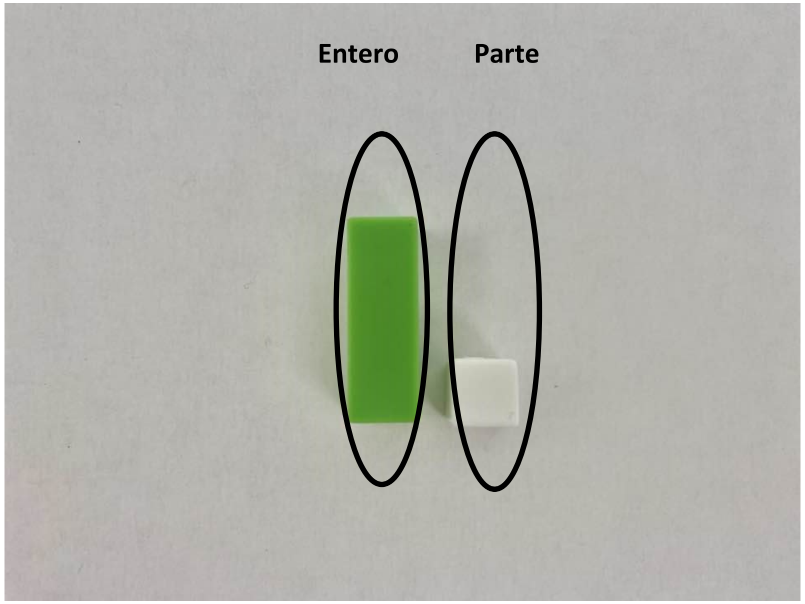
Las relaciones y patrones matemáticos que hemos encontrado para la construcción del concepto del número, el sistema numérico decimal, las cuatro operaciones han operado sobre un conjunto de números que son los números naturales. En adelante, exploraremos otro tipo de conjunto donde también encontraremos patrones y relaciones matemáticas, este conjunto de números se llaman los números Racionales, que incluyen a las fracciones y decimales. Construir la noción de una fracción es posible con el uso de regletas y un adecuado protocolo de comunicación, tanto de frases como de preguntas que aprenderemos en esta sección. En adelante nuestro análisis de los materiales será desde el enfoque de los Racionales. En la imagen A, observamos una torre azul. Si viéramos esta misma imagen desde el enfoque de los números Naturales diríamos que vemos 2 unidades. En los Racionales vemos una torre azul que está compuesta por 2 partes de igual medida. A la torre azul le podemos llamar también el todo, el entero o la unidad. Si analizamos una parte de la torre y queremos explicar su relación con el entero decimos: es una parte de un entero compuesto por dos partes iguales. Ahora observa la torre roja e intenta establecer la relación entre el entero y sus partes.



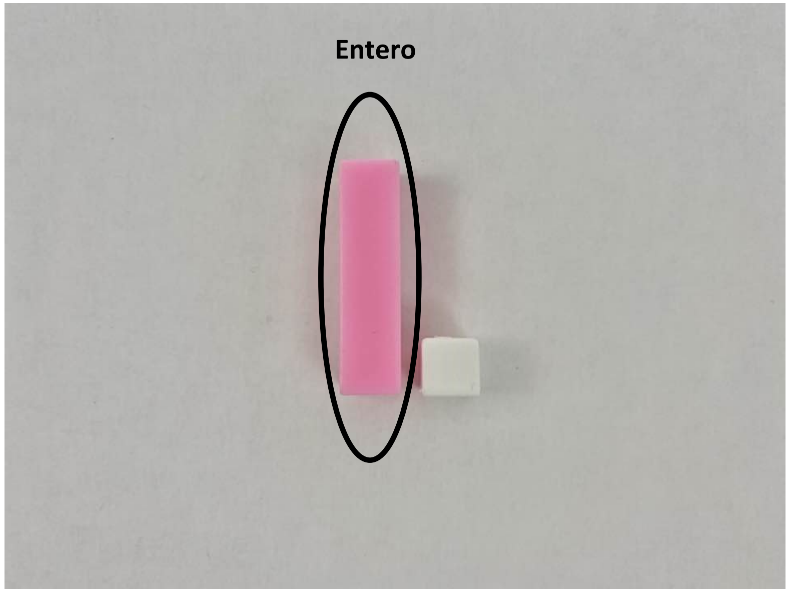


REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, observamos el entero o unidad que es la torre roja. Siendo esta la unidad, vamos a establecer una relación entre el entero y una de sus partes. El entero está compuesto por 3 partes de igual medida. En ese sentido, una regleta blanca representa 1 parte del entero. Podemos decir que la regleta blanca es 1 de 3 o 1/3. De esta manera una regleta blanca nos representa 1/3, dos regletas blancas 2/3, 3 regletas blancas o una verde claro 3/3 o un entero.



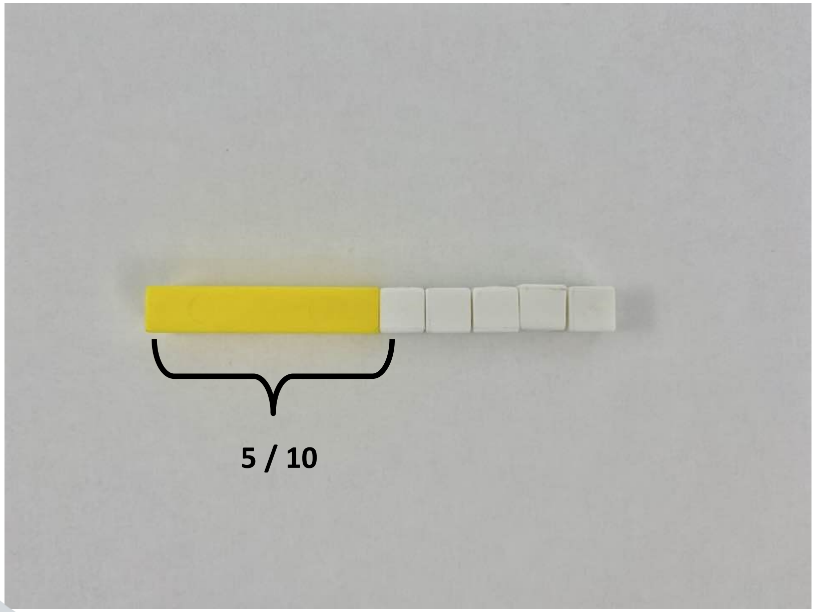
En la imagen B, se observa un entero que es representado por una torre azul. Este entero está compuesto por cuatro partes de igual medida. Entonces, vamos a establecer una relación entre el entero y una regleta blanca. Una regleta blanca representa 1 parte de un entero compuesto por cuatro partes iguales. Podemos decir también que una regleta blanca es 1 de 4 o 1/4, dos regletas blancas son 2/4, tres regletas blancas son 3/4, cuatro regletas blancas o una regleta rosada son 4/4 o un entero.



Como vemos las regletas siguen siendo los mismos materiales, sin embargo, adquirirán un valor diferente, respecto al entero que representan.

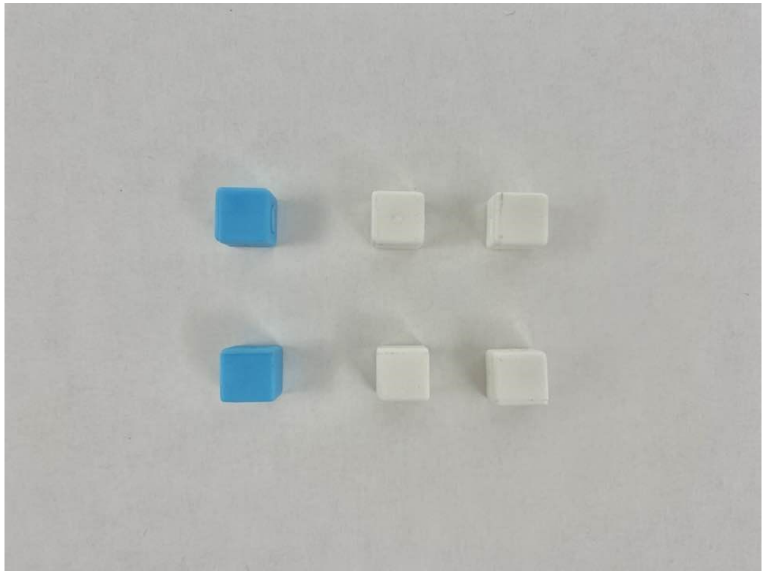
REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, observamos un entero, representado por el tren de regletas. El entero está compuesto por diez formada por regletas blancas y celestes, pueden ser reemplazadas también por una regleta verde oscura y rosada. Cada unidad es 1 de 10 0 1/10 (un décimo). Observamos las relaciones de las partes, respecto al todo. La regleta verde oscura representa 4/10, mientras que la rosada 6/10.



REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

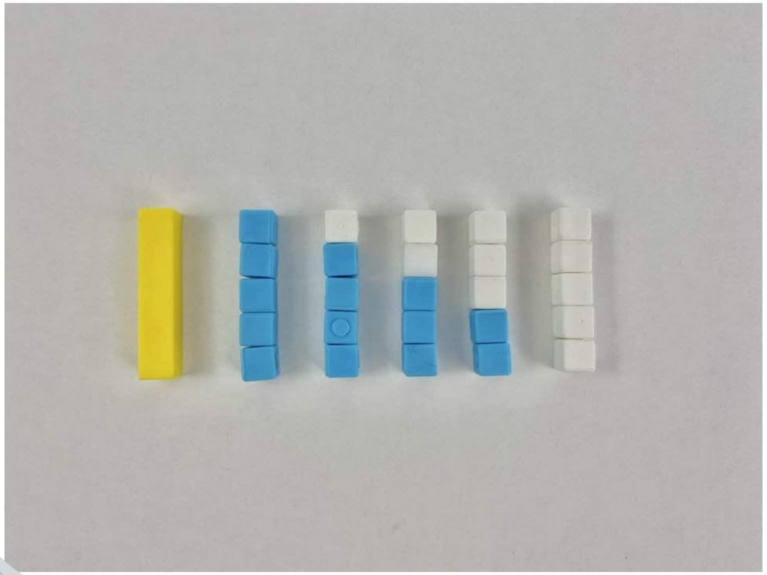
En la imagen B, observamos un grupo de 6 regletas o 6 unidades o 6 enteros. El grupo está compuesto por regletas blancas y celestes. Expresamos como fracción, lo que representan los cubos rojos respecto al total. Las regletas blancas son 2 de 6 0 2/6. En este ejemplo, utilizamos las regletas como material discontinuo. Si queremos representar las regletas celestes con respecto al total del grupo, estos son 4 de 6 o 4/6. En este tipo de construcciones exploramos la fracción de un número como lo veremos más adelante con mayor detalle.



COMPARACIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, observamos 5 torres. Cada torre representa a un entero; y cada entero está compuesto por 5 partes de igual medida. Representaremos el entero con la regleta roja. Primera torre 5 de 5 o 5/5, segunda torre 4 de 5 o 4/5, tercera torre 3 de 5 o 3/5, cuarta torre 2 de 5 o 2/5, quinta torre 1 de 5 o 1/5. Esta representación nos permite comparar y observar la siguiente relación:

5/5 > 4/5 > 3/5 > 2/5 > 1/5



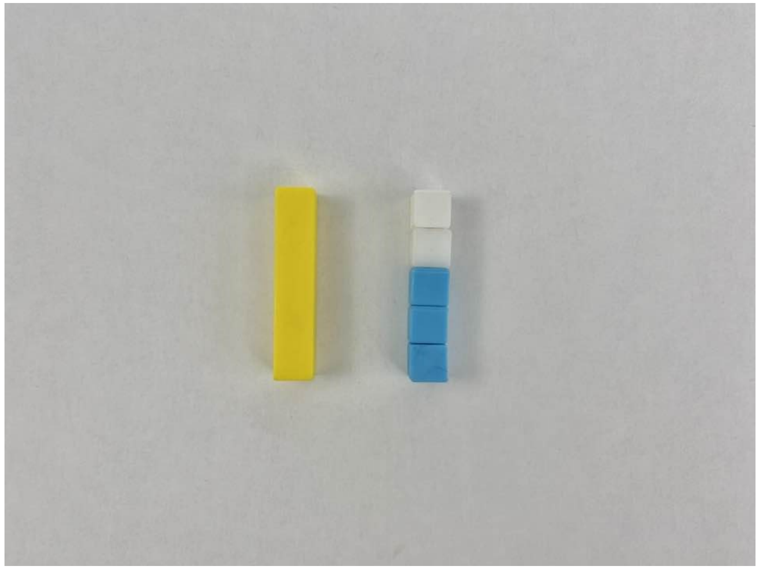
COMPARANDO FRACCIONES

En la imagen observamos dos torres. Cada torre representa a un entero; y cada entero está compuesto por 5 partes de igual medida. Representando el valor de cada regleta blanca en cada entero tenemos:

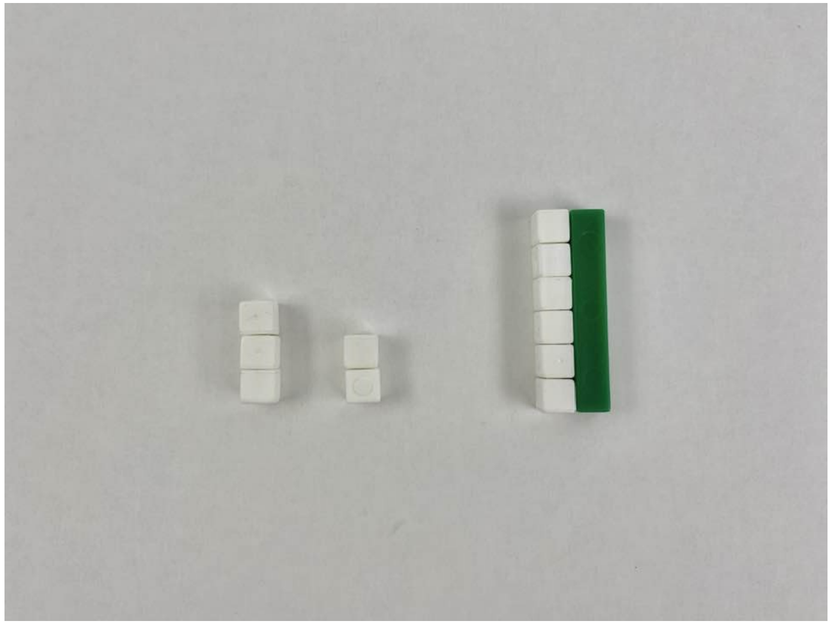
Primera torre: 5/5

Segunda torre 3/5

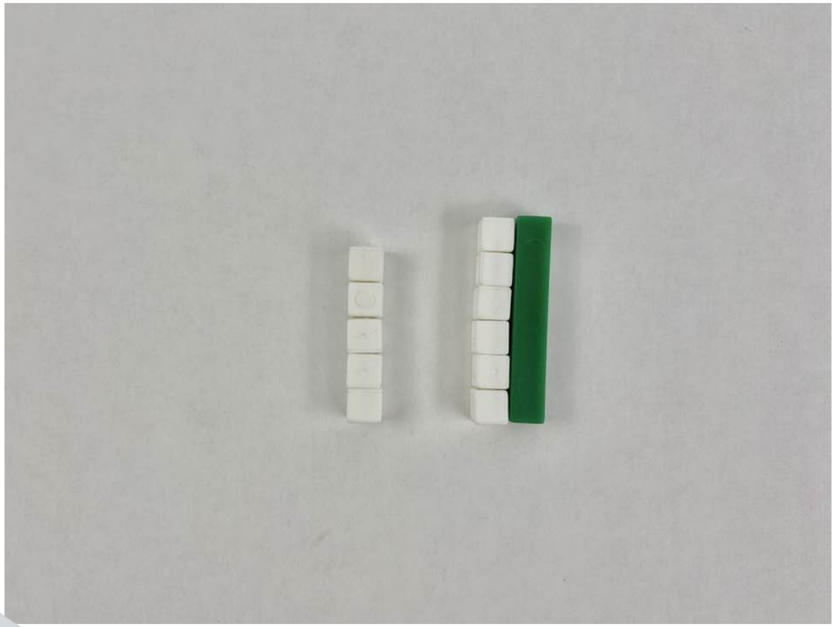
Observamos que podemos comparar cada torre , siempre y cuando ambos representen al mismo entero.

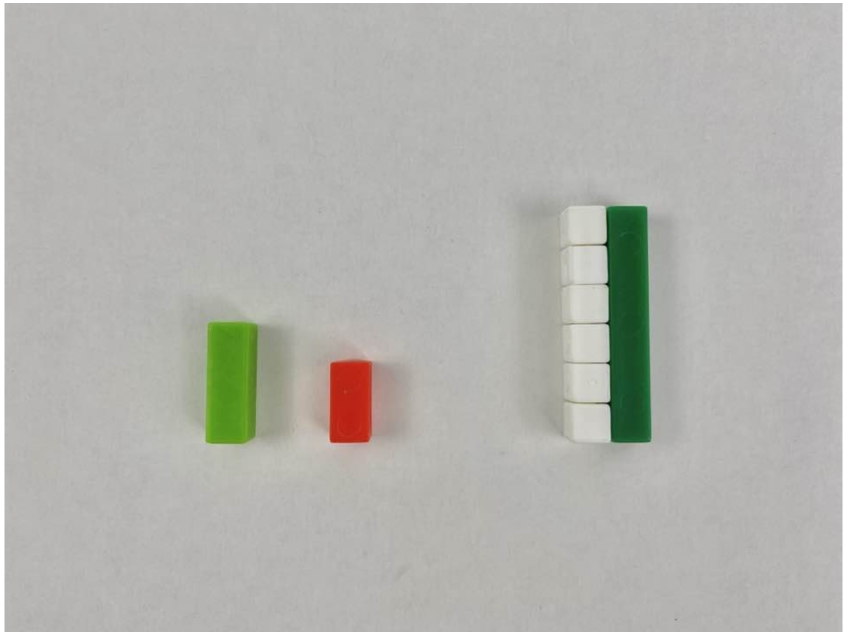


ADICIÓN DE FRACCIONES



En la imagen A, tomando como referencia al entero de la figura, observamos que este está compuesto por 6 partes de igual medida y que cada parte representa 1/6. Entonces representamos la siguiente operación: 3/6 + 2/6 = , los 3/6 se pueden representar con 3 tres regletas blancas y los 2/6 con 2 regletas blancas, sumamos ambos y tenemos 5/6. Estamos realizando una adición de fracciones homogéneas, ya que ambas tienen el mismo numerador. Con este criterio podemos representar muchas adiciones de fracciones homogéneas.





SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

En la imagen B, observamos la siguiente operación: 5/7-3/7= , lo representamos con las regletas considerando los siguientes procedimientos:

Vamos a representar primero el entero, este está compuesto por siete partes de igual medida.

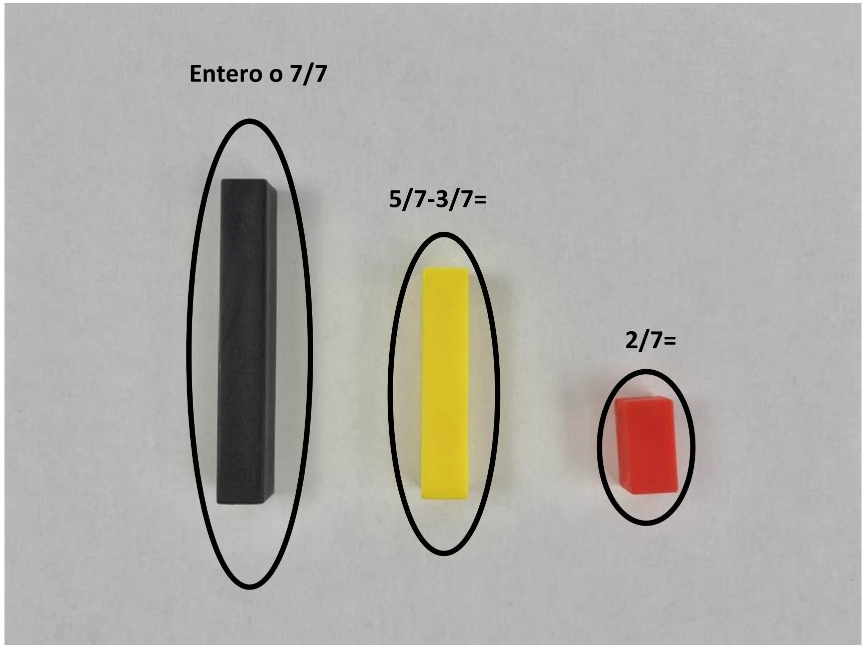
Podemos representarlo como una torre de siete. En este sentido cada regleta nos representa 1 de 7 o 1/7.

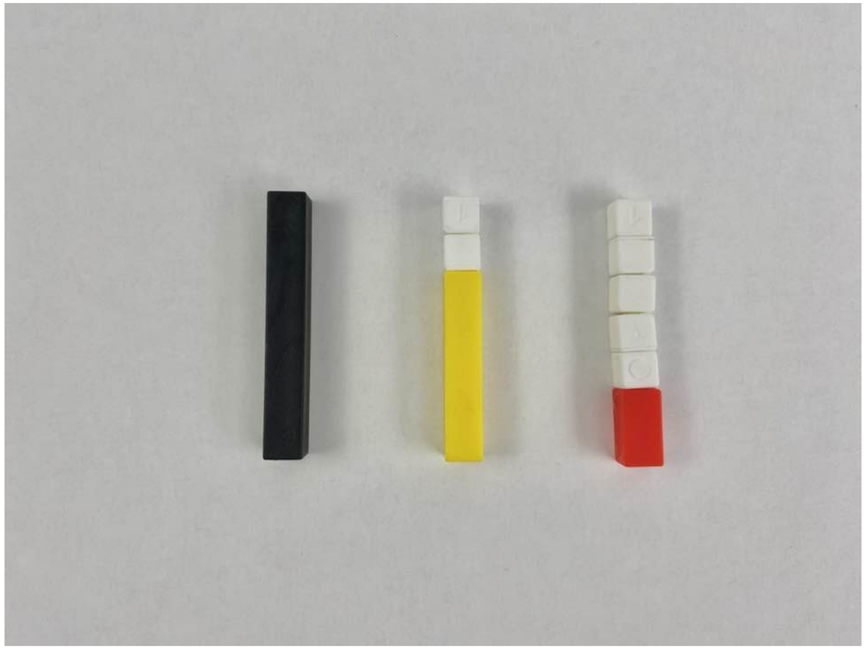
Representamos los 5/7 como 5 regletas.

Le quitamos a los 5/7 los 3/7, es decir, tres regletas.

Nos queda dos regletas que son 2/7.

.

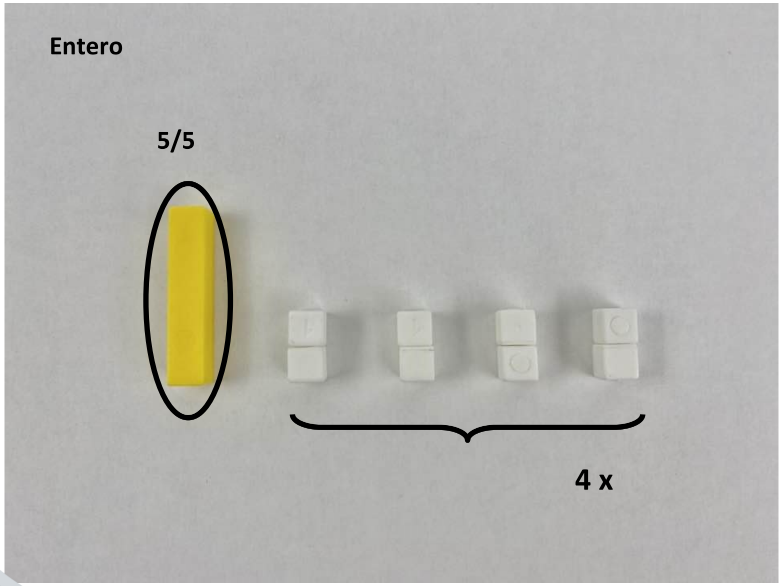


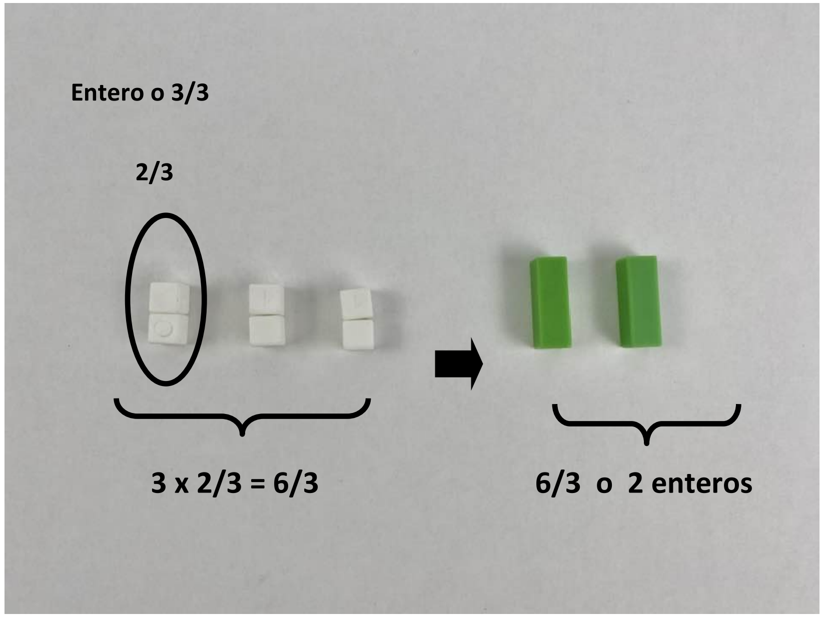


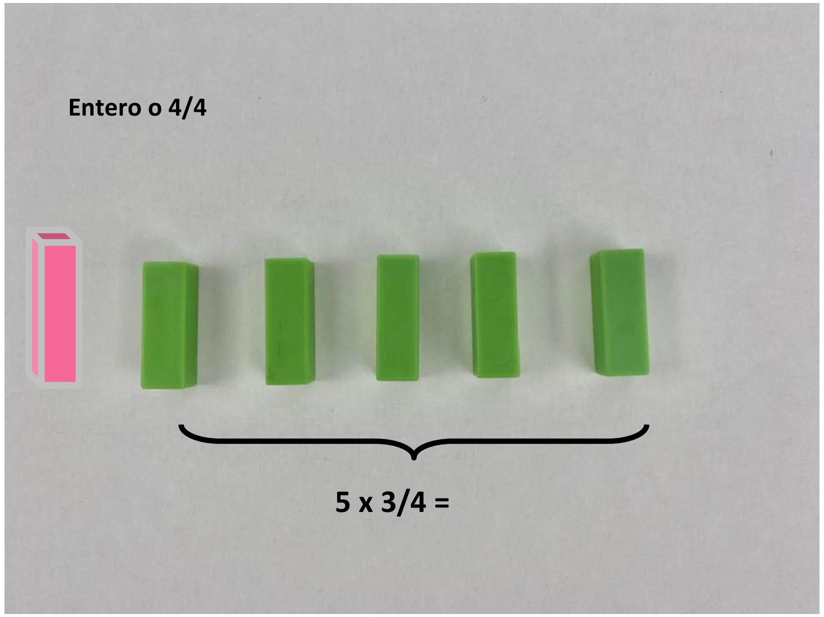
MULTIPLICAR FORMANDO

En la imagen A, observamos una operación 4 x 2/5= , para resolverlo seguimos los procedimientos:

Analizamos que se tienen que multiplicar cuatro veces 2/5 o sumar 4 veces 2/5 o tener 4 grupos de 2/5. El 2/5 proviene de un entero que está compuesto por 5 partes de igual medida, es decir, podemos representar el entero como una torre de cinco (regleta amarilla) de la cual, cada regleta blanca representa 1/5. Entonces representamos 2/5 con dos regletas blancas y lo multiplicamos por cuatro lo que equivale a decir que formamos 4 grupos de 2/5. En total tenemos 8/5.





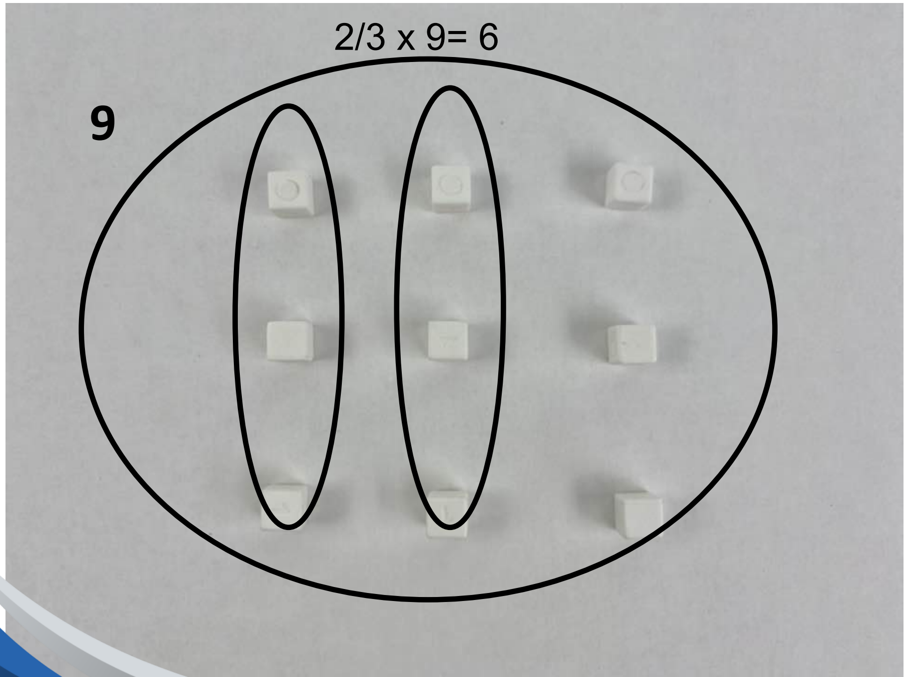


MULTIPLICAR UNA

En la imagen A, observamos una operación 2/3 x 9= , para resolverlo seguimos los procedimientos:

Analizamos el grupo que está compuesto por 9 enteros representados por 9 regletas. De ese grupo vamos a representar los 2/3 de los 9 enteros. Dando por resultado 6 enteros.

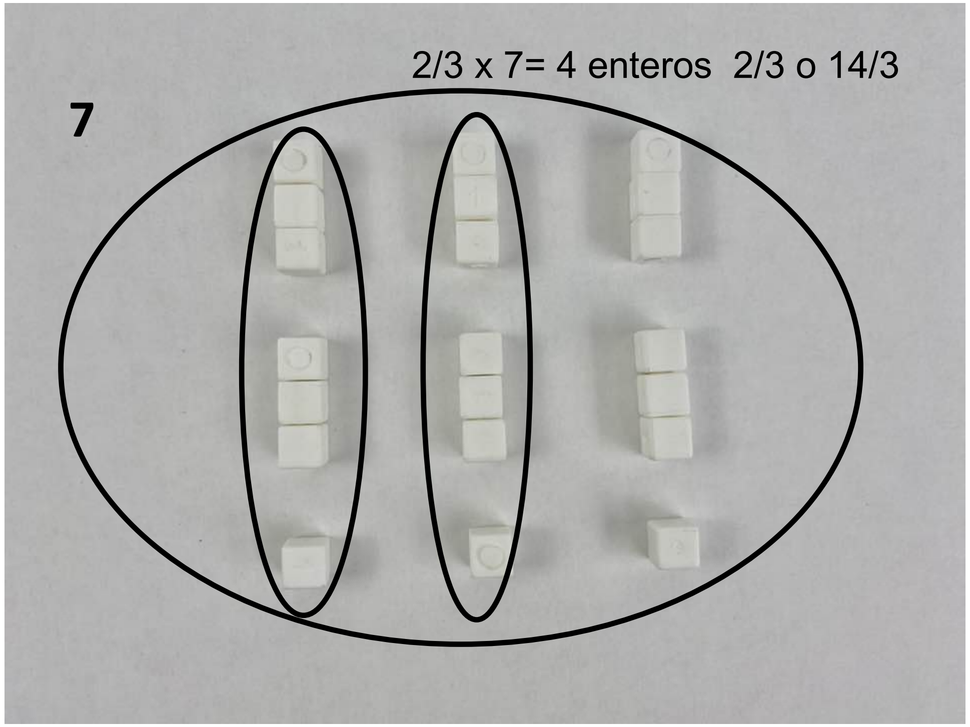
Es importante reflexionar que estamos explorando la fracción de un entero o un número.



MULTIPLICAR UNA

En la imagen B, observamos una operación 2/3 x 7= , para resolverlo seguimos los procedimientos:

Analizamos el grupo que está compuesto por 7 enteros representados estratégicamente por una torre de tres regletas cada uno. De ese grupo vamos a representar los 2/3 de los 7 enteros. Obsérvese en la imagen que al no poder repartir equitativamente el último entero se procede a repartirlo como 1/3 para cada subgrupo.



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, observamos la siguiente operación 2/3 x 3/3 = , es la multiplicación de una fracción por una fracción. Realizamos los siguientes procedimientos:
Representamos, los enteros de cada una de las fracciones de la operación.

La parte a representar de la fracción podemos representarlo con regletas blancas y celestes el complemento para el entero.

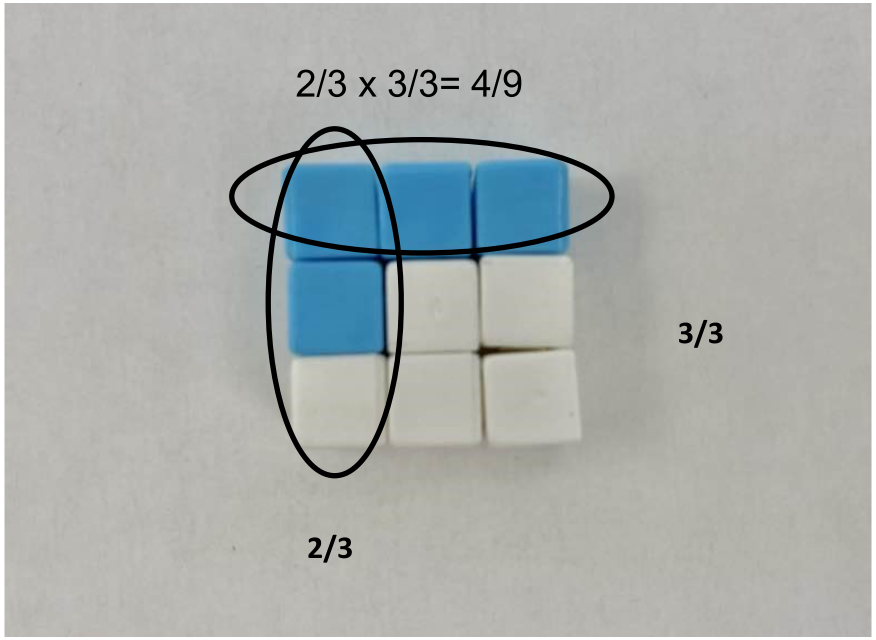
Homogenizamos nuestras fracciones haciendo que una misma regleta represente 1/3 de una fracción y represente a la vez 1/3 de la otra. Esto se hace superponiendo las dos fracciones azules.

Para que se pueda visualizar mejor el proceso, se complementa con las fracciones de color rojo.

Las fracciones azules representan respecto al nuevo entero o todo, 4 de 9 o 4/9 que es el resultado de la operación.

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, observamos la siguiente operación 2/3 x 3/3 = , Si contamos el total de regletas o entero son 9 y la parte blanca de las regletas son 4, entonces el resultado es 4/9. Nótese también que las fracciones a operar han sido superpuestas y tienen un origen en común.



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

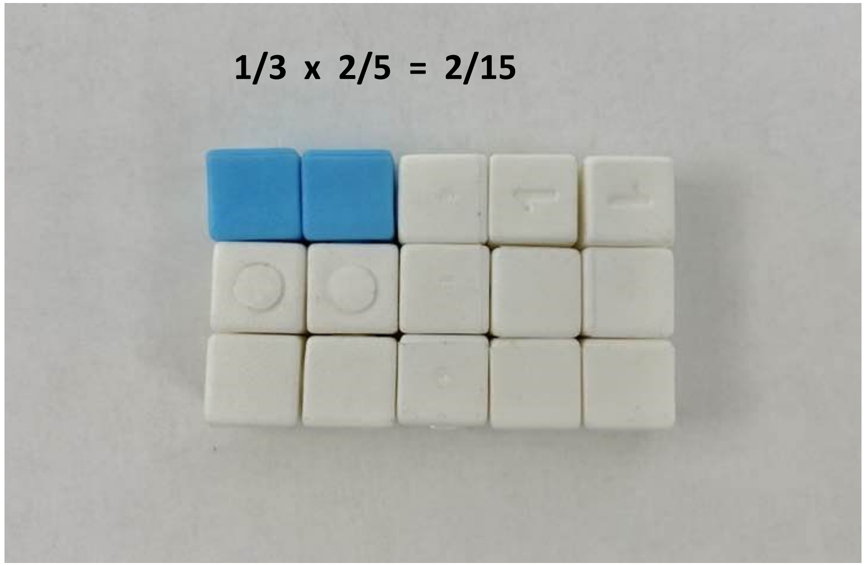
En la imagen A, observamos la siguiente operación 3/4 x 5/6= , para resolver seguimos los procedimientos:

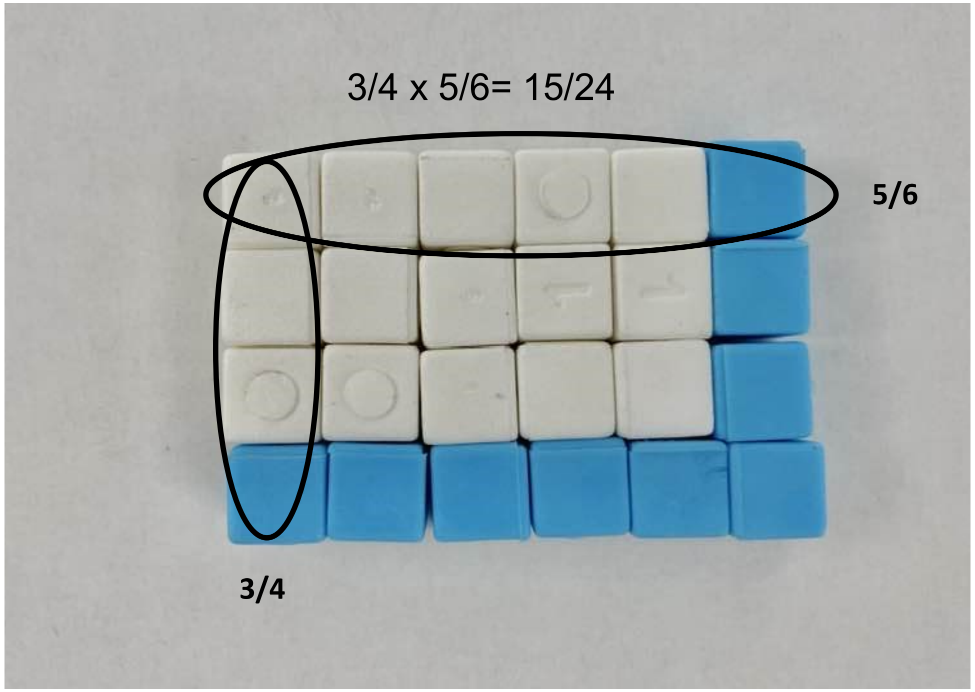
Construir la fracción 3/4.

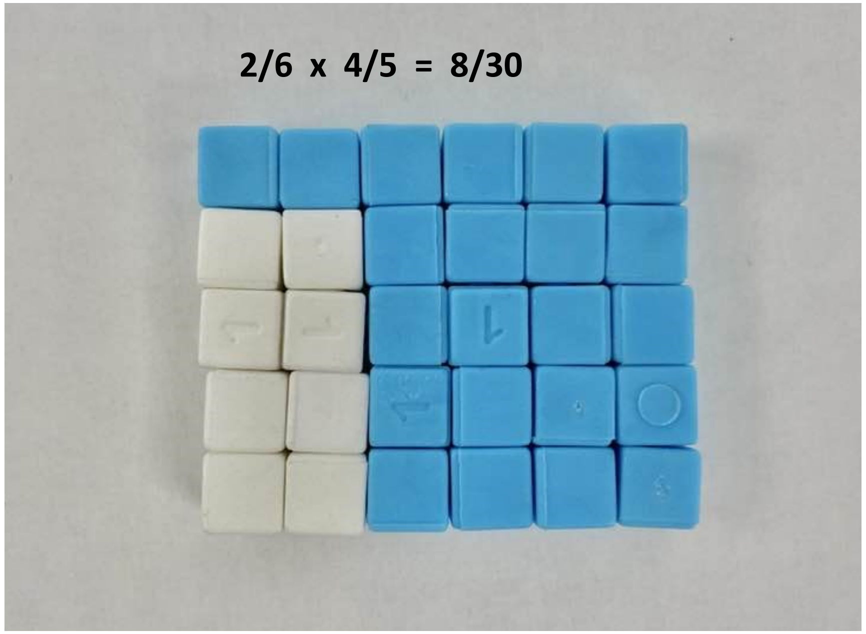
Construir la fracción 5/6.

Superponer las fracciones en un punto de origen

Completar con el color de la fracción representa-







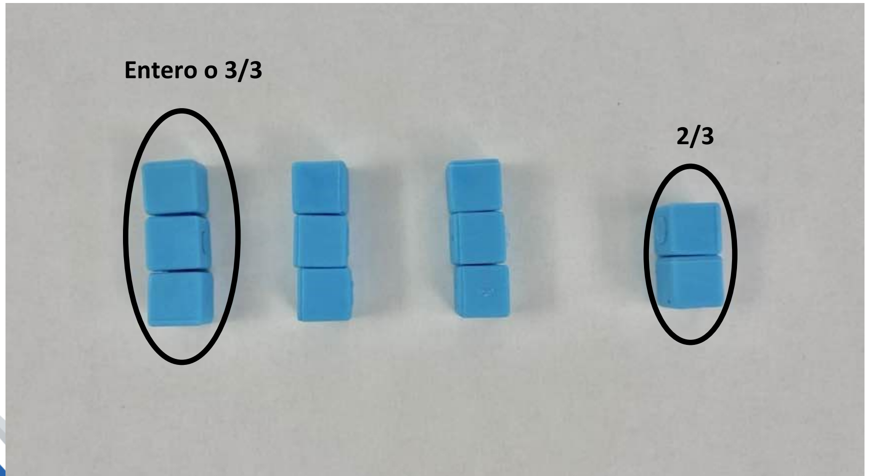
DIVISIÓN DE FRACCIONES

En la imagen A, se observa la siguiente operación 3 ÷ 2/3 = , realizamos los siguientes procedimientos:

Representamos los tres enteros, los podemos realizar con una regleta verde que representa un entero, pero estratégicamente cada entero estará representado por una torre de 3 regletas blancas. Cada regleta blanca representa 1/3.

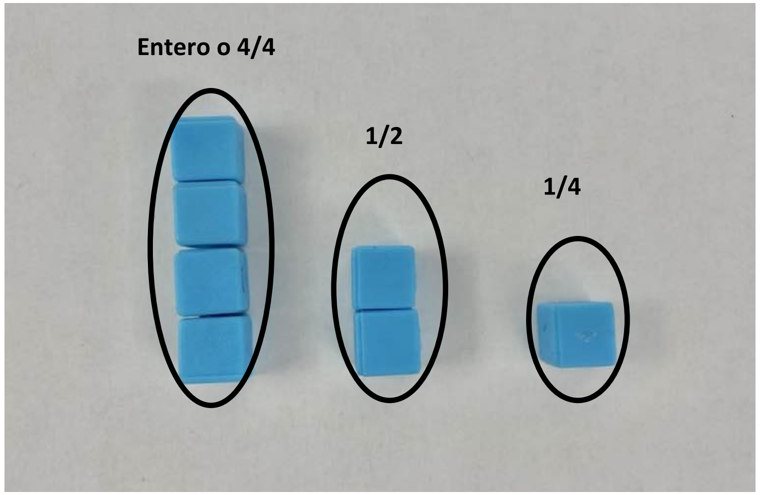
La operación consiste en ver cuántas veces el 2/3 está contenido en los tres enteros.

Luego de explorar está contenido 4 veces y media vez, es decir, 4 1/2.



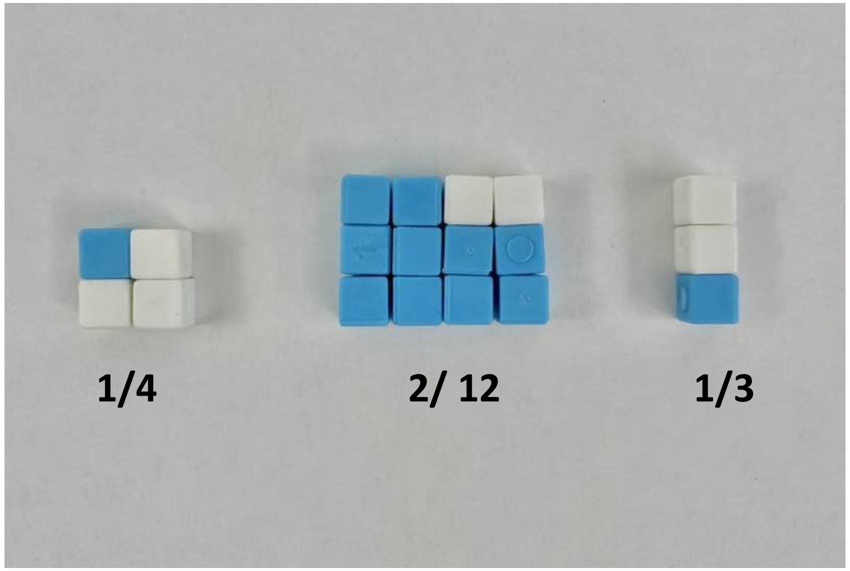
DIVISIÓN DE FRACCIONES

En la imagen B, se observa la siguiente operación 1/2 ÷ 2 = , realizamos los siguientes procedimientos: Si tenemos que representar 1/2, entonces tenemos que ver de donde viene el medio, su entero. Para ello representamos el entero como una regleta rosada, su medio o mitad, se representa por dos regletas blancas. Luego en la operación 1/2 ÷ 2 = , tenemos que explorar qué pasa si a 1/2 (torre de dos cubos), lo dividimos en dos ¿A cuánto equivale esa proporción respecto al entero? Observamos, que al dividir 1/2 entre dos , nos queda 1 regleta blanca que representa, respecto al entero 1 de 4 o 1/4.



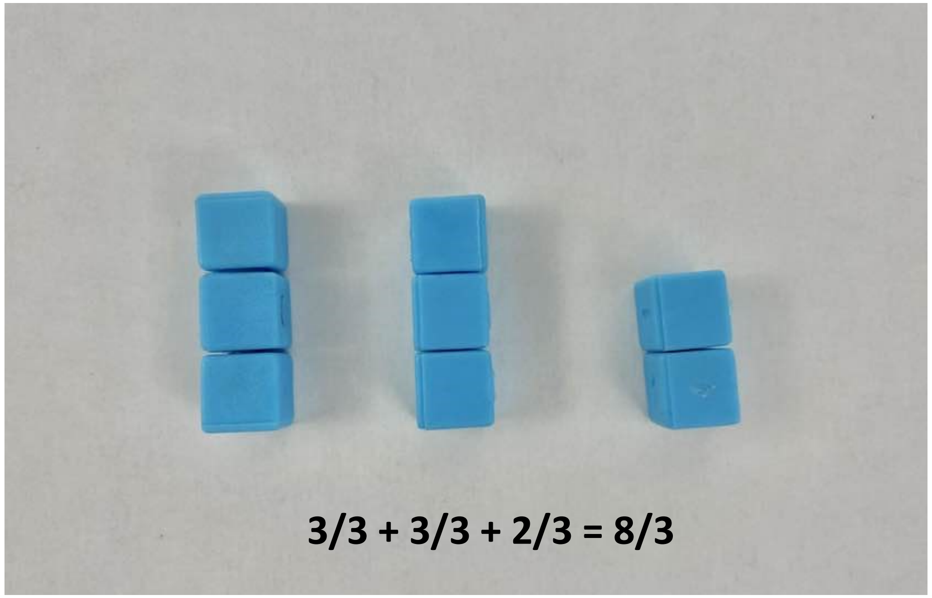
FRACCIONES PROPIAS

Se dice que es una fracción propia cuando el denominador es mayor que el numerador. Se puede trabajar el concepto de fracción propia con las regletas. En la siguiente figura podemos observar cómo se han construido las siguientes fracciones propias. Representan: 1/4 , 2/12 , 1/3 respectivamente. Cada una de estas construcciones representa el todo (entero) en sí misma . En cada construcción se pueden trabajar la suma , resta de fracciones homogéneas.



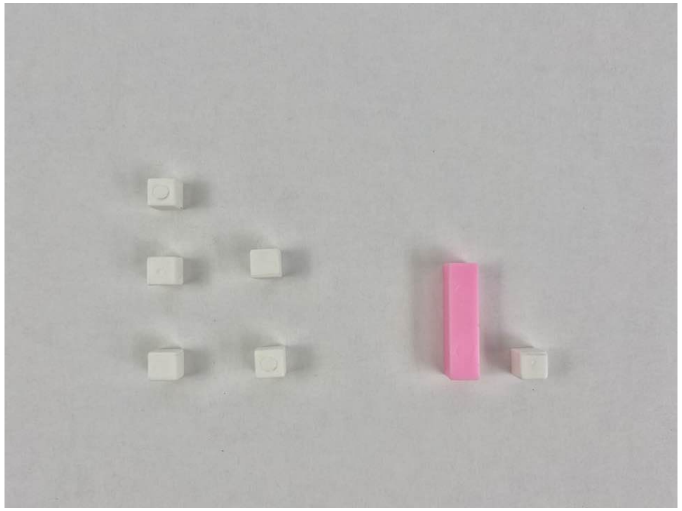
FRACCIONES IMPROPIAS

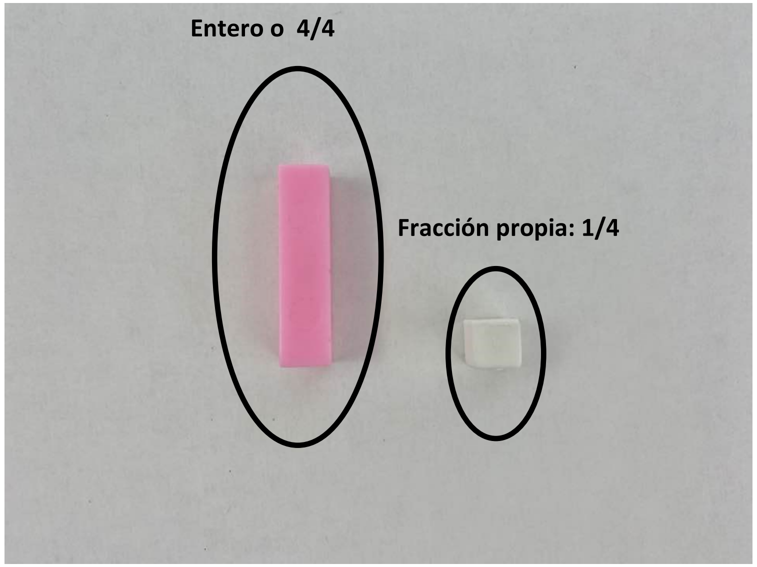
Se dice que una fracción es impropia cuando el numerador es mayor que su denominador. A partir de la construcción de un entero que está dividido en tres partes de igual medida ,es decir, cada una de sus partes vale 1/3 , se puede construir el concepto de fracción impropia. En la siguiente figura, cada cubo representa 1/3 , si sumamos todo obtenemos 8 /3 que es una fracción impropia. Si observamos bien hay otra forma de simbolizar esta construcción como : 2 enteros y 2/3 que es lo que conocemos como una fracción mixta.

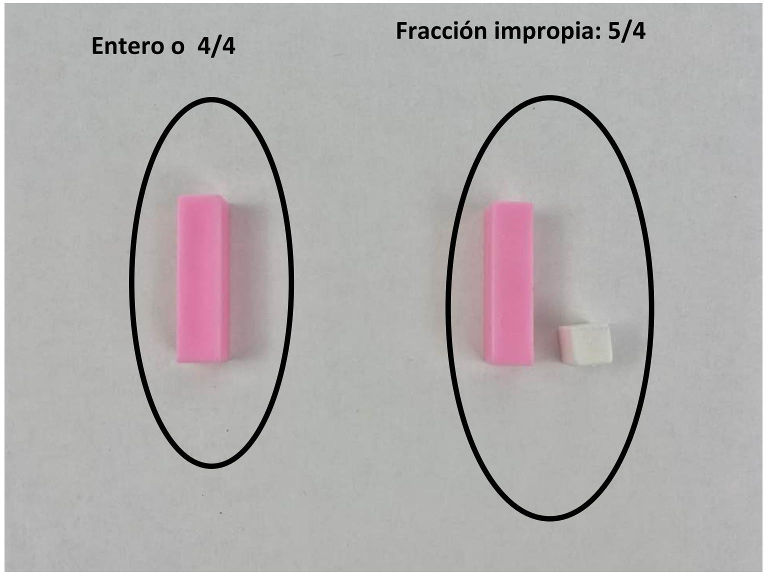


FRACCIONES IMPROPIAS

En la imagen A, observamos un grupo de 5 regletas blancas, cada uno de ellos representa 1/4 de un entero, si procedemos a sumar cada regleta, vamos a tener 5/4. En las actividades pasadas, observamos que en la representación de las fracciones, el numerador era menor que el denominador; sin embargo, en este caso “5/4”, el numerador es mayor que el denominador, por lo que utilizamos el término fracciones impropias para este tipo de representaciones: cuando el numerador es mayor o igual que el denominador, entonces son fracciones impropias. Solo cuando el numerador es menor podemos utilizar el termino de fracciones propias.



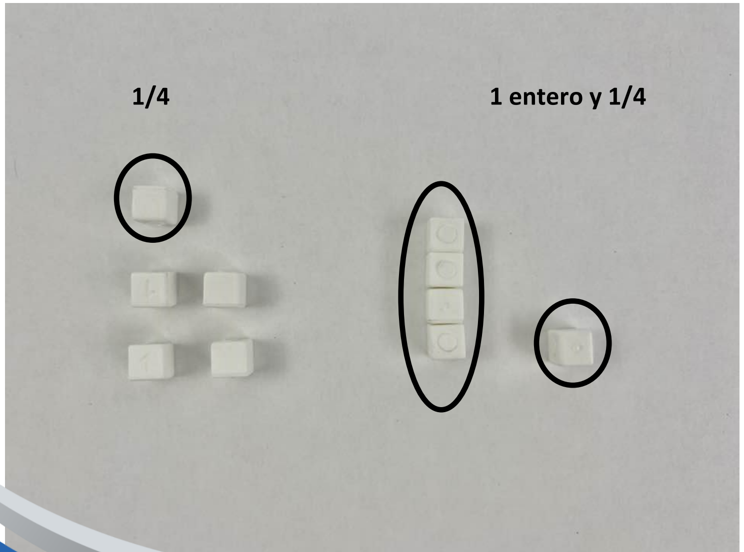


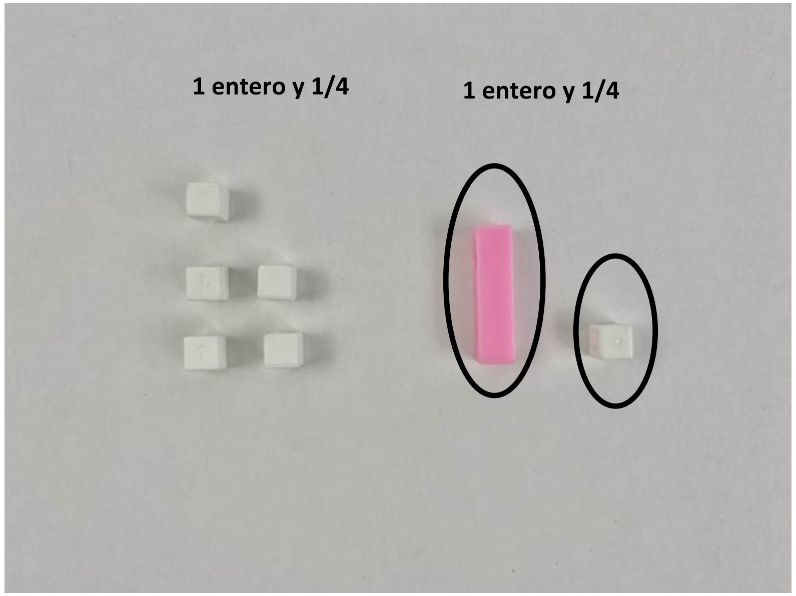


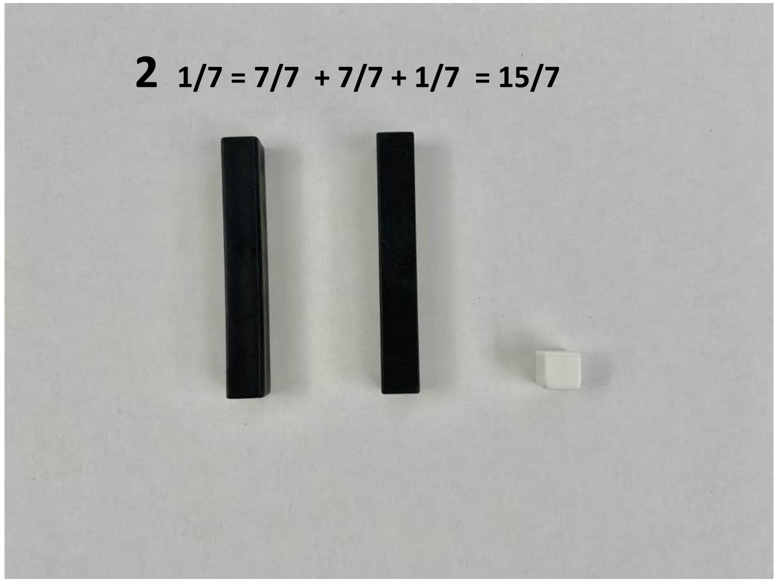
NÚMEROS MIXTOS

En la imagen A, donde cada regleta blanca representa 1/4, si los agrupamos podemos formar 5/4 o 1 entero y 1/4. Esta última forma de representar donde una parte es un número entero y otra una fracción, recibe el nombre de número mixto. Podemos obtener números mixtos creando una estructura con regletas de un entero y una fracción; también nos lo encontramos como resultado de una operación, como en la figura B, de una adición de dos fracciones homogéneas.

En la figura C, se representa dos enteros y 1/7, ver que cada entero está compuesto por una torre de 7 partes de igual medida.







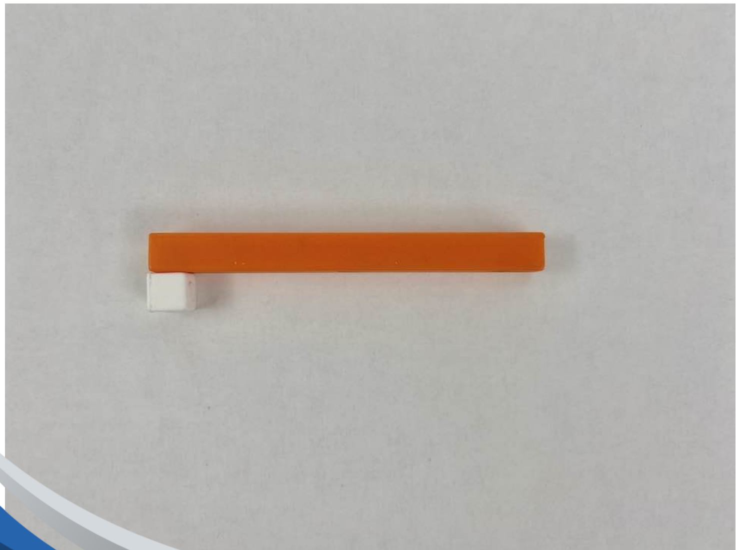
DECIMALES

En la figura A, observamos un entero. El entero está compuesto por 10 partes de igual medida, cada regleta blanca representa 1 de 10 o 1/10. Exploramos en nuestro tablero de unidades y décimos la representación con las regletas a través de las siguientes preguntas:

¿Cuál es mayor el entero o un décimo?

¿Si quisiera representar el entero en el tablero ´con qué número lo represento?

¿Si quisiera representar el decimal en el tablero con qué número lo represento?



DECIMALES

En el tablero representamos el valor de una regleta blanca o un décimo o 1 de 10 o 1/10. En el orden de las unidades vamos a escribir “0” porque un décimo es menor que la unidad; y en el orden de los décimos escribimos “1”. Entre el cero y el uno escribimos una coma (,) que nos permita diferenciar la parte entera y la decimal. Podemos también representar 2/10. 3/10, 4/10, 5/10 en nuestro tablero.

Cuando hayamos aprendido a representar los décimos, podemos realizar operaciones de adición , sustracción, multiplicación y división de decimales.

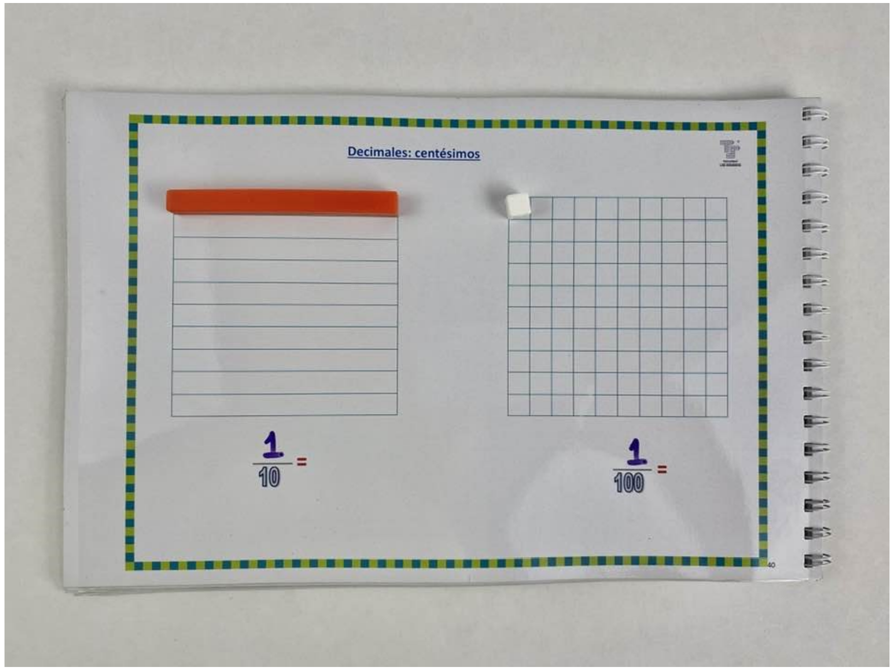
U	d
0	,1

DECIMALES

Otra forma de representar las fracciones es mediante los números decimales. Más importante que la forma cómo se escriben es consolidar primero el concepto de unidad o entero. Es importante resaltar que cuando trabajamos con fracciones los pequeños deben ser muy conscientes que estamos representando muchas veces números más pequeños que la unidad. Ellos ya conocen el cero y el uno; deben saber además que las fracciones que escriben se encuentran entre esos números ; es decir son mayores que cero pero a la vez menores que uno. ¿Cómo podemos representar tales números sin utilizar las fracciones? La representación decimal, variará en función del bloque que haya elegido como entero , es decir, dependerá en cuantas partes de igual medida esté dividido el bloque. Si el bloque está dividido en 10 partes cada parte de igual medida se representará así: 0.1 (un décimo) Si el bloque está dividido en 100 partes cada parte de igual medida se representará así: 0.01 (un centésimo) Si el bloque está dividido en 1000 partes cada parte de igual medida se representará así: 0.001 (un milésimo).

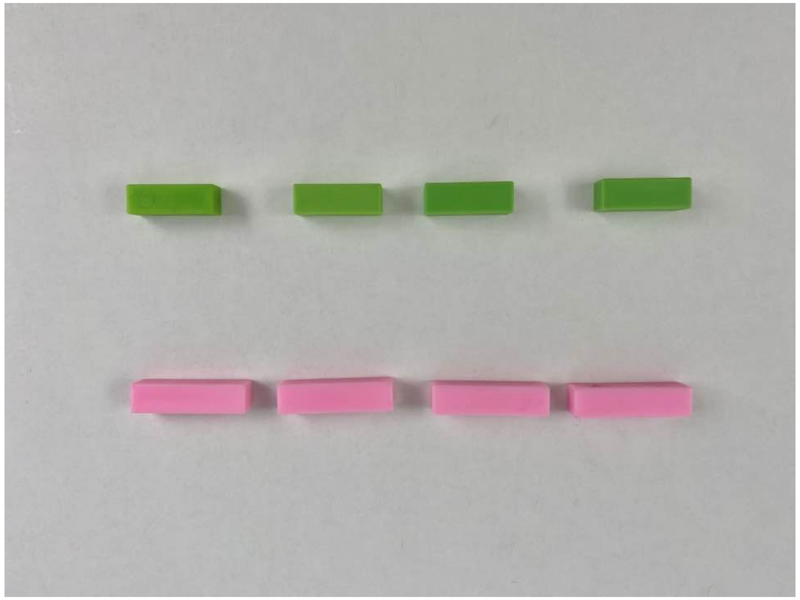
DECIMALES

La siguiente construcción formada por diez barras naranja representan 100 unidades. Por lo que cada regleta naranja tiene el valor de 0.1 décimo y cada regleta blanca dentro del bloque tiene el valor de 0.01 milésimo . Otorgándole un valor relativo a cada pieza , se pueden explorar muchas operaciones.



MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

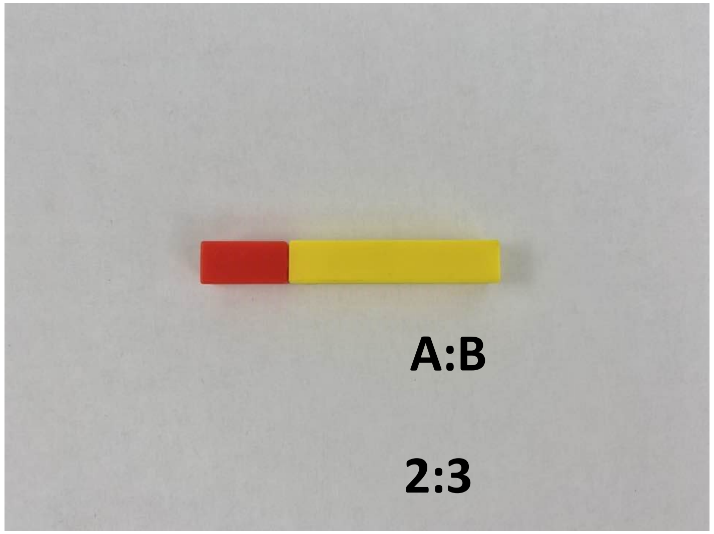
En la siguiente figura se observa que hay dos conjuntos : uno formador por grupos de tres elementos y otro por grupos de cuatro elementos , si seguimos agregando grupos de tres y cuatro en qué punto coincidirán en cantidad (se puede apreciar porque tendrán la misma longitud), pues seguro que en muchos puntos , pero el primer o mínimo encuentro será cuando ambos tengan 12. Ahora probemos con 3 y 5. Así se construye el M.C.M.



PROPORCIONES

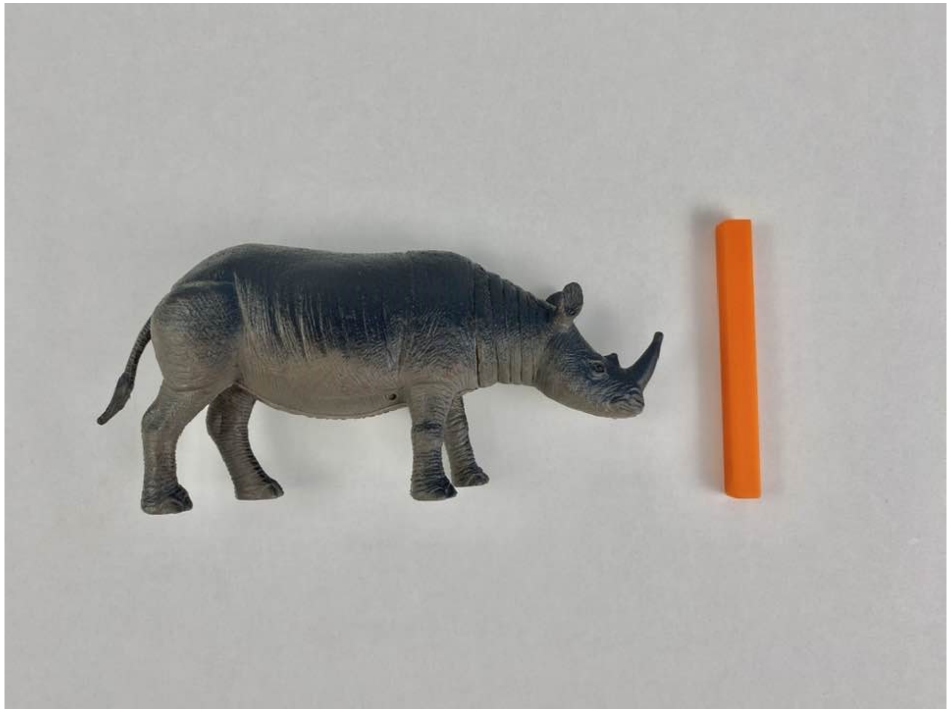
En la siguiente imagen podemos observar cómo en cada uno de los cuadrantes se presenta una relación entre dos números. Lo fundamental es encontrar esa relación y hallar la proporción para poder predecir el valor que va adquirir un número cuando el otro tenga un valor determinado. Las regletas nos ofrecen la posibilidad de construir y visualizar las proporciones.

2	4	6	8	10
3	6	9	12	15



UNIDADES NO CONVENCIONALES PARA MEDIR

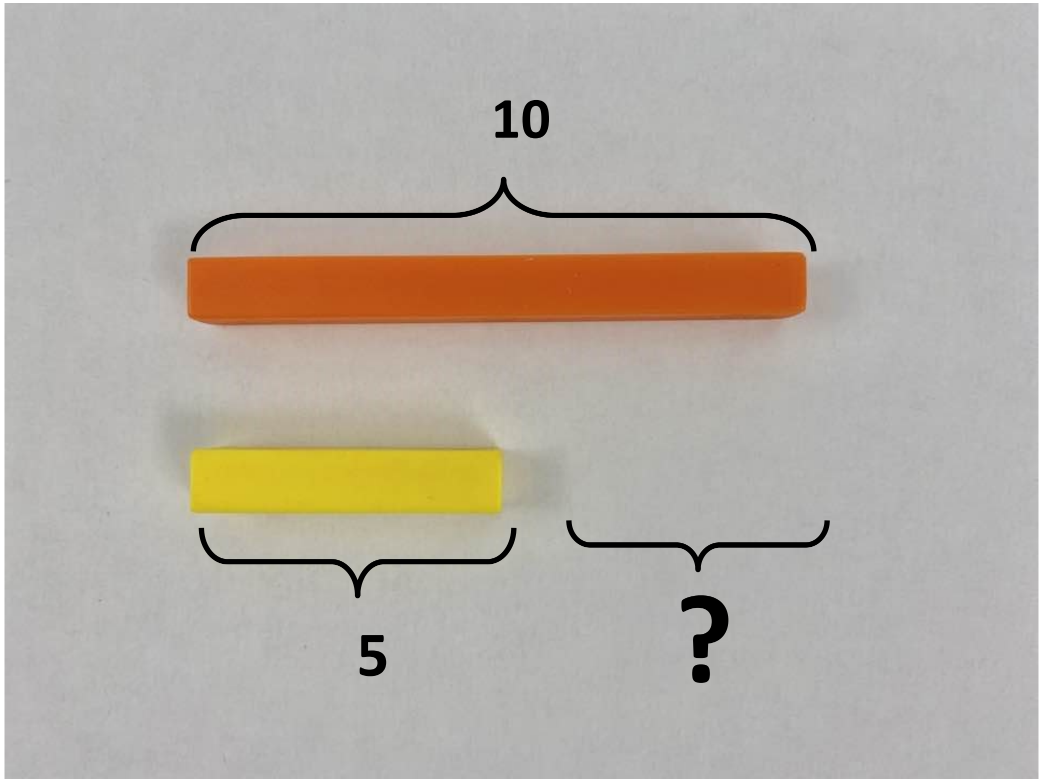
Es importante que nuestros pequeños aprendan los sistemas internacionales para medir y puedan utilizar el metro o las pulgadas para indicar con precisión la medida de un objeto. Sin embargo, para construir estos conceptos , antes se debe trabajar las unidades no convencionales, ,es decir, deben primero medir con otros objetos para tener una mejor comprensión de por qué medimos, cuáles son las condiciones para realizar una adecuada medición, qué es una unidad, por qué es importante que todas las unidades que empleo para medir tengan la misma longitud. Cuando los pequeño comprendan estos conceptos no solo entenderán las unidades de medida convencionales, si no que crearán sus propias unidades de medida. Comenzamos utilizando las regletas para medir por ejemplo cuántas regletas verdes mide el largo de una mesa, mi brazo. Es importante utilizar las regletas grandes y pequeños para obtener distintas medidas de un mismo objeto. Por ejemplo mi brazo mide 12 regletas azules, y cuando lo mido con los regletas verdes son 8. Deben entender que la medida variará de acuerdo a la unidad que hayan empleado. Las regletas estándar, tomando como referencia la regleta blanca tiene de longitud 1 cm.



PAEV

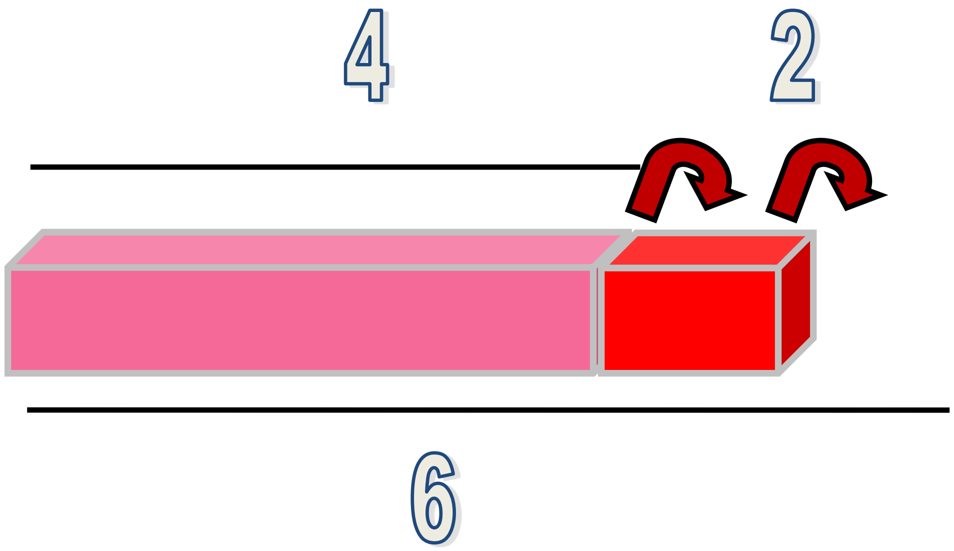
Los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) son una clasificación hecha con fines pedagógicos, más no didácticos para que los especialistas puedan clasificar a todos los enunciados matemáticos según su complejidad. Para poder trabajar los distintos tipos de PAEV es importante que los pequeños hayan consolidado la relación parte –todo , ya que toda nuestra matemática está desarrollada a partir de esa idea. Otro principio importante es la reversibilidad. La reversibilidad nos permite una comprensión global de un proceso : la adición y sustracción como parte de un mismo proceso ; la comparación y la igualación como parte de un mismo proceso.

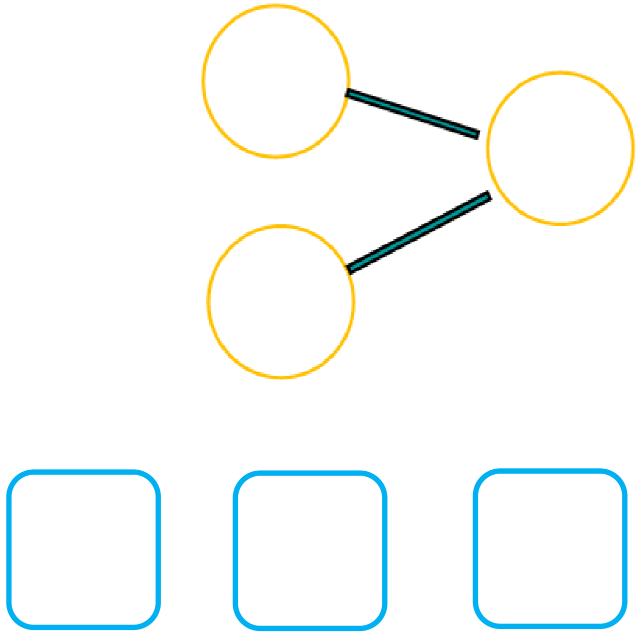
El diagrama de círculos que trabajamos en las primeras páginas , ahora lo trabajaremos como barras, como en la siguiente imagen, pero conservando el concepto del parte y todo.
En el siguiente reto las regletas forman torres proporcionales par representar la cantidad de jirafas y perros ;sin embargo, en otro casos pueden representar cantidades que no necesariamente guardan una relación de igual cantidad de elementos si no como referencia. Por ejemplo , la misma barra puede representar 450.



RETOS MATEMÁTICOS

Juan tiene 4 autos de juguete, su hermano tiene 2 más que él ¿Cuántos tiene su hermano?

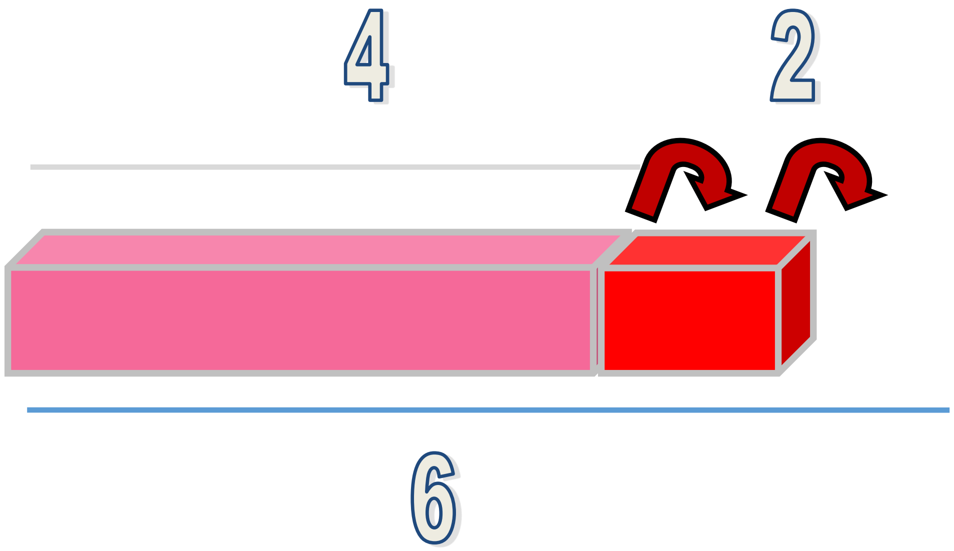


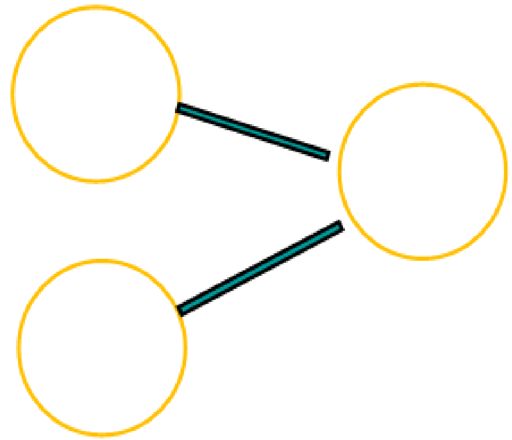


TIENE ☐ AUTOS EN TOTAL

RETOS MATEMÁTICOS

El hermano de Juan tiene 2 autos de juguete más que é. Si Juan tiene 4 autos ¿Cuántos autos tiene el hermano de Juan?

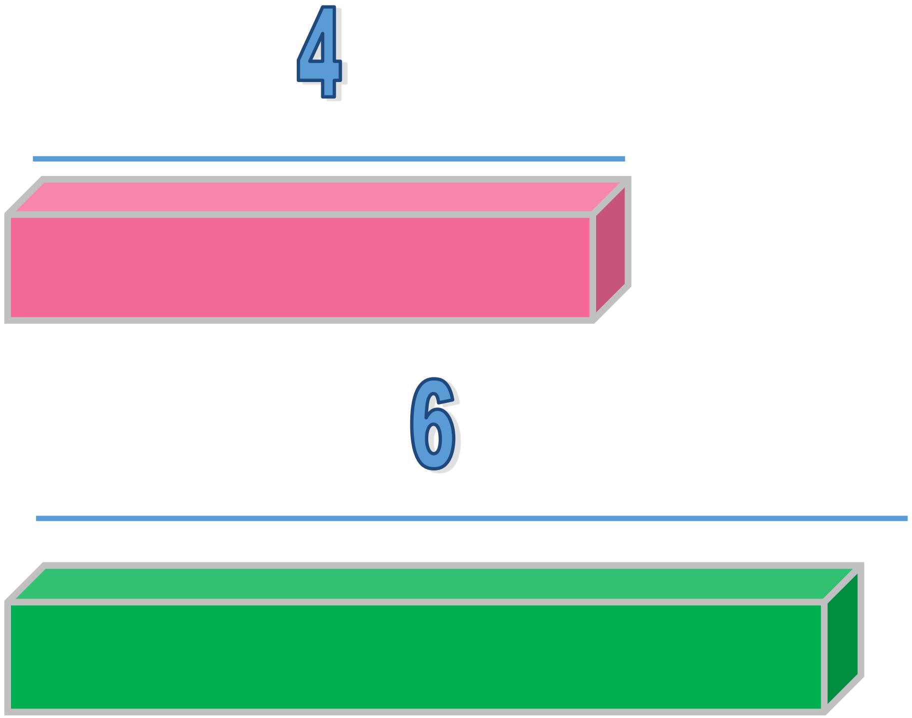


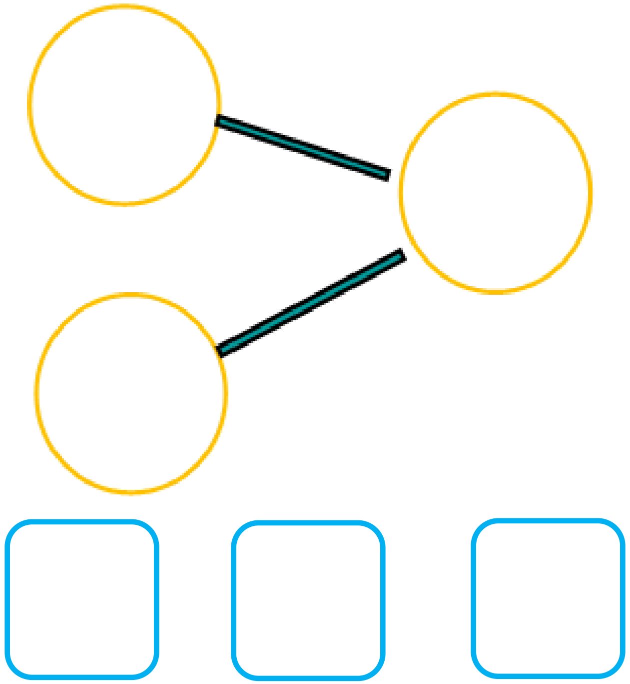


TIENE $\boxed{}$ AUTOS EN TOTAL

RETOS MATEMÁTICOS

Juan tiene 4 autos , su hermano tiene 6 autos ¿Cuántos más tiene el hermano que Juan?

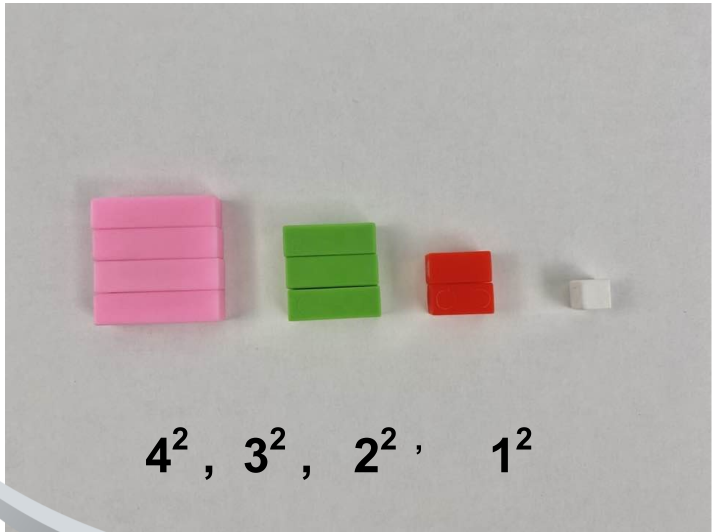




TIENE ☐ **AUTOS MÁS QUE JUAN.**

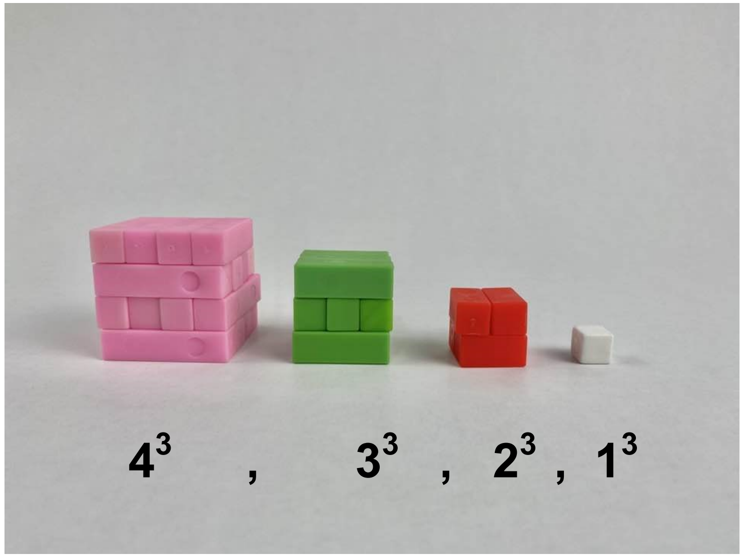
POTENCIA AL CUADRADO

En la figura se puede observar construcciones de cuadrados .Esta estructura ya lo hemos trabajado antes en la multiplicación, pero ahora buscaremos las condiciones que debe cumplir para ser considerado un cuadrado : igual número de columnas y de filas. Modelaremos el concepto de dos al cuadrado, tres al cuadrado, cuatro al cuadrado. Sabemos , por la escuela que cuando nos piden tres al cuadrado debemos multiplicar dos veces el tres, y la respuesta es nueve, pero cuando construimos con las regletas podemos visualizar además de donde viene su nombre : con tres filas y tres columnas se forma un cuadrado, es un número cuadrado o al cuadrado ,también conocido como potencia de 2.



POTENCIA AL CUBO

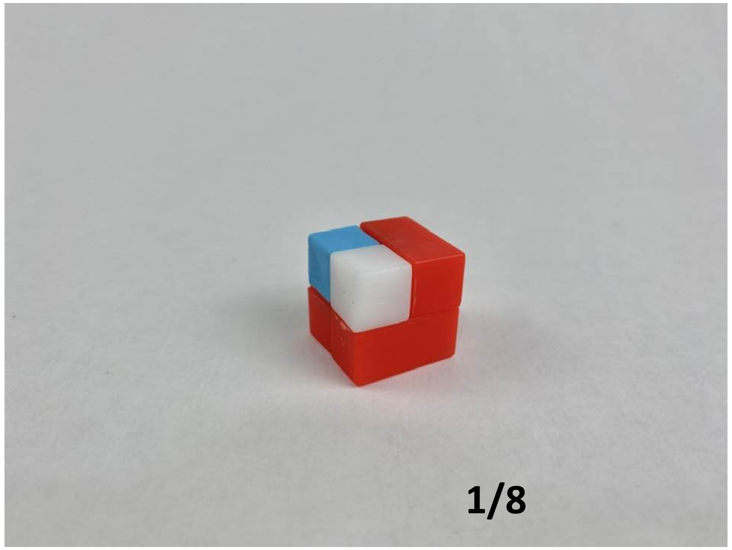
En la figura podemos ver construcciones en 3 dimensiones. Por la naturaleza en las regletas, se pueden visualizar construcciones de dos al cubo, tres al cubo , cuatro al cubo. Antes de enseñarles cómo se representa matemáticamente los pequeños deben explorar y construir cuales son las condiciones que debe cumplir una estructura para ser un cubo : con tres columnas, tres filas y tres de altura como condición puedo construir un cubo empleando 27 cubos en total. Esta es la representación de tres al cubo es 27. Luego pueden realizar construcciones de muchos cubos y contar cuantas piezas les tomó construirlas , anotarlas en su cuaderno y encontrar las regularidades.



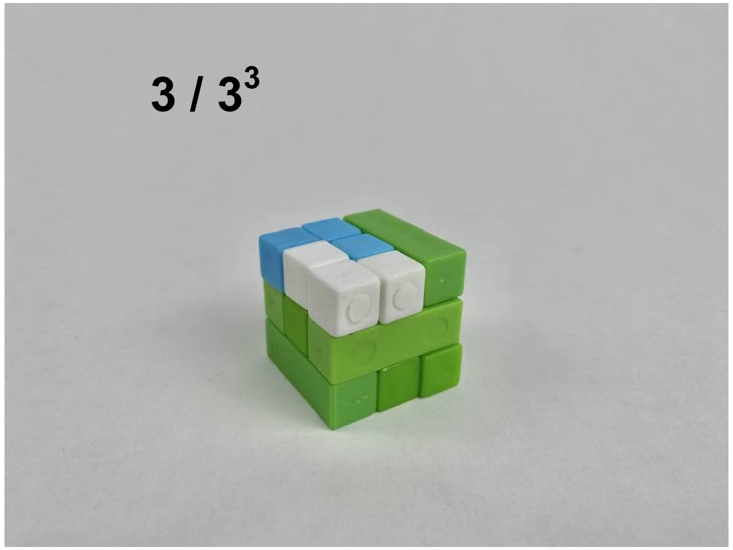
EXPLORANDO

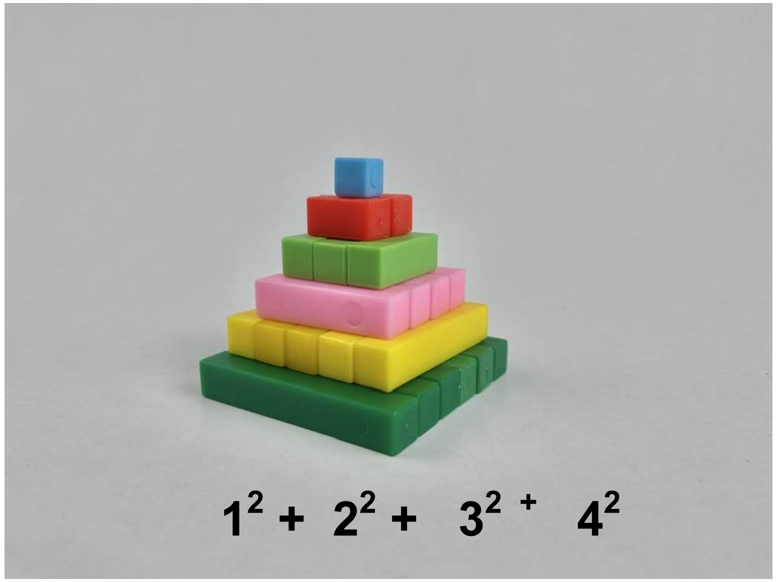
POTENCIAS Y FRACCIONES

Ahora que ya conocemos cómo se construye un dos al cubo, podemos trabajar también las fracciones. Por ejemplo en la siguiente imagen hay una construcción de cubos rojos y uno amarillo ¿Qué fracción representa el cubo amarillo respecto al total (cubo grande)? En la siguiente construcción podemos ver un tres al cubo ¿Qué fracción representan los tres cubos azules respecto al todo? Trabajar con regletas nos permite incluso poder visualizar la suma de cuadrados como en la tercer imagen.



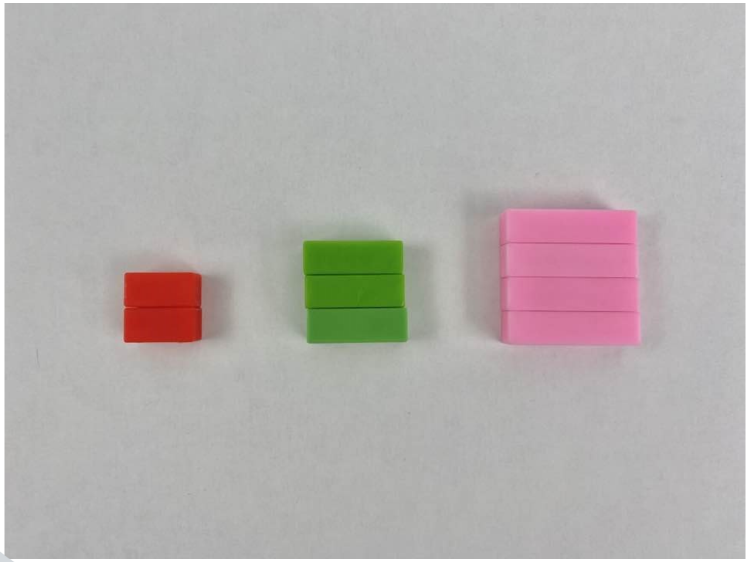
EXPLORANDO CONSTRUCCIONES





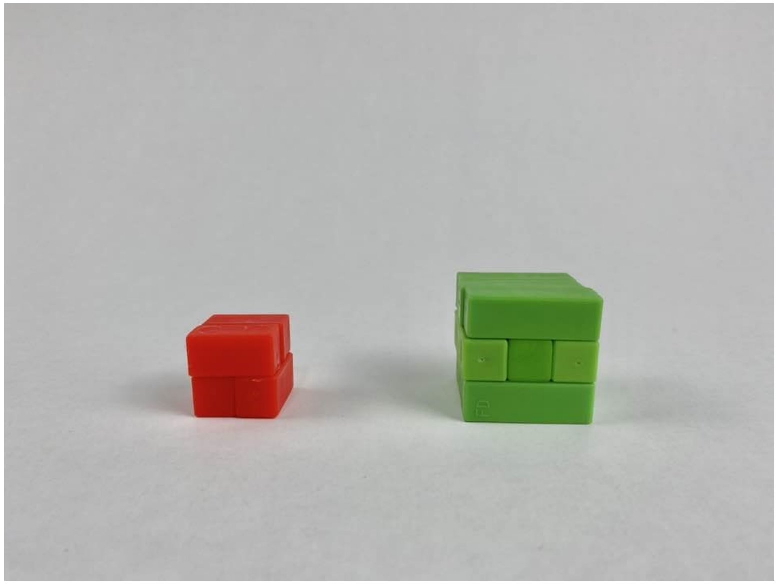
RAÍZ CUADRADA

El concepto de raíz se enseña en el mismo proceso cuando enseñamos la potencia, por el principio de reversibilidad. En la figura podemos observar las raíces de los números : cuatro, nueve y dieciséis . Cuando construimos podemos entender este concepto como el origen o condición para que se pueda formar un número cuadrado. El nueve por ejemplo es un número cuadrado, pero cuál es la raíz , medida o condición que debe cumplir para formar un cuadrado: sus columnas y filas deben medir 3. Entonces así entendemos mejor el concepto de raíz.



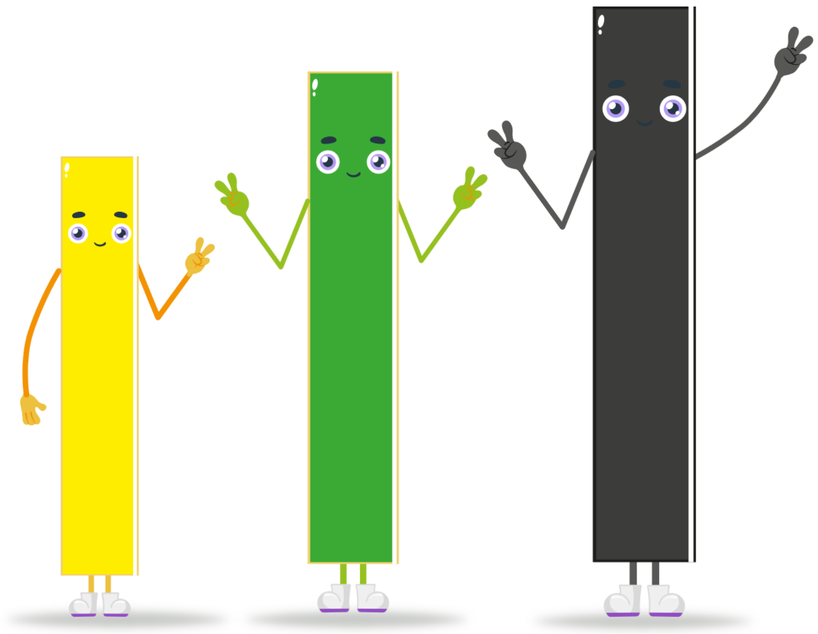
RAÍZ CÚBICA

Podemos también encontrar la raíz cúbica de un número cúbico como es 27. Cuál es la raíz , origen o condición para que se pueda formar un cubo con 27 piezas. Pues que su número de columnas, filas y altura tengan tres unidades respectivamente. Este es el concepto de raíz. Este proceso se trabaja simultáneamente cuando se trabajan las potencias cúbicas para que los estudiantes tengan una mejor comprensión. Ahora busquemos las raíces cúbicas de 1 ,8 y 64.



CAPÍTULO III

RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO



PIENSA Y ACTÚA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE REGULARIDAD , EQUIVALENCIA Y CAMBIO

Competencia 23: RESUELVE PROBLEMAS DE CANTIDAD. Consiste en que el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones. Implica también discernir si la solución buscada requiere darse como una estimación o cálculo exacto, y para ello selecciona estrategias, procedimientos, unidades de medida y diversos recursos. El razonamiento lógico en esta competencia es usado cuando el estudiante hace comparaciones, explica a través de analogías, induce propiedades a partir de casos particulares o ejemplos, en el proceso de resolución del problema.

Esta competencia implica, por parte de los estudiantes, la combinación de las siguientes capacidades:

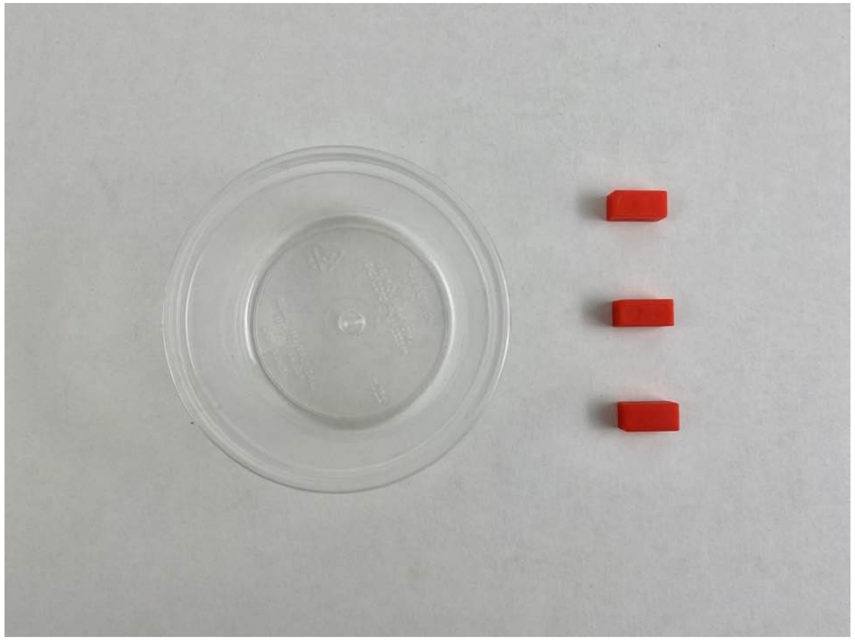
 Traduce cantidades a expresiones numéricas: es transformar las relaciones entre los datos y condiciones de un problema a una expresión numérica (modelo) que reproduzca las relaciones entre estos; esta expresión se comporta como un sistema compuesto por números, operaciones y sus propiedades. Es plantear problemas a partir de una situación o una expresión numérica dada. También implica evaluar si el resultado obtenido o la expresión numérica formulada (modelo), cumplen las condiciones iniciales del problema. Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones: es expresar la comprensión de los conceptos numéricos, las operaciones y propiedades, las unidades de medida, las relaciones que establece entre ellos; usando lenguaje numérico y diversas representaciones; así como leer sus representaciones e información con contenido numérico. Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo: es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de estrategias, procedimientos como el cálculo mental y escrito, la estimación, la aproximación y medición, comparar cantidades; y emplear diversos recursos. Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre números naturales, enteros, racionales, reales, sus operaciones y propiedades; basado en comparaciones y experiencias en las que induce propiedades a partir de casos particulares; así como explicarlas con analogías, justificarlas, validarlas o refutarlas con ejemplos y contraejemplos.(Currículo Nacional Perú, 2016, P. 136).

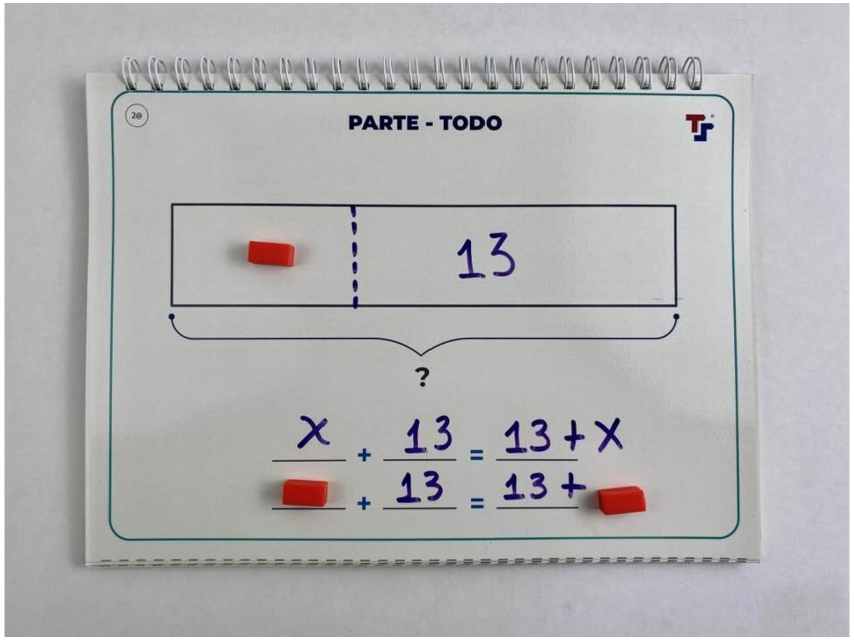
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En la imagen A, observamos la representación de un grupo de 3 regletas. Sin embargo, hay una bandeja que impide ver, la cantidad de regletas que se encuentran dentro (vamos a suponer que no podemos verlo). Entonces vamos a representar con una variable “a” esa cantidad de regletas que desconocemos quedando representada la frase matemática así: a + 3 = , esta es una expresión algebraica.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

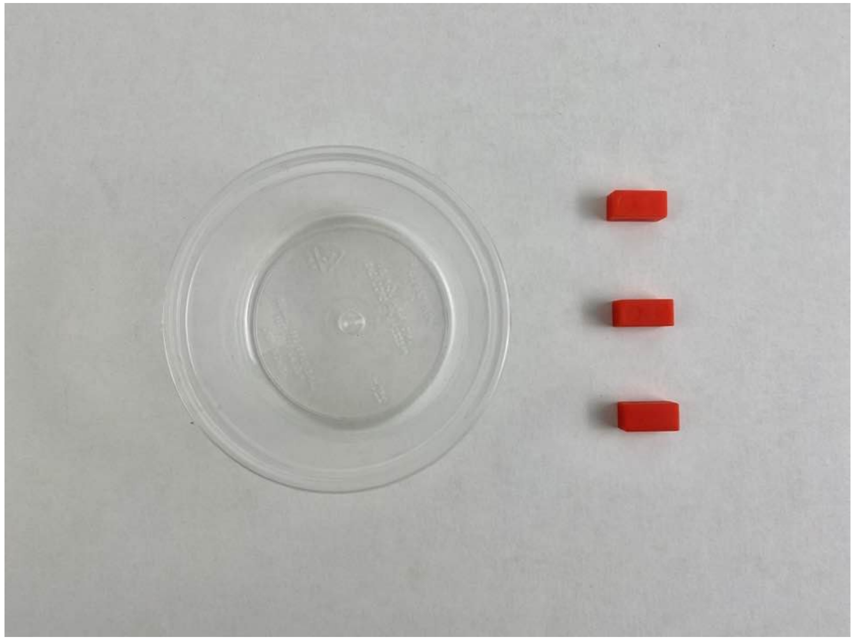
En la imagen B, utilizamos una regleta azul para representar un número desconocido al cual le vamos a agregar 12. También podemos luego representar la regleta por una letra “x” a la que le agregaremos 12. Quedándonos de la siguiente manera: x + 12 , esta es una expresión algebraica. Si observamos la imagen, podemos ver de fondo una barras, unos rectángulos, esos gráficos nos pueden ser de ayuda también para representar la expresión algebraica.





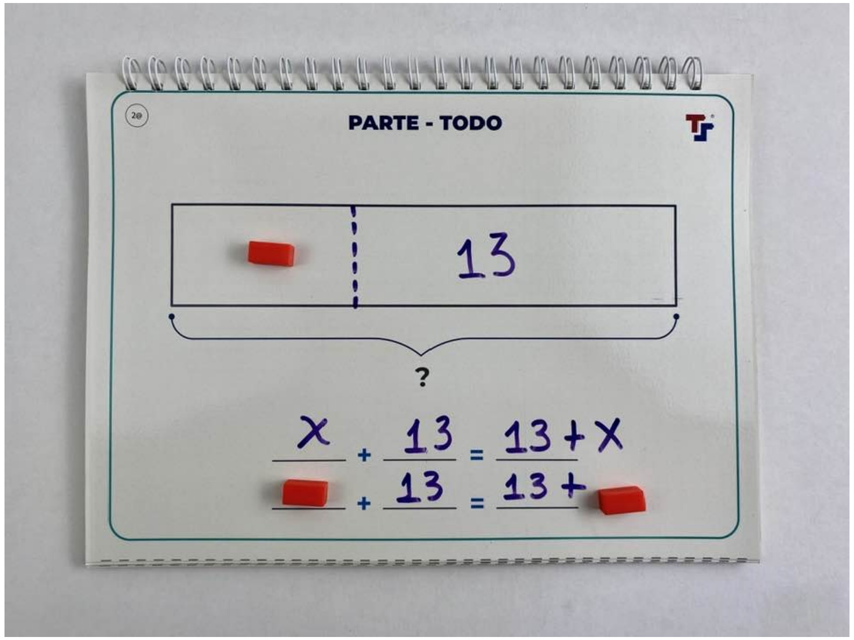
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En la imagen A, observamos la representación de un grupo de 3 regletas. Sin embargo, hay una bandeja que impide ver, la cantidad de regletas que se encuentran dentro (vamos a suponer que no podemos verlo). Entonces vamos a representar con una variable "a" esa cantidad de regletas que desconocemos quedando representada la frase matemática así: a + 3 = , esta es una expresión algebraica.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

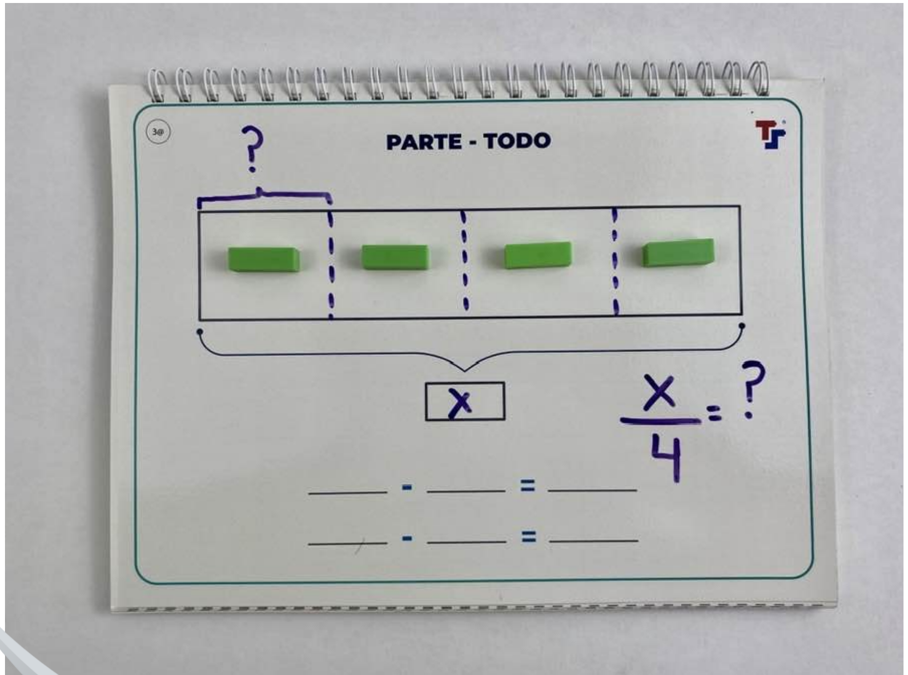
En la imagen B, utilizamos una regleta azul para representar un número desconocido al cual le vamos a agregar 12. También podemos luego representar la regleta por una letra "x" a la que le agregaremos 12. Quedándonos de la siguiente manera: x + 12 , esta es una expresión algebraica. Si observamos la imagen, podemos ver de fondo una barras, unos rectángulos, esos gráficos nos pueden ser de ayuda también para representar la expresión algebraica.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En la imagen A, encontramos la siguiente representación del todo que es representado por “x” y de las partes representadas por regletas iguales y que en total son cuatro. Se nos pide hallar el valor de una regleta representado por “?”. Para hacerlo vamos a dividir al todo entre cuatro, quedándonos la siguiente expresión algebraica: x/4.

El metaplano, en la figura nos permite luego realizar un gráfico de los representado con las regletas.



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

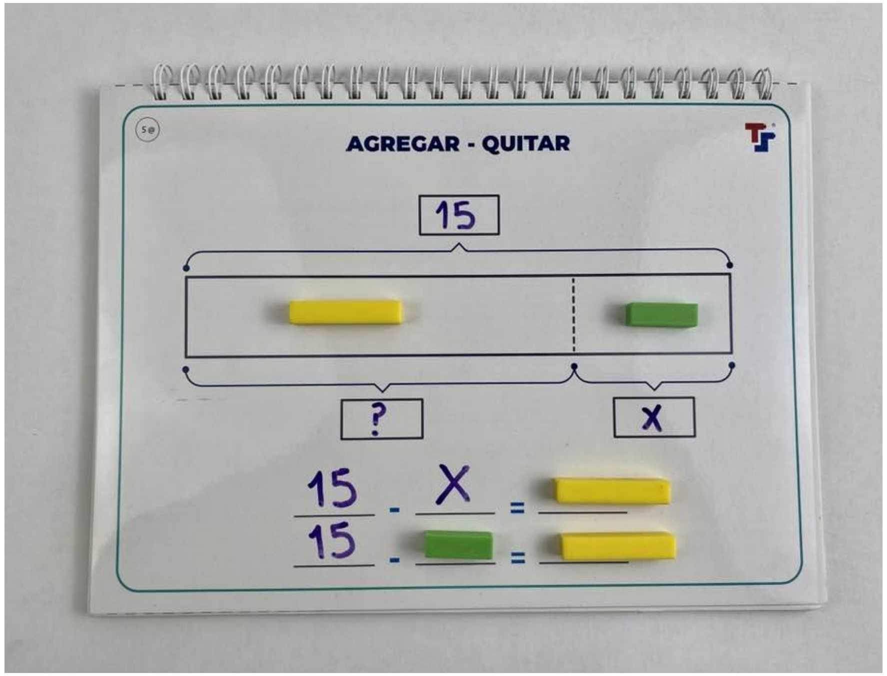
Vamos a representar los valores de la imagen B:

Todo: 14 unidades

Regleta verde: ?

Regleta marrón: x

Para hallar la parte desconocida le vamos a quitar al todo, 14 la parte que conocemos que es “X”, de esta manera se representa la expresión algebraica: 14 - x = ?



EXPRESIONES ALGEBRAICAS

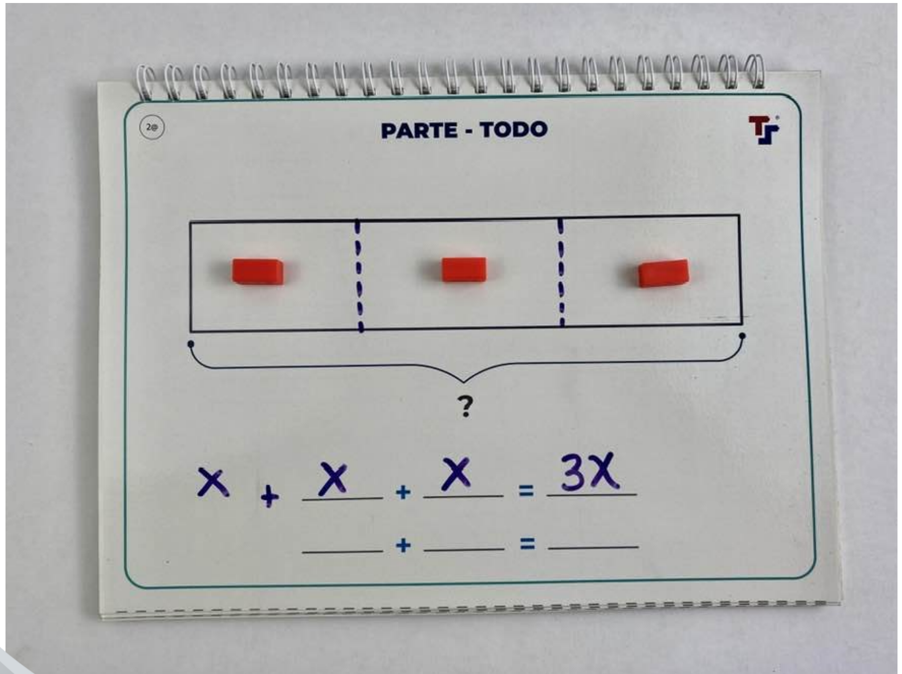
Vamos a representar los valores de la imagen A:

Todo: ?

Parte: 3 regletas.

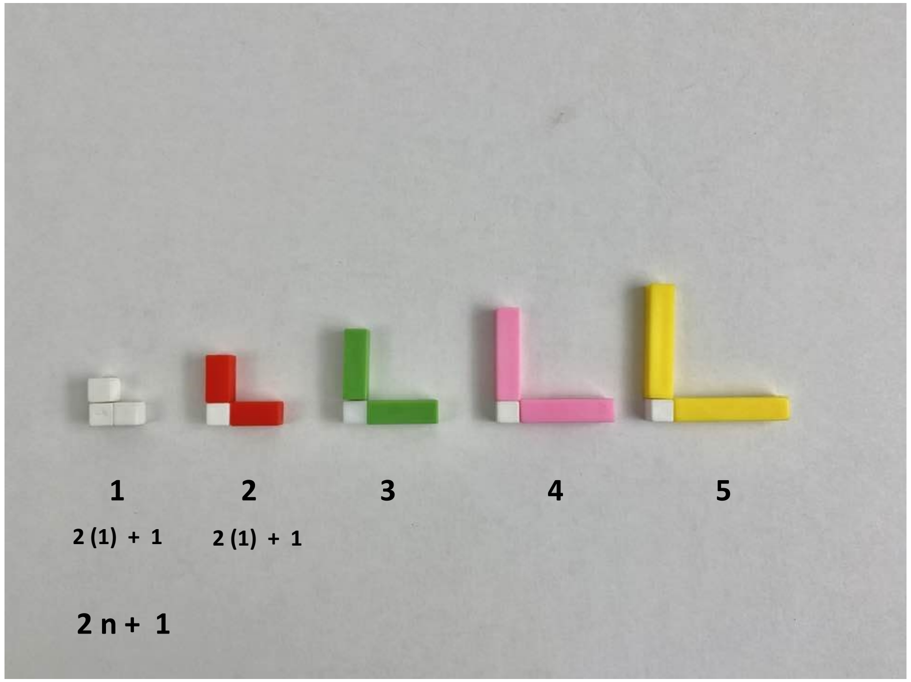
Representamos cada regleta por una “x”

Para representar el todo podemos sumar las equis: x +x +x = 3x o expresarlo como una multiplicación 3x.



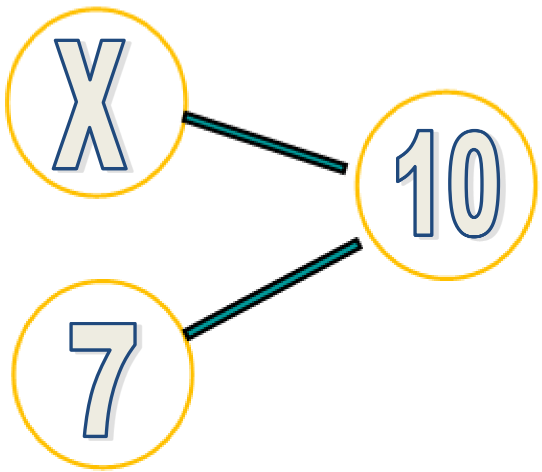
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En la imagen B, observamos tres figuras en forma de “L” construidas con regletas, vamos a explorar, si encontramos alguna regularidad que se pueda generalizar. En la primera construcción encontramos que si multiplicamos el número de cubos verdes de un lado por 2 y sumamos 1, obtenemos el total. En la segunda construcción si multiplicamos el número de cubos verdes que hay en un lado por 2 y le sumamos 1, obtenemos el total de la construcción. De esta forma tenemos la siguiente expresión: 2n + 1 =



NOCIONES PRE ALGEBRAICAS

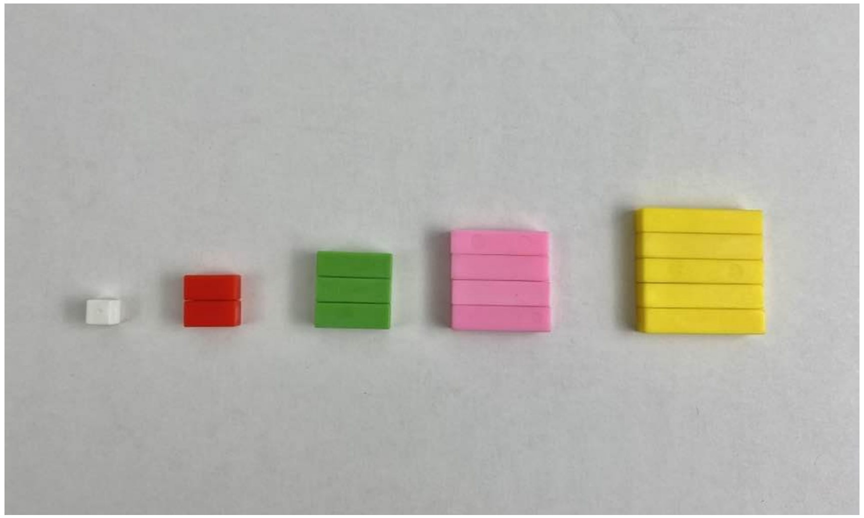
Cuando trabajamos el diagrama de círculos , también estamos trabajando las nociones pre algebraicas. Por ejemplo, si en primer grado de primaria les dejo para resolver la siguiente expresión : x + 7 = 10 , muchos pensarán que es demasiado abstracto para que lo resuelvan los pequeños, pero cuando trabajamos con el diagrama de descomposición, los niños aprenden muchos de los conceptos que le serán útil cuando aborden el álgebra.



X + 7 = 10

GENERALIZACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS

En la primera sección de este libro, realizamos la exploración de los números cuadrados y cuáles son los requisitos que debe cumplir una construcción para ser considerado cuadrado , cuando trabajamos con las regletas se puede observar que debe tener igual número de filas y de columnas, es decir, si tiene 2 filas debe tener también 2 columnas para formar un cuadrado y el resultado de toda la región es 4. Ahora volvemos a construir un cuadrado de 3 filas y tres columnas, y observamos la cantidad de regletas que empleamos para formarlo. Poco a poco se va abstrayendo este concepto hasta generalizarlo.



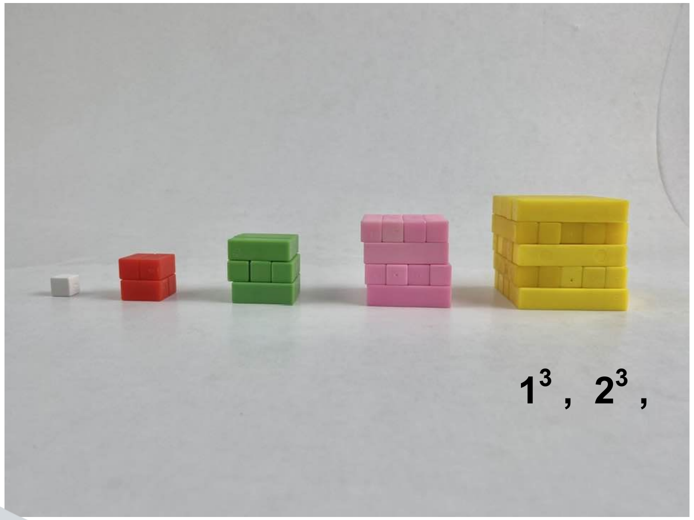
$2^2 = 2 \times 2 = 4$ Se lee: 2 al cuadrado

$3^2 = 3 \times 3 = 9$ Se lee: 3 al cuadrado

$4^2 = 4 \times 4 = 16$ Se lee: 4 al cuadra

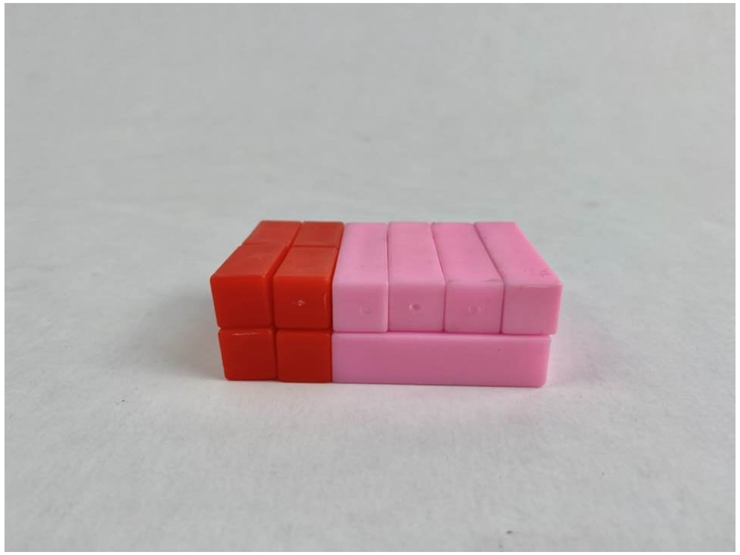
GENERALIZAR LA

En la primera sección de este libro, realizamos la exploración de los números cúbicos y cuáles son los requisitos que debe cumplir una construcción para ser considerado un cubo, cuando trabajamos con las regletas se puede observar que debe tener igual número de filas ,igual número de columnas, además igual número de altura, con esos requisitos podemos formar un cubo, luego sumamos el total de la construcción. Construyamos un cubo con 3 filas, 3 columnas y 3 de altura , el cubo resultante tendrá un total de 27 piezas. Poco a poco se va abstrayendo este concepto hasta generalizarlo : si tengo una construcción que es un cubo y tiene 1000 unidades de filas cuántos unidades de columna tendrá. Una forma de generalizar esta expresión es : $n \times n \times n = \mathbf{n^3}$



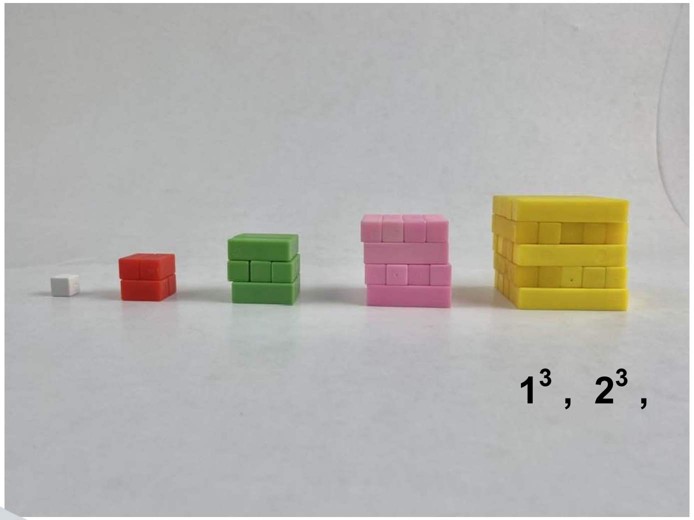
EXPLORAR LA CONSTRUCCIÓN DE PARALELEPÍPEDOS

Un paralelepípedo es un cuerpo geométrico formado por seis paralelogramos, de los cuales son iguales y paralelos los opuestos entre sí. Construiremos un ortoedro por las características de las regletas y podemos explorar a partir de él, conceptos como el área, para lo cual debemos sumar toda la superficie. Construir muchas estructuras nos permitirá generalizar y encontrar el patrón para hallar el área y el volumen de cada construcción. En el caso de el volumen relacionaremos el número de filas (F), número de columnas (C) y la altura (H). Aquí cómo hallar el Área y Volumen: Área = 2 (F.H +C.H + CF)   Volumen = C.F.H



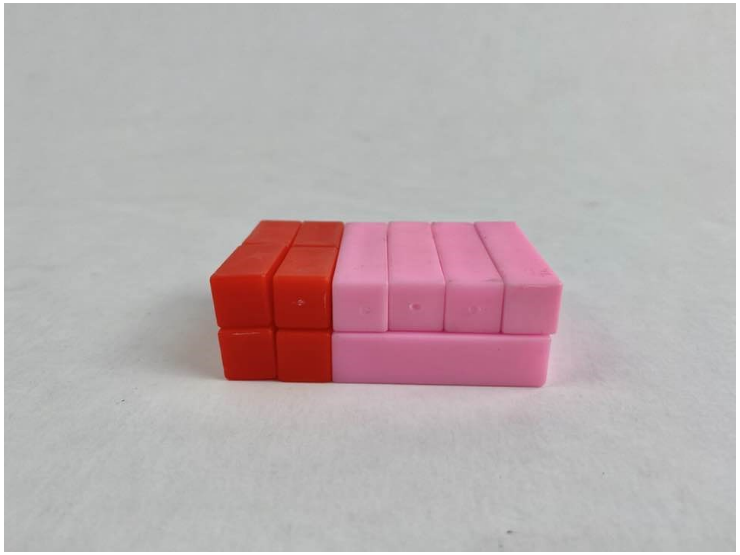
GENERALIZAR LA

En la primera sección de este libro, realizamos la exploración de los números cúbicos y cuáles son los requisitos que debe cumplir una construcción para ser considerado un cubo, cuando trabajamos con las regletas se puede observar que debe tener igual número de filas ,igual número de columnas, además igual número de altura, con esos requisitos podemos formar un cubo, luego sumamos el total de la construcción. Construyamos un cubo con 3 filas, 3 columnas y 3 de altura , el cubo resultante tendrá un total de 27 piezas. Poco a poco se va abstrayendo este concepto hasta generalizarlo : si tengo una construcción que es un cubo y tiene 1000 unidades de filas cuántos unidades de columna tendrá. Una forma de generalizar esta expresión es : $n \times n \times n = \mathbf{n^3}$



EXPLORAR LA CONSTRUCCIÓN DE PARALELEPÍPEDOS

Un paralelepípedo es un cuerpo geométrico formado por seis paralelogramos, de los cuales son iguales y paralelos los opuestos entre sí. Construiremos un ortoedro por las características de las regletas y podemos explorar a partir de él, conceptos como el área, para lo cual debemos sumar toda la superficie. Construir muchas estructuras nos permitirá generalizar y encontrar el patrón para hallar el área y el volumen de cada construcción. En el caso de el volumen relacionaremos el número de filas (F), número de columnas (C) y la altura (H). Aquí cómo hallar el Área y Volumen: Área = 2 (F.H +C.H + CF) Volumen = C.F.H



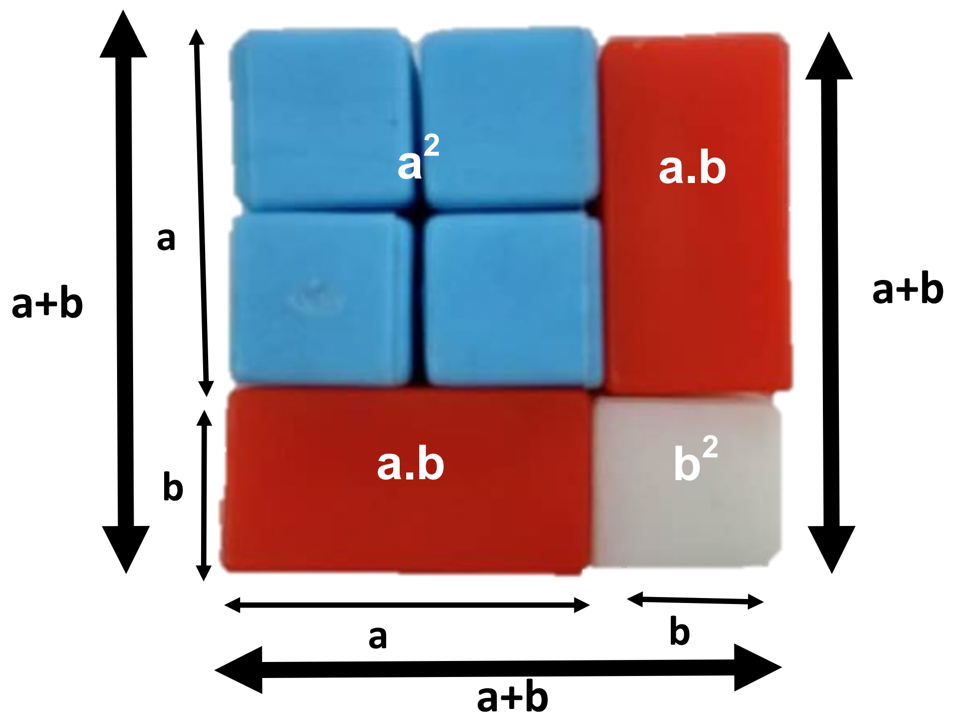
BINOMIO AL CUADRADO

En la aritmética encontramos las regularidades en las construcciones y las abstraemos, mientras que en el álgebra las generalizamos. En la primera parte vimos como las regletas cumplían una función como material concreto discontinuo y continuo. Las regletas en esta parte nos ayudarán a generalizar las propiedades de las figuras. En la siguiente construcción podemos visualizar de acuerdo a los grupos que se forman según el color: un cuadrado formado por las regletas verdes , un cuadrado formado por una regleta blanca y un cuadrado más grande formado por 4 regletas blancas, y rectángulos formados por regletas rojas.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

BINOMIO AL CUADRADO

Un binomio es una expresión algebraica que consta de dos términos que se suman o se restan y se multiplica por sí misma.. Es importante en esta etapa haber consolidado el parte y todo trabajado en el diagrama de círculos. Nos permitirá poder encontrar las relaciones algebraicas en la siguiente figura. Ahora vamos a hallar el área del cuadrado más grande, para ello le vamos a otorgar al cuadrado verde el valor de “a” y al cuadrado pequeño el valor de “b”, a partir de ello podemos hallar el área del rectángulo rojo que son dos. La relación matemática que obtenemos es un binomio al cuadrado.



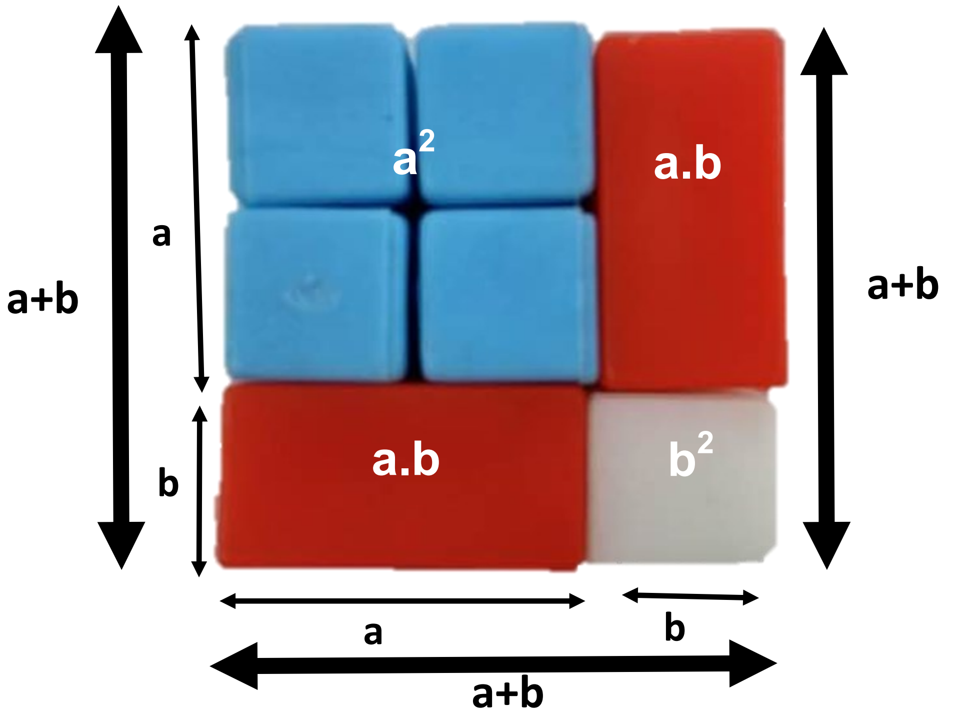
BINOMIO AL CUADRADO

En la aritmética encontramos las regularidades en las construcciones y las abstraemos, mientras que en el álgebra las generalizamos. En la primera parte vimos como las regletas cumplían una función como material concreto discontinuo y continuo. Las regletas en esta parte nos ayudarán a generalizar las propiedades de las figuras. En la siguiente construcción podemos visualizar de acuerdo a los grupos que se forman según el color: un cuadrado formado por las regletas verdes , un cuadrado formado por una regleta blanca y un cuadrado más grande formado por 4 regletas blancas, y rectángulos formados por regletas rojas.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

BINOMIO AL CUADRADO

Un binomio es una expresión algebraica que consta de dos términos que se suman o se restan y se multiplica por sí misma.. Es importante en esta etapa haber consolidado el parte y todo trabajado en el diagrama de círculos. Nos permitirá poder encontrar las relaciones algebraicas en la siguiente figura. Ahora vamos a hallar el área del cuadrado más grande, para ello le vamos a otorgar al cuadrado verde el valor de “a” y al cuadrado pequeño el valor de “b”, a partir de ello podemos hallar el área del rectángulo rojo que son dos. La relación matemática que obtenemos es un binomio al cuadrado.

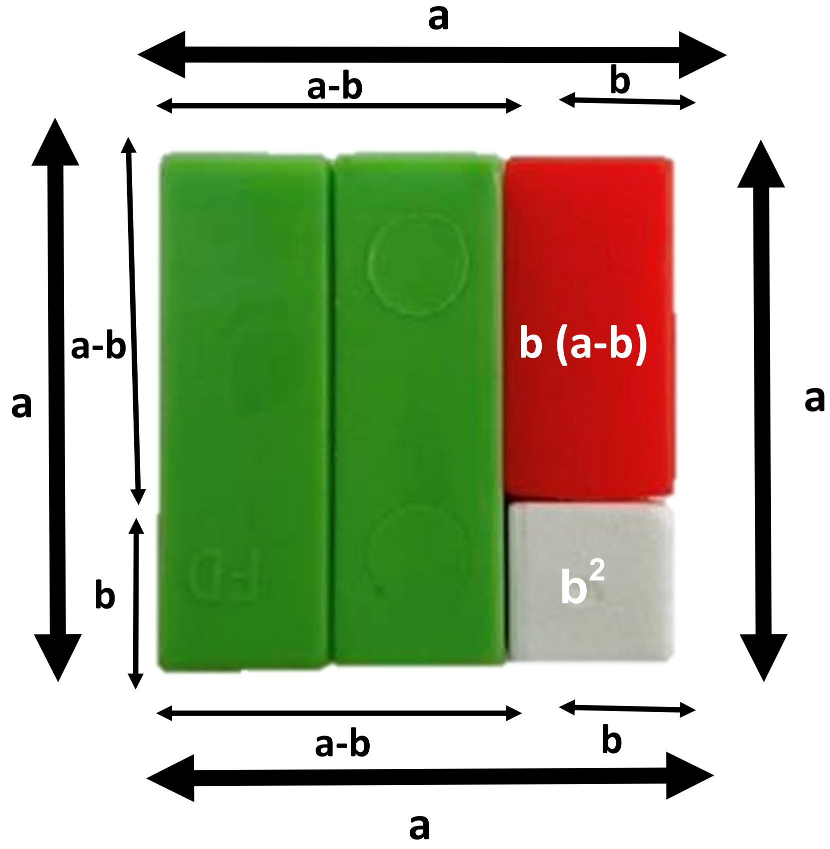


DIFERENCIA DE CUADRADOS

En la siguiente figura vamos a buscar la diferencia entre el cuadrado más grande (el todo) y el cuadrado blanco pequeño, cuyo resultado podemos observar que son el rectángulo grande blanco y el rectángulo rojo. Lo que debemos hacer es hallar el valor de las figuras en función al valor que le otorguemos a los cuadrados: el cuadrado más grande tendrá de lado "a" y el cuadrado blanco tendrá de lado "b". Para hallar el resultado tenemos que restar y factorizar y lo que obtenemos es lo que conocemos como una diferencia de cuadrados. Una actividad que podemos realizar es otorgar valores naturales y racionales a las variables.

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

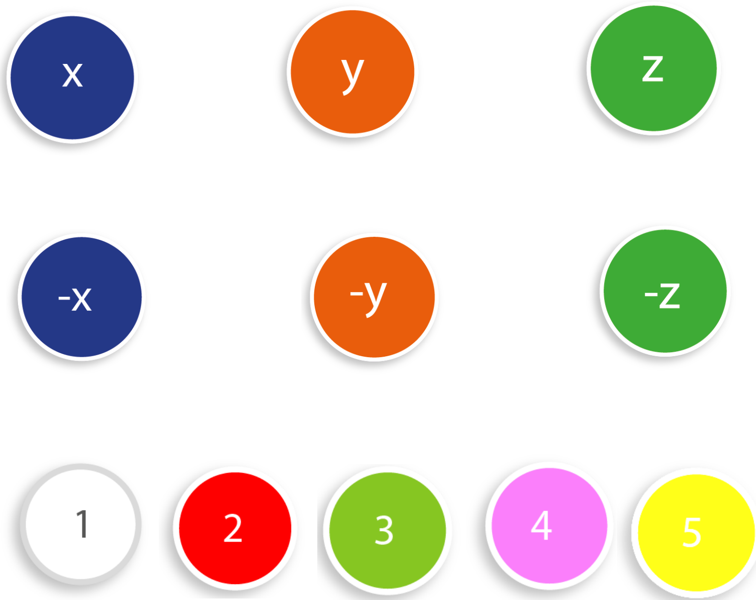


SUMA DE CUADRADOS

Aquí, podemos visualizar la suma de los cuadrados. Como actividad podemos explorar en cuanto aumenta un número cuadrado respecto a otro. Encontraremos muchos patrones y podemos generalizar cómo hallar la suma de cuadrados

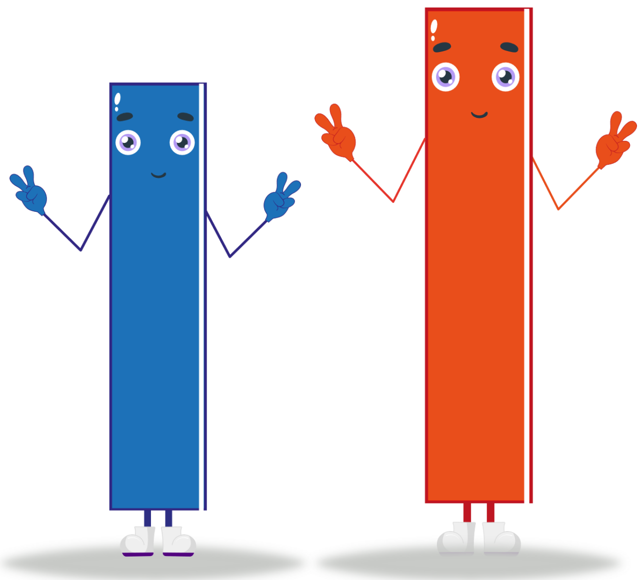
FICHAS CIRCULARES

En la imagen, se presentan fichas circulares con símbolos de números y variables para representar expresiones algebraicas. Nos permiten junto a las fichas de regletas comunicar ideas matemáticas.



CAPÍTULO IV

RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE



Competencia 25: RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE.

Consiste en que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos para el análisis, interpretación e inferencia del comportamiento determinista o aleatorio de estos usando medidas estadísticas y probabilísticas.

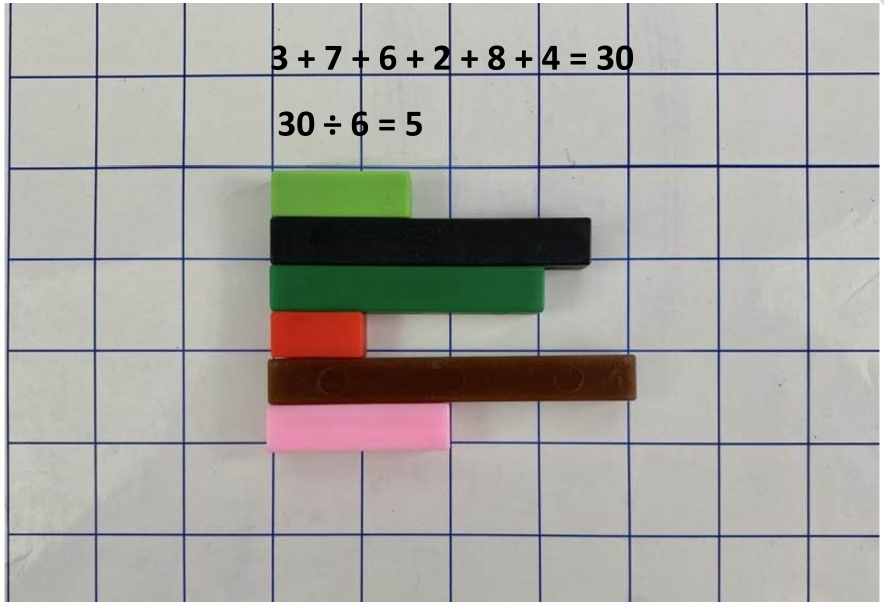
Esta competencia implica, por parte de los estudiantes, la combinación de las siguientes capacidades:

 Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas: es representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, de localización o dispersión. Reconocer variables de la población o la muestra al plantear un tema de estudio. Así también implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad. **Comunica la comprensión** de los conceptos estadísticos y probabilísticos: es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes. **Usa estrategias y procedimientos** para recopilar y procesar datos: es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas. **Sustenta conclusiones o decisiones** con base en información obtenida: es tomar decisiones, hacer predicciones o elaborar conclusiones y sustentarlas con base en la información obtenida del procesamiento y análisis de datos, así como de la revisión o valoración de los procesos” (Currículo Nacional Perú, 2016, P. 141).

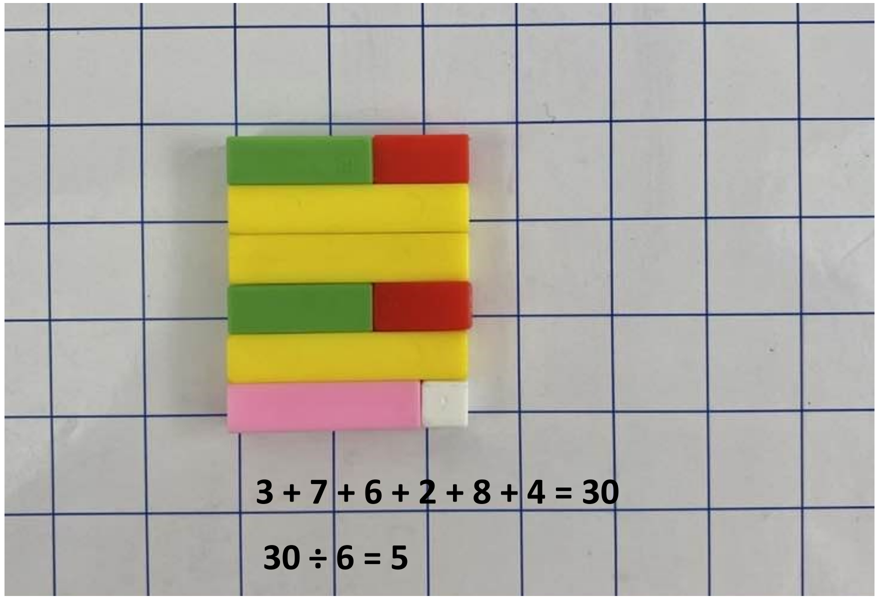
PROMEDIO

Todo análisis de datos que realicemos con los pequeños debe partir de una recopilación de información, ya sea que lo obtengamos de una situación real o de un cuadro ya establecido.
Siempre representamos con material concreto para poder visualizar mejor la información. En el siguiente ejemplo vamos a analizar un cuadro con las edades de los nietos de una familia, y construiremos el concepto de promedio utilizando las regletas. Las edades son las siguientes :

3	7	6	2	8	4



Representamos las edades con regletas, una regleta por cada año. Entonces podemos visualizar las edades con regletas. Enseñamos el promedio como un proceso en el que hacemos que todos tengan la misma cantidad. Es un proceso muy manipulativo y de exploración. Después de muchas situaciones se debe hallar las regularidades hasta llegar a concluir que este resultado se obtiene también al dividir la suma de varias cantidades por el número de sumandos .



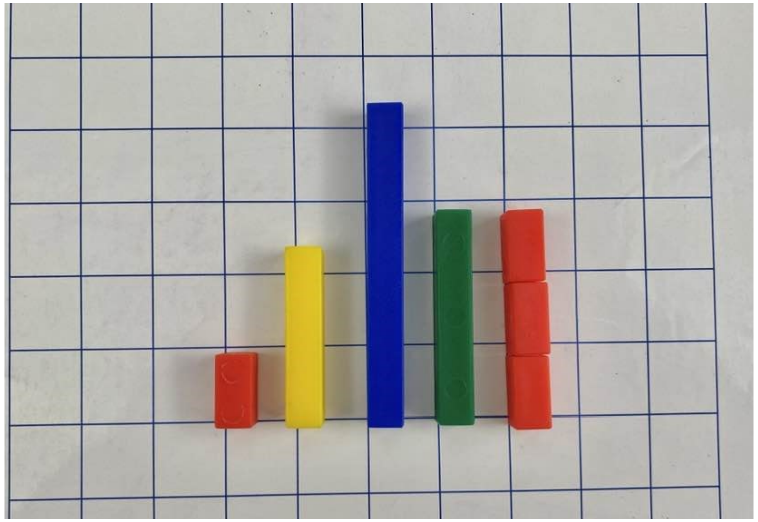
PICTOGRAMA

Los pictogramas nos permiten organizar y representar los datos . Para poder tener una mejor comprensión del rol de los pictogramas utilicemos regletas .Un pictograma es un signo claro y esquemático que representa un objeto real, figura o concepto. En la primera imagen podemos observar un pictograma en forma vertical donde se analiza la información recopilada donde cada regleta representa la edad que tiene un niño. Pudiéndose visualizar y comparar.

En la siguiente imagen podemos ver una disposición horizontal de pictograma. Se analiza la información recopilada de las propinas que recibió un niño al término de un mes (4 semanas), cada 2 soles que recibe equivale a 1 regleta en el pictograma. El valor del pictograma es simplificar un concepto muy abstracto y llevarlo a un campo visual para transmitir una idea y tomar una decisión.

N° Semana	1	2	3	4
N° soles	2	6	6	4

PICTOGRAMA



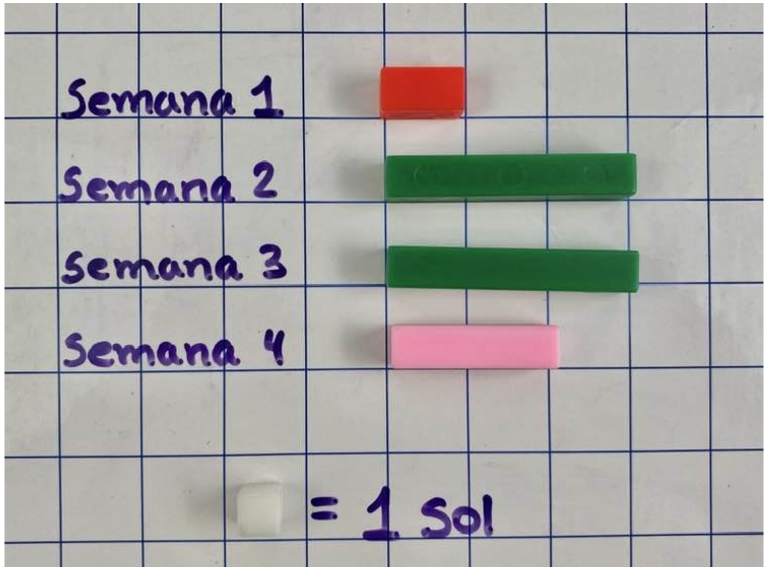
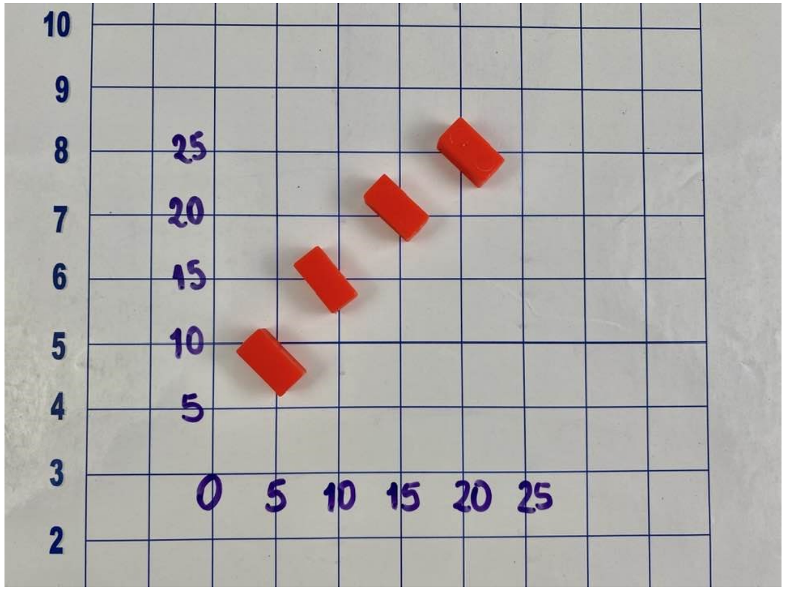


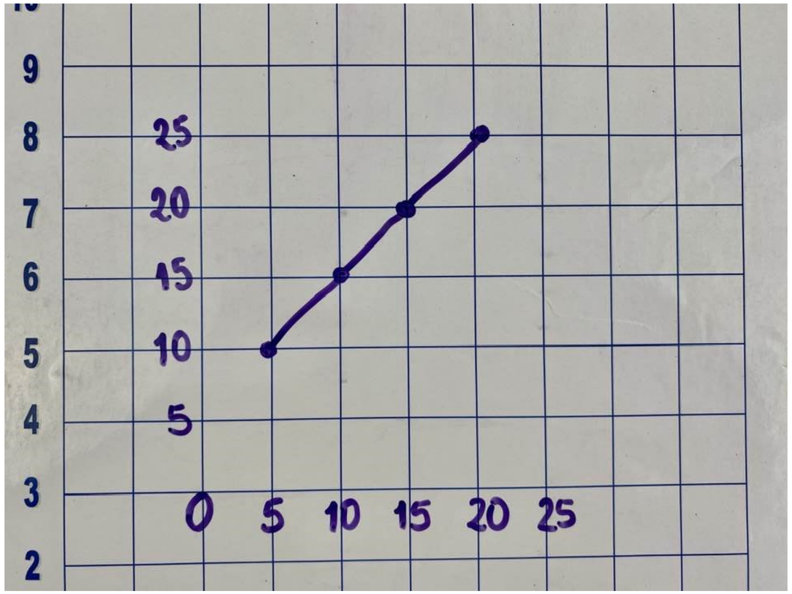
GRÁFICO DE LÍNEA CON POLICUBOS

Un gráfico de líneas nos permite poder visualizar con mayor precisión el comportamiento de un proceso. Por eso es muy importante que los pequeños sepan leer estos gráficos, más importante aún que puedan construir este concepto. Para ello vamos a extraer información de una tabla donde se ha recopilado la cantidad de saltos que puede dar un niño en 5 segundos, luego en 10 segundos , en 15 segundos y en 20 segundos. Esta información se ha plasmado en un plano cartesiano. La cantidad de saltos y los segundos se han marcado con las regletas.



Saltos	5	10	15	20
Segundos	10	15	20	25

Luego de colocar las regletas se remplazan por puntos y se puede trazar una línea desde el punto de origen hasta el final para ver la tendencia del proceso.



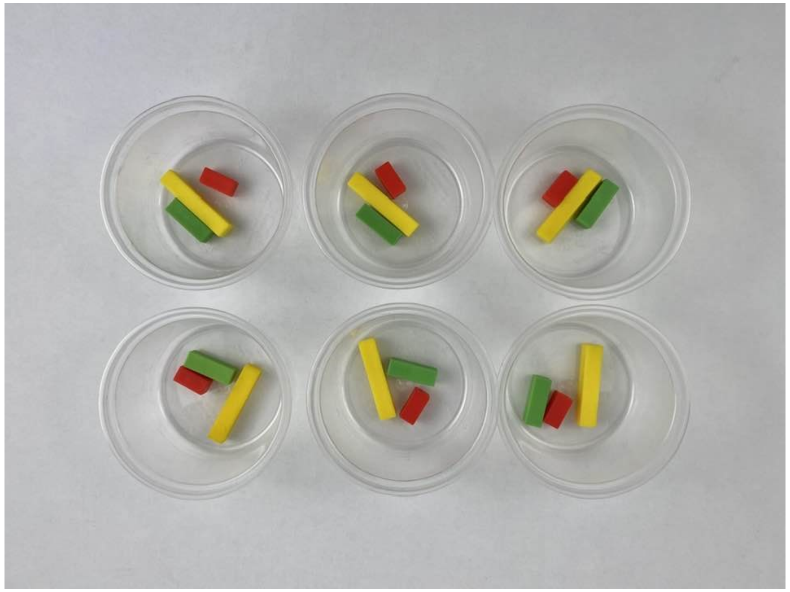
LA PROBABILIDAD

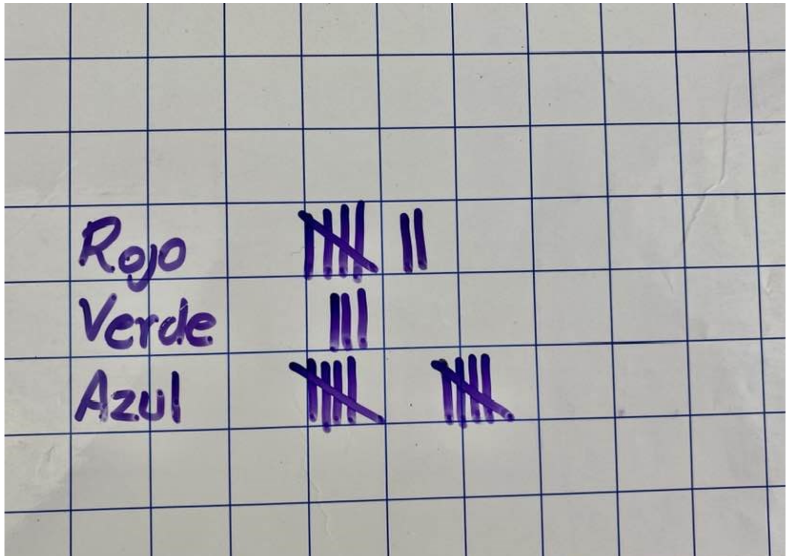
La probabilidad es el cálculo matemático de las posibilidades que existen de que una cosa se cumpla o suceda al azar. Es un concepto muy complejo, pero podemos llegar a construirlo a partir de situaciones sencillas. Para ellos podemos disponer de regletas , he utilizado tres colores: rojo, verde y azul, los he colocado en 15 vasos distribuidos como se ve en la figura. La idea es que cada pequeño pueda extraer sin ver el contenido , una regleta de cada vaso y vaya anotando el color resultante según salga en los 15 intentos (como se observa en la siguiente figura).

Este proceso es importante porque los pequeños están construyendo el concepto a partir de el sentido común. Se recomienda realizar este juego en pareja y que intercambien roles : mientras uno saca una regleta, otro anota y viceversa.

Es importante en esta primera etapa que discutan cuál salió más, cuál salió menos, por qué entre otras preguntas que aunque no parezcan relevantes, más adelante lo serán mucho.

LA PROBABILIDAD





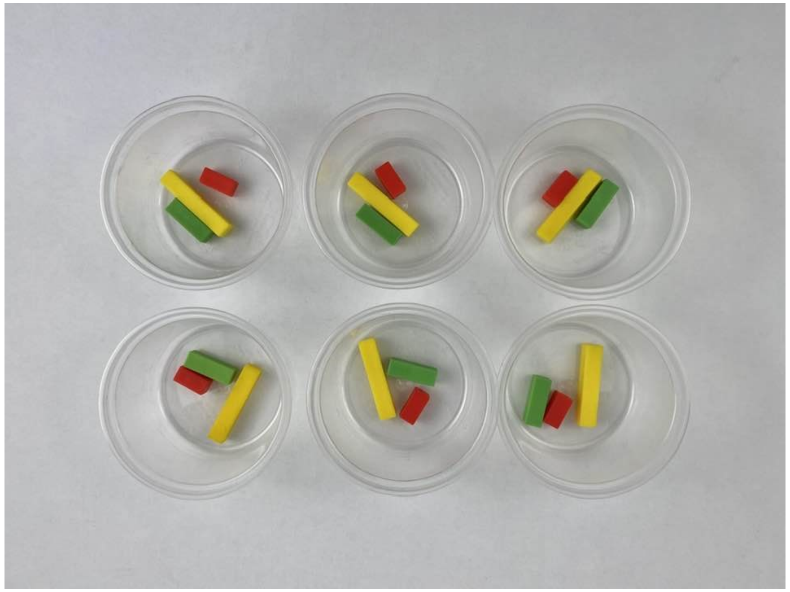
LA PROBABILIDAD

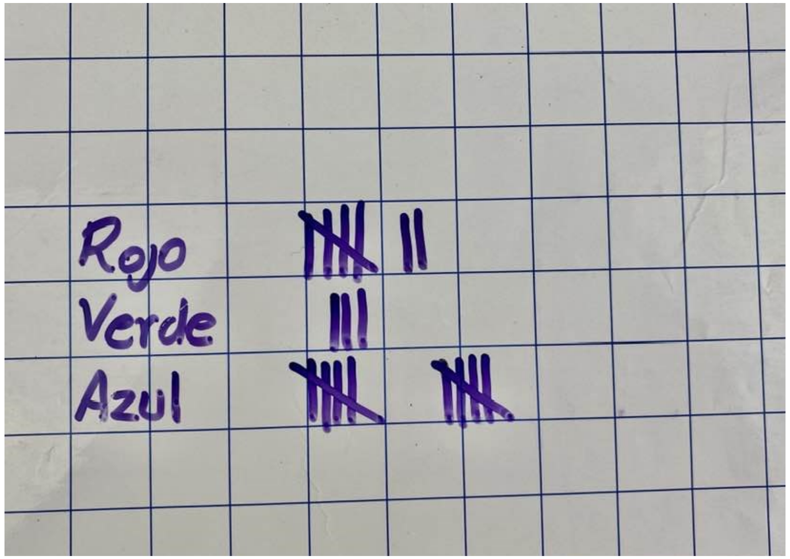
La probabilidad es el cálculo matemático de las posibilidades que existen de que una cosa se cumpla o suceda al azar. Es un concepto muy complejo, pero podemos llegar a construirlo a partir de situaciones sencillas. Para ellos podemos disponer de regletas , he utilizado tres colores: rojo, verde y azul, los he colocado en 15 vasos distribuidos como se ve en la figura. La idea es que cada pequeño pueda extraer sin ver el contenido , una regleta de cada vaso y vaya anotando el color resultante según salga en los 15 intentos (como se observa en la siguiente figura).

Este proceso es importante porque los pequeños están construyendo el concepto a partir de el sentido común. Se recomienda realizar este juego en pareja y que intercambien roles : mientras uno saca una regleta, otro anota y viceversa.

Es importante en esta primera etapa que discutan cuál salió más, cuál salió menos, por qué entre otras preguntas que aunque no parezcan relevantes, más adelante lo serán mucho.

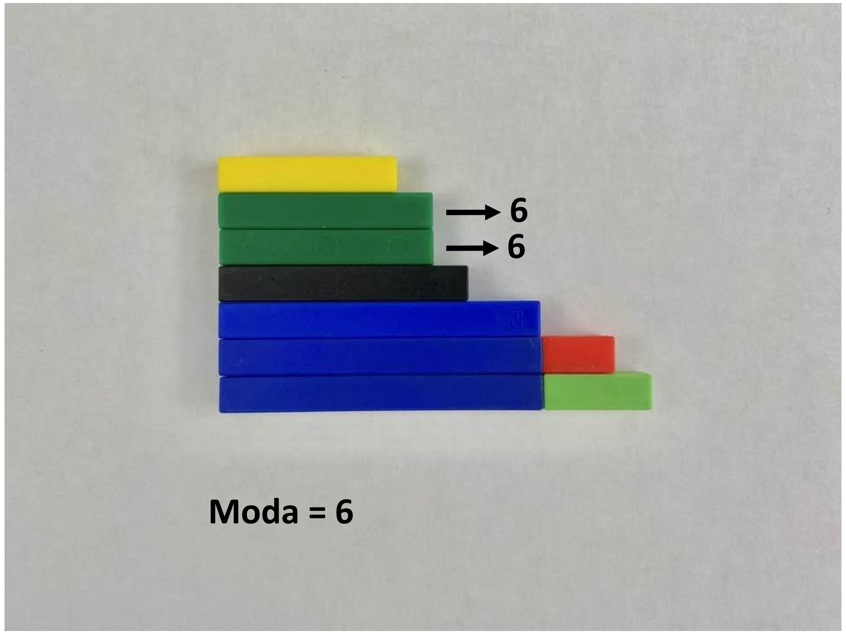
LA PROBABILIDAD





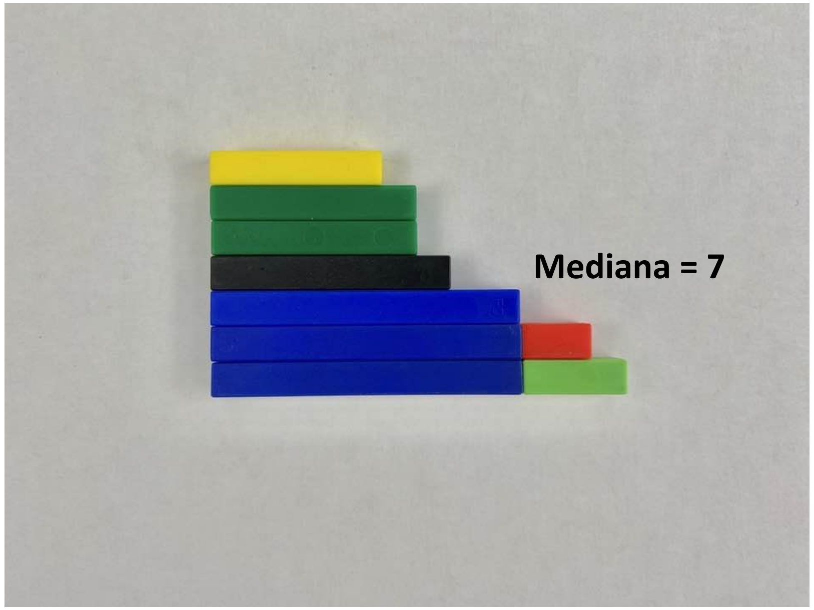
MODA

Observemos la siguiente representación de edades de niños con las regletas Cuisenaire: 5 ,6 , 6, 7, 9, 11, 12. Ahora busquemos construir el concepto de moda. Por definición la moda de un conjunto de datos es el dato que más veces se repite, es decir, aquel que tiene mayor frecuencia absoluta. En la siguiente construcción podemos ver que la edad que se repite es 6 años, así que esta es la moda.



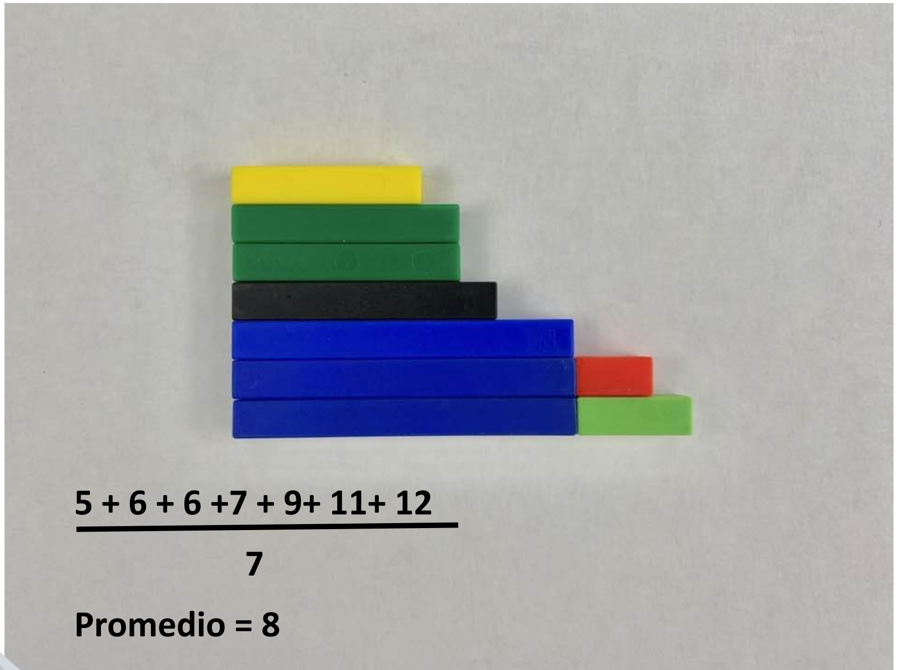
MEDIANA

Observemos la siguiente representación de edades de niños con las regletas Cuisenaire : 5 ,6 , 6, 7, 9, 11, 12. Ahora busquemos construir el concepto de mediana. Por definición La mediana es el valor que ocupa el lugar central entre todos los valores del conjunto de datos, cuando estos están ordenados en forma creciente o decreciente. En la siguiente construcción podemos ver que la edad que ocupa el lugar central es 7, así que esta es la mediana.



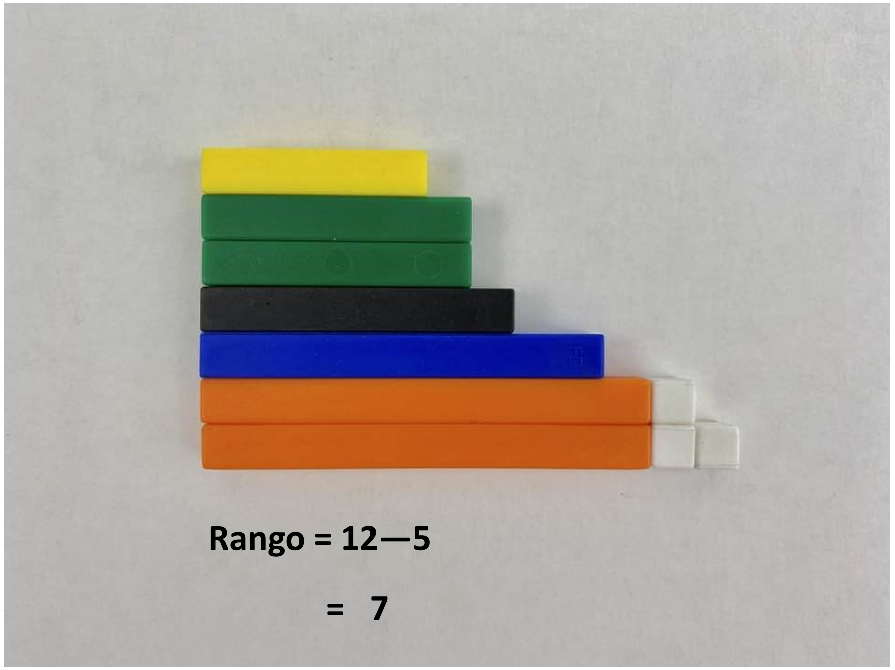
PROMEDIO

Observemos la siguiente representación de edades de niños con las regletas Cuisenaire : 5 ,6 , 6, 7, 9, 11, 12. Ahora busquemos construir el concepto de promedio. Por definición el promedio es la suma de todos los datos dividida entre el número total de datos . En la siguiente construcción sumamos todas las edades y las dividimos entre siete. Al hacerlo el resultado es 8 que es el promedio de las edades.



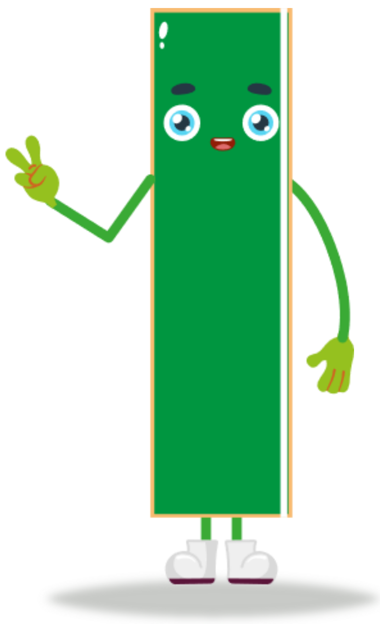
PROMEDIO

Observemos la siguiente representación de edades de niños con las regletas Cuisenaire : 5 ,6 , 6, 7, 9, 11, 12. Ahora busquemos construir el concepto de rango. Por definición el rango da la idea de proximidad de los datos a la media. Se calcula restando el dato menor al dato mayor. En la siguiente construcción podemos ver que la diferencia entre la edad mayor la menor es 7 años, así que este es el rango.



CAPÍTULO V

RESUELVE PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN



“Competencia 26: RESUELVE PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN.

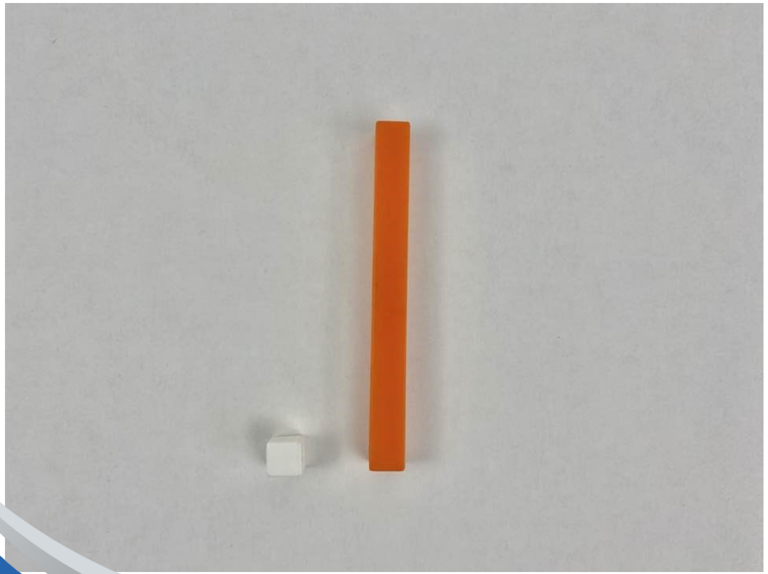
Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico.

Esta competencia implica, por parte de los estudiantes, la combinación de las siguientes capacidades:

 Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones: es construir un modelo que reproduzca las características de los objetos, su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y transformaciones en el plano. Es también evaluar si el modelo cumple con las condiciones dadas en el problema. Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas: es comunicar su comprensión de las propiedades de las formas geométricas, sus transformaciones y la ubicación en un sistema de referencia; es también establecer relaciones entre estas formas, usando lenguaje geométrico y representaciones gráficas o simbólicas Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio: es seleccionar, adaptar, combinar o crear, una variedad de estrategias, procedimientos y recursos para construir formas geométricas, trazar rutas, medir o estimar distancias y superficies, y transformar las formas bidimensionales y tridimensionales. Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los elementos y las propiedades de las formas geométricas; basado en su exploración o visualización. Asimismo, justificarlas, validarlas o refutarlas, basado en su experiencia, ejemplos o contraejemplos, y conocimientos sobre propiedades geométricas; usando el razonamiento inductivo o deductivo” (Currículo Nacional, 2016, P. 144).

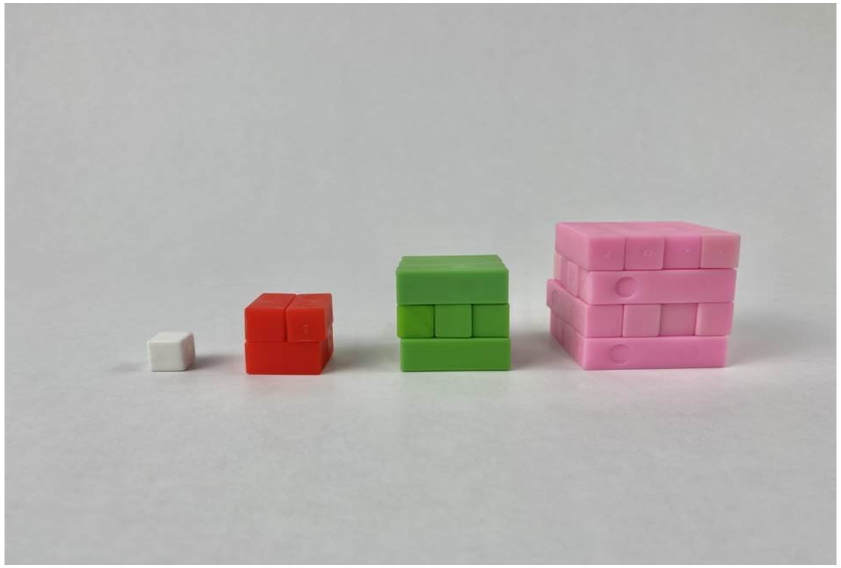
TAMAÑO

En la imagen A, se visualizan dos regletas. Uno amarillo y uno rojo. Podemos decir que la regleta amarilla es grande y la roja pequeña. Esto es porque los niños pueden visualizar a través de una abstracción empírica que un objeto es mayor en todas sus dimensiones que el otro. Por ello es importante que cuando comparemos un objeto sea mayor en todas sus dimensiones que el otro: largo, ancho, alto. Solo así podemos decir que es grande o pequeño. Si comparamos una jirafa con un elefante ¿Quién es grande? No habría forma ya que uno es más alto, pero otro es más ancho. Por ello debemos usar siempre los criterios de las tres dimensiones al comparar.



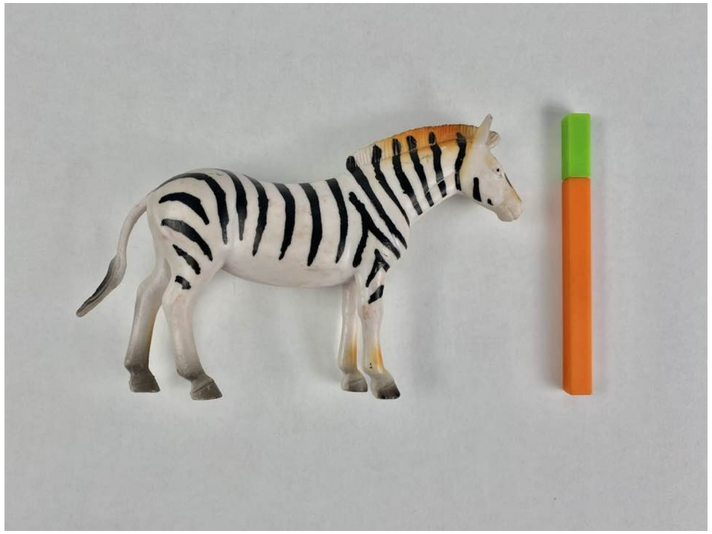
TAMAÑO

Observamos en la figura B, un cubo azul, uno amarillo y uno rojo. ¿Cuál cubo es grande? En el ejemplo anterior observamos que la regleta amarilla era el grande y la roja la pequeña; sin embargo, en esta figura observamos que la regleta azul es el grande y ya no la amarilla. Pero el amarillo si lo comparamos con el rojo sigue siendo el grande. Entonces descubrimos que los términos grande y pequeño, por sí mismos no dicen mucho. Por eso, para tener mayor precisión en el lenguaje utilizamos los términos “más grande que, “más pequeño que”: El cubo azul es más grande que el amarillo. El cubo amarillo es más pequeño que el azul, pero más grande que el rojo.



ALTURA

Cuando el término grande o pequeño, más grande o más pequeño, no basta para indicarnos la longitud y posición en la que se cuantifica, utilizamos el término *es más alto que* o *más bajo que* para medir objetos en vertical que se encuentren en su posición natural: personas, animales, objetos. Por ejemplo, comparamos en la figura A , la altura de una jirafa y un león. Las regletas son utilizados como unidad de una medida no convencional. Para luego pasar a medidas formales como el metro o pulgadas. Sin embargo, también permiten utilizarla como unidades convencionales cuando utilizan la unidad de cm como referencia de longitud con la regleta blanca.



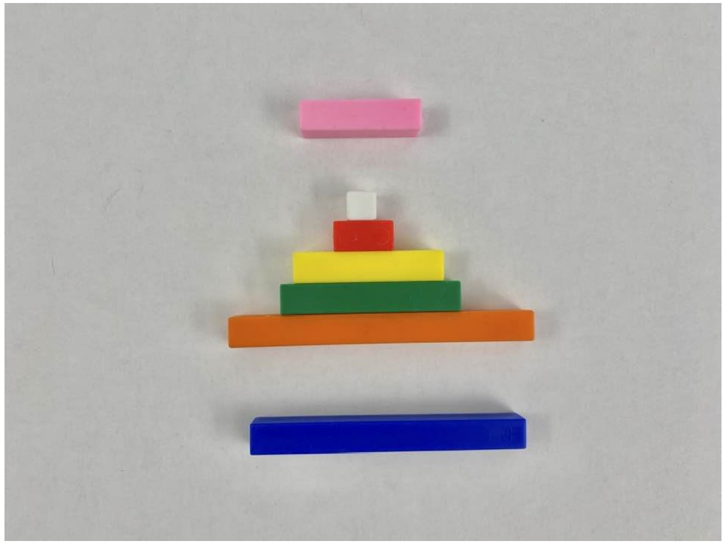
LARGO

Cuando el término grande o pequeño, más grande o más pequeño no basta para indicarnos la longitud y posición en la que se cuantifica, utilizamos el término es *"más largo que"* o *"más corto que".* En la figura B, observamos la figura de la jirafa y el león. Vamos a medir cuán largos son utilizando las regletas . Luego podemos ver que el león es más largo que la jirafa y la jirafa es más corta que el león. Las regletas son utilizadas como unidad de una medida no convencional. Para luego pasar a medidas formales como el metro o pulgadas.

NOCIONES DE POSICIÓN: ENCIMA– DEBAJO

En la imagen A, observamos unos trenes de colores junto a la mesa: verde, amarillo, rojo, azul. Para utilizar las palabras encima-debajo que son nociones de posición vamos a utilizar los siguientes criterios:

Cuando un objeto se encuentre en un plano superior, respecto a otro y lo logre tocar como es el caso del cubo amarillo respecto al verde decimos que está encima. Cuando un objeto se encuentra en un plano inferior respecto a otro y logre tocar al otro objeto, como es el caso de la regleta verde, respecto al amarillo podemos decir que se encuentra debajo.



NOCIONES DE POSICIÓN: SOBRE-BAJO

En la imagen observamos unos trenes de colores junto a la mesa: verde, amarillo, rojo, azul. Para utilizar las palabras sobre- bajo (que son nociones de posición), vamos a utilizar los siguientes criterios:

Cuando un objeto se encuentre en un plano superior, respecto a otro, pero no lo toque, como es el caso del cubo azul respecto al verde, decimos que está sobre.

Cuando un objeto se encuentra en un plano inferior respecto a otro, pero no toque al otro objeto, como es el caso de la regleta verde, respecto al azul podemos decir que se encuentra bajo.

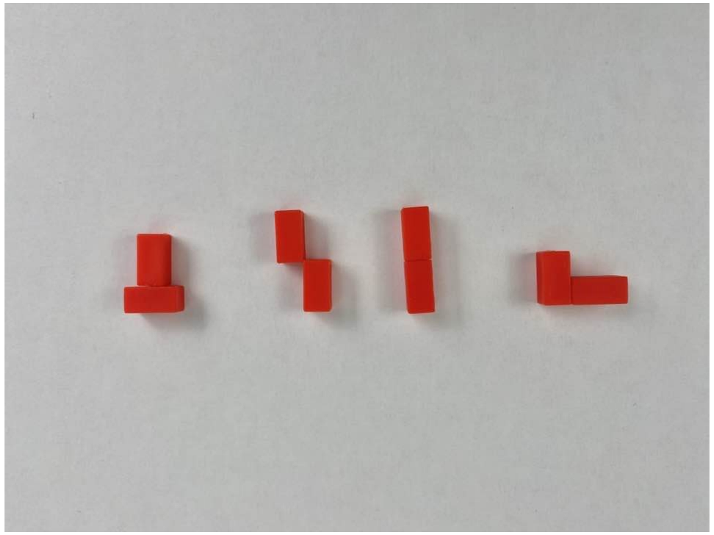
Establezcamos relaciones de posición:

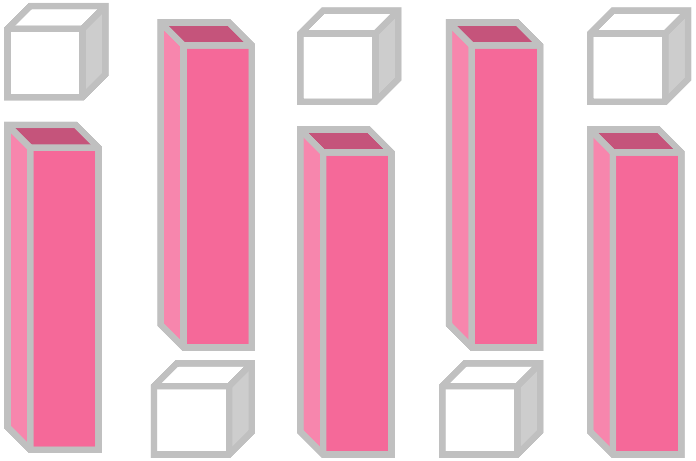
La mesa se encuentra sobre la regleta *morado.* La regleta *morado se encuentra bajo la mesa.*

La regleta *rojo se encuentra sobre la regleta verde.*

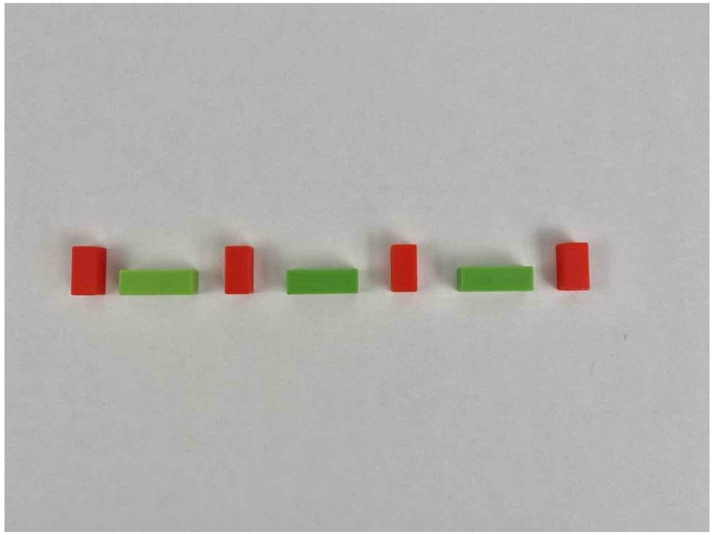
La regleta *verde se encuentra bajo la regleta roja.*

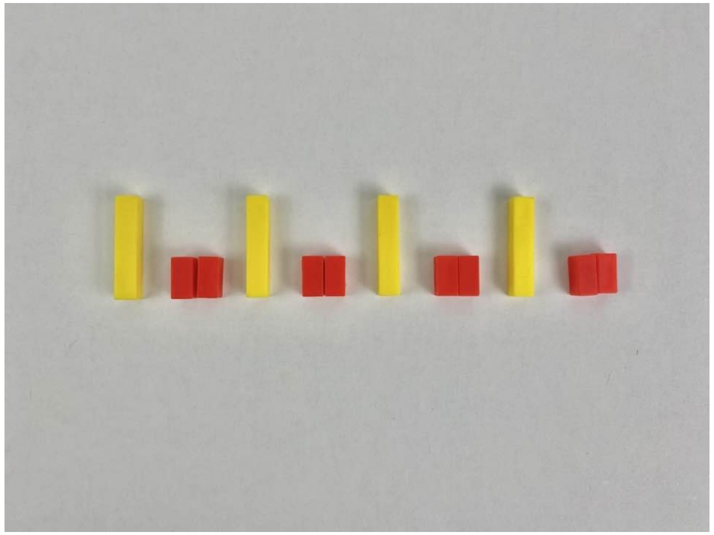
ORIENTACIÓN ESPACIAL





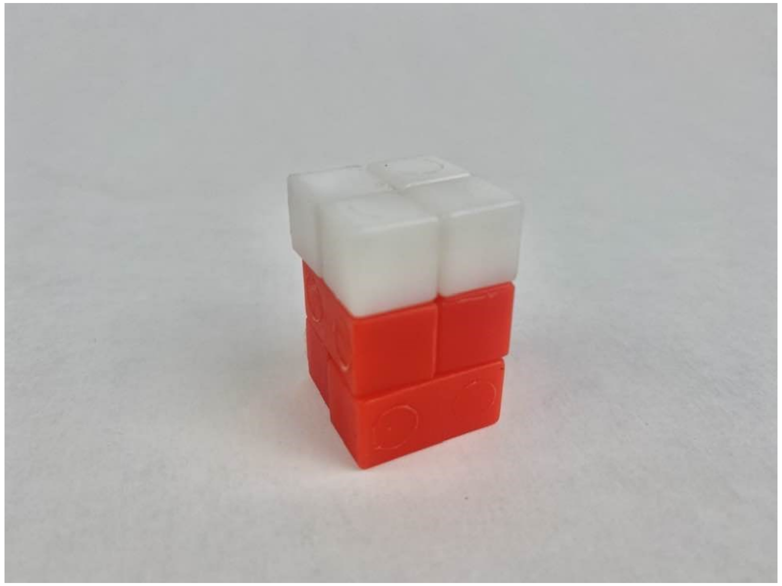
ORIENTACIÓN ESPACIAL





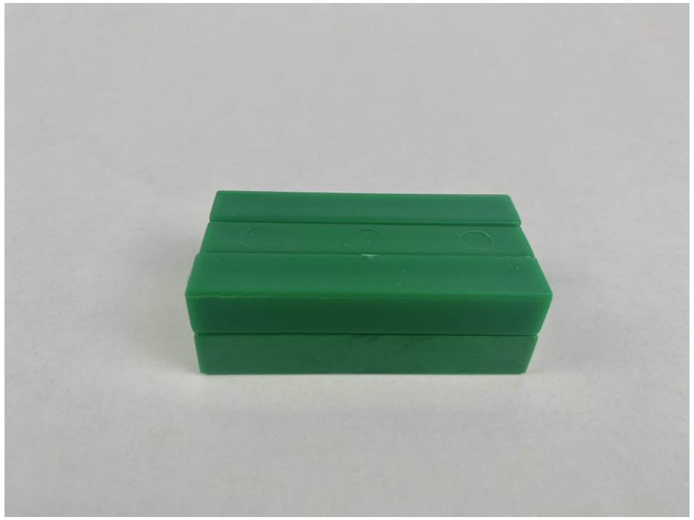
VOLUMEN

El concepto de volumen tiene que ver con hallar las medidas del espacio de tres dimensiones ocupado por un cuerpo. Luego establecer con ellas una relación. Las regletas nos ofrecen la posibilidad de comprender este concepto por sus características geométricas. En principio ya hemos trabajado el concepto de construcción de paralelepípedos y explorado sus dimensiones en términos de número de fila, columna y altura. Ahora a partir de que se nos proponga unas dimensiones : 2x2x3 vamos a realizar una construcción, que no es lo mismo que 3x2x2.



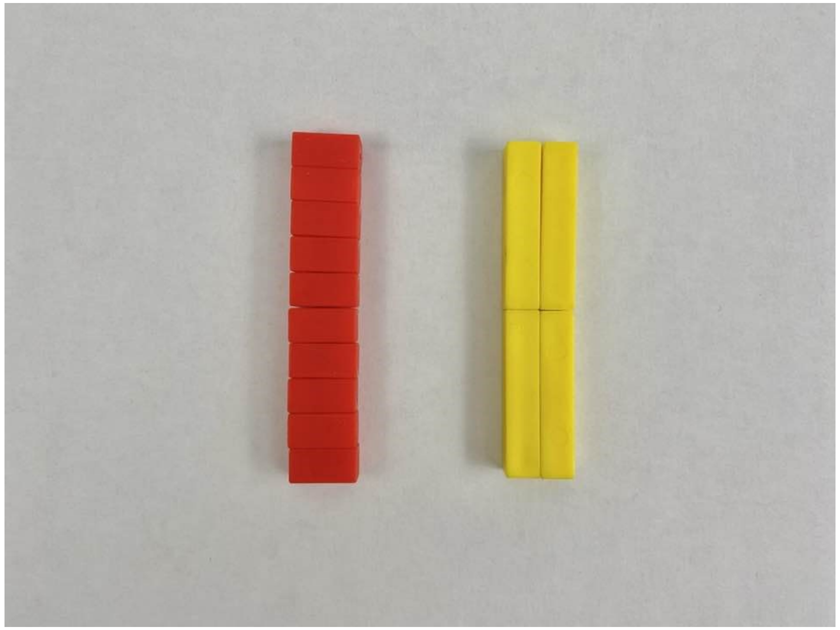
VOLUMEN

La totalidad de las regletas nos indican el volumen, además por las dimensiones podemos apreciar el concepto de orientación en el espacio de una misma estructura.



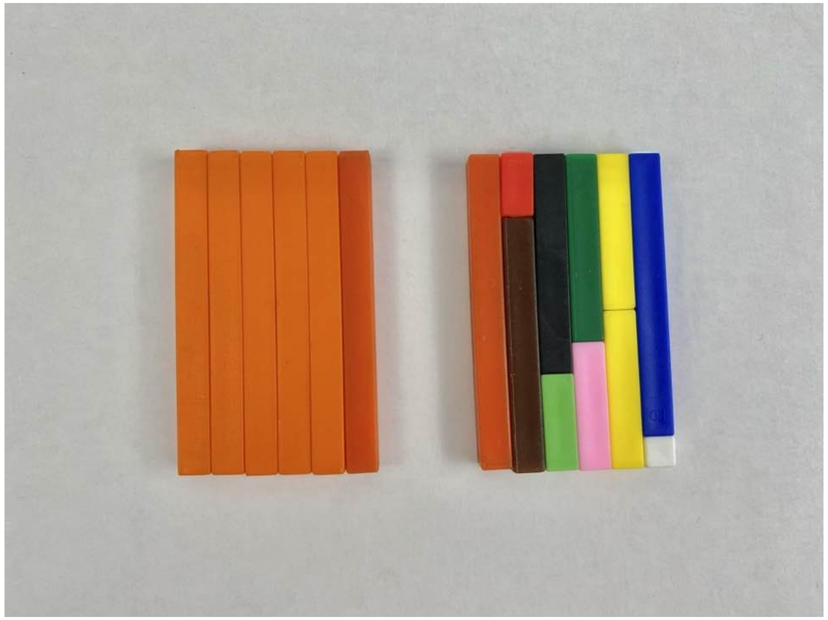
PERÍMETRO

Encontramos el perímetro cuando realizamos la suma de todas las longitudes de este conjunto de líneas. Cuando realizamos este trabajo con las regletas , podemos visualizar de una manera muy precisa el concepto de perímetro. Cada regleta representa una unidad continua no convencional para poder medir sus propios contornos. Para ello, creamos múltiples figuras donde medimos su perímetro.



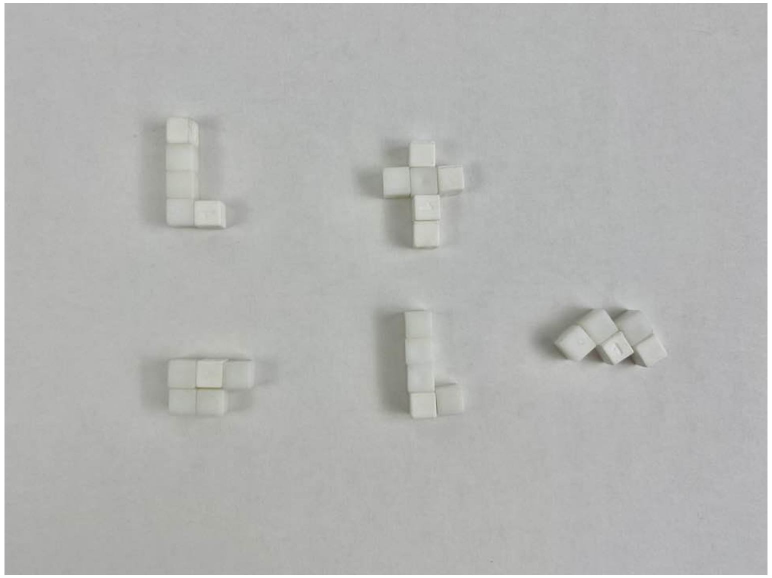
PERÍMETRO

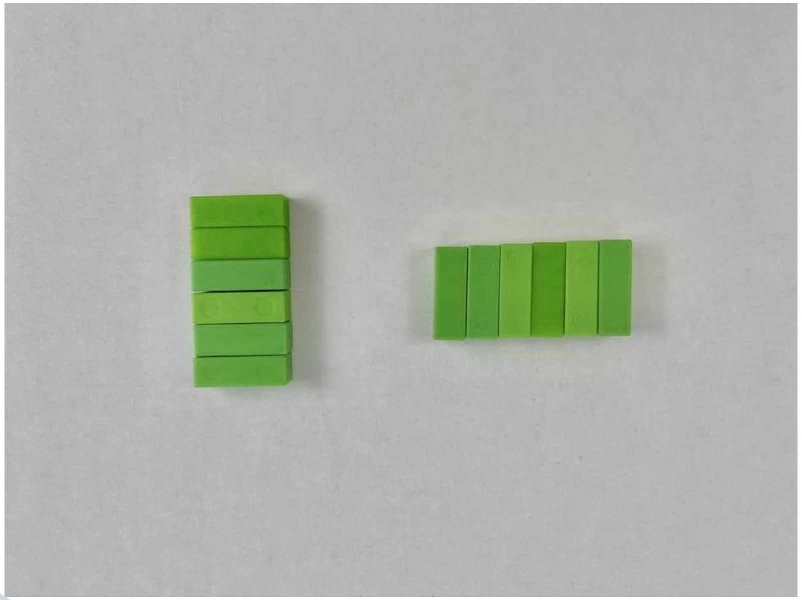
Hay actividades que son interesantes para presentar a los pequeños. Por ejemplo, en la primera columna se ven dos figuras que tienen diferente forma (rectángulo amarillo y cuadrado azul) pero poseen el mismo perímetro, que es 12. Mientras que en la columna derecha podemos ver que las dos figuras (un cuadrado rojo y una figura parecida a una “L” amarilla) poseen cuatro regletas en su estructura, pero cuando medimos, su perímetro es distinto. En el cuadrado es 8 y en la “L” es 10. Estas actividades nos permiten desarrollar el pensamiento crítico de los pequeños y desarrollar su cerebro matemático.

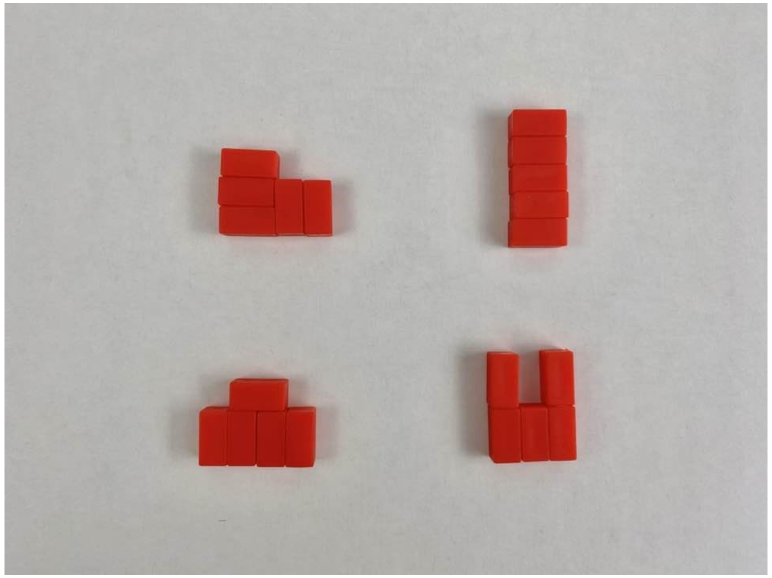


ÁREA

Se considera área a cierta superficie que está marcada por límites, además de estar etiquetada como específica para algo. Observemos las construcciones de la figura en forma de “L” y el cuadrado rojo: tienen distinta apariencia pero la misma área (4 unidades). Por otro lado, en la segunda columna podemos ver dos figuras más: el cuadrado azul y el rectángulo amarillo. Aparentemente el rectángulo parece de mayor área, pero luego de medir el cuadrado es mayor en área : tiene 9 unidades, mientras la otra figura tiene 8. Estas situaciones nos permite construir mejor este concepto.

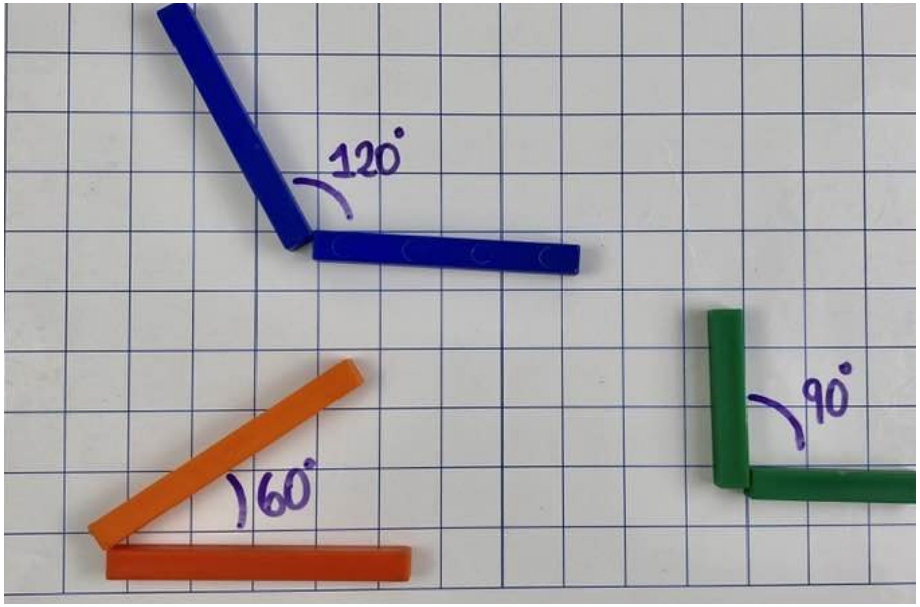






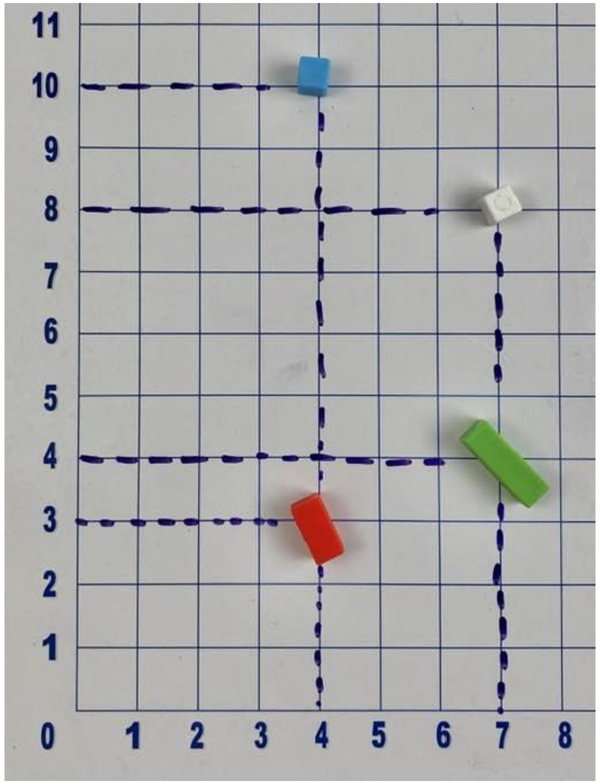
ÁNGULOS

Son una porción indefinida de plano limitada por dos líneas que parten de un mismo punto o por dos planos que parten de una misma línea y cuya abertura puede medirse en grados. Lo recomendable es empezar a trabajar este concepto con el cuerpo, luego podemos también visualizarlo sobre una superficie de cuadrícula, rotulando cada tipo de ángulo y las partes que lo conforman. Luego buscando encontrarlos en los objetos.



PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano se conoce como 2 rectas numéricas perpendiculares (una horizontal y otra vertical) que se cortan en un punto llamado origen o cero del sistema. Observen cómo las regletas nos sirven de referente, pero además también como punto para tratar de buscar las coordenadas que proponemos a los pequeños.



REFERENCIAS

Bruner, J. (1984). *Acción, Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Alianza Editorial.

Bruner, J. (1963). *El Proceso de educación*. México: Ed. UTEHA.

Bruner, J. (1999). *Educación puerta de la cultura.* Madrid: Editorial Aprendizaje Visor.

Calderón, P. (2014). *Percepciones de los y las docentes del primer ciclo básico, sobre la implementación del método Singapur en el colegio Mario Bertero Cevasco de la comuna de isla de Maipo* (Tesis de maestría). Universidad de Chile, Santiago.

Dienes, Z. (1971). *An experimental study of mathematics learning. Londres*: Hutchinson & Co.

Dienes, Z. (1978). *La Matemática Moderna en le Enseñanza Primaria*. Barcelona: Editorial Teide S.A.

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Martín, A. (2020). Algoritmos OAOA. Recuperado de https://www.youtube.com/results?search_query=TONY+OAOA

Skemp, R. (1920). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.

Soto, J. (2019). Policubos y el construccionismo matemático. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/wp-content/uploads/2023/12/LIBRO-POLICUBOS-Y-EL-CONSTRUCCIONISMO-MATEMATICO.pdf

Soto. J. (2023). Base Soto y los números binarios. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/wp-content/uploads/2023/09/BASE-SOTO-Y-LOS-NUMEROS-BINARIOS-SOTO-02.pdf

Soto. J. (2023). Soto Inka: La Yupana Huarochirana. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/wp-content/uploads/2023/12/SOTO-INKA-LA-YUPANA-HUAROCHIRANA-2024-2.pdf

REFERENCIAS

Foto de Emile Georges Cuisenaire (1965). *Recuperado de https://www.researchgate.net/figure/Cuisenaire-with-his-famous-rods-ca-1965_fig1_335170817*

Soto. J. (2023). Matemáticas Divertidas. Recuperado de https://tocandolosnumeros.com/

Coriat. M. (1997). Materiales, recursos y actividades. Un Panorama. En L. Rico (Coord). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: Horsori.

LIBRO “REGLETAS CUISENAIRE”
2024, Juan Carlos Soto Fernandez

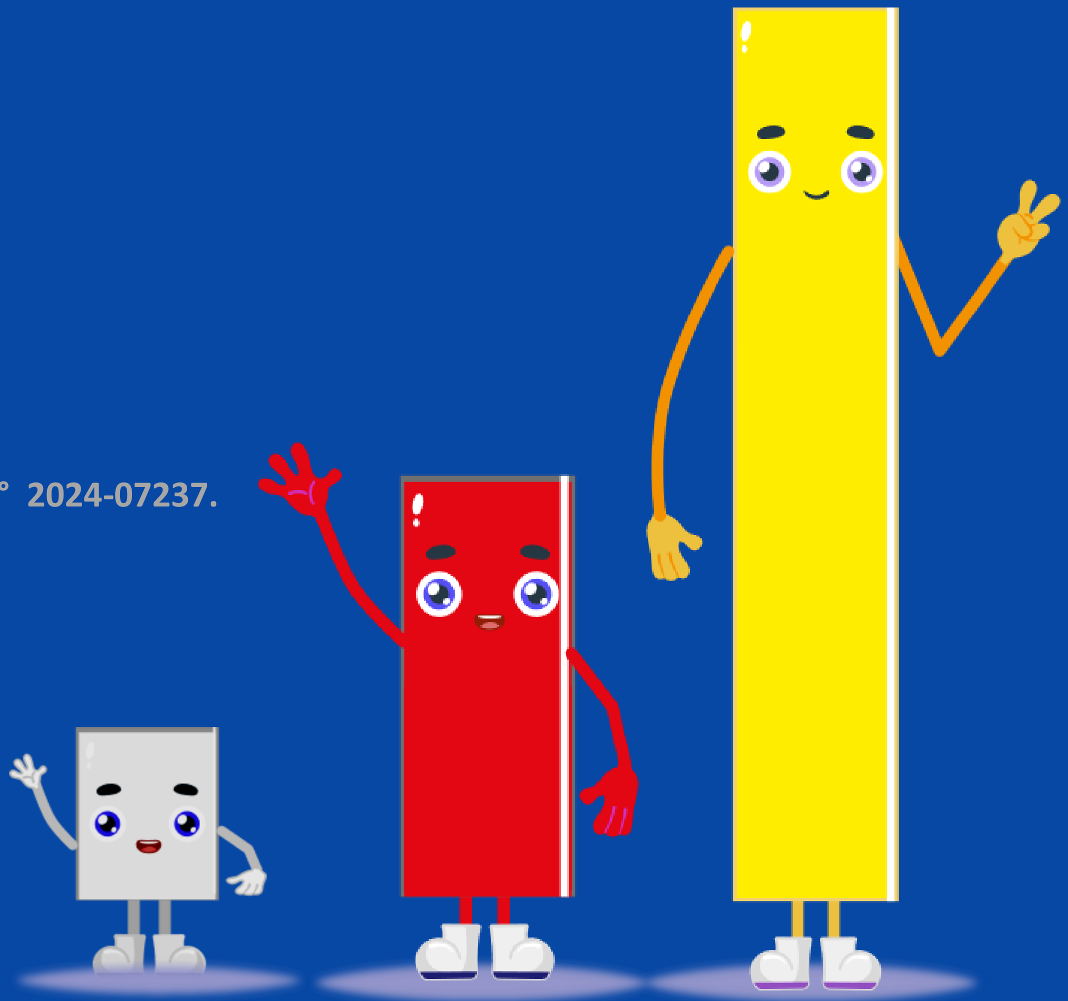
Autor-Editor:

JUAN CARLOS SOTO FERNANDEZ
Asoc. Virgen del Carmen La Era Ñaña MZ i LT 24
LURIGANCHO– CHOSICA

1a. edición – julio 2024
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-07237.

gerencia@tocandolosnumeros.com
www.tocandolosnumeros.com
Asoc. Virgen del Carmen La Era Ñaña MZ i LT 24
LURIGANCHO– CHOSICA.

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS.
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL



Para solicitar la implementación del programa Tocando los Números, comunicarse a gerencia@tocandolosnumeros.com
Web: www.tocandolosnumeros.com - Telf.: (+51) 949 747 242 Lima-Perú.