Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos

David Barba Uriach

Cecilia Calvo Pesce

Índice

Introducción

Este documento relata las propuestas expuestas en una charla y un taller realizados en el curso "Elementos y razonamientos en la competencia matemática" en el marco de los cursos de verano de la UIMP del año 2009. Se analiza el estado actual de la enseñanza de los algoritmos, su relación con la *aritmética mental* como alternativa de organizador principal del currículum y el papel de los algoritmos estándar en las clases del futuro.

1. Cálculo mental y aritmética mental

Desde los cálculos que viven en los recuerdos de nuestra infancia, en la que los maestros recitaban operaciones encadenadas y nos preguntaban el resultado, el cálculo mental ha ido evolucionando. Desde ser un mero entreno para ayudar a la eficacia del cálculo escrito, a la propuesta conocida como de "desarrollo del sentido numérico" que mira la enseñanza de la aritmética como una actividad de resolución de problemas, han pasado muchos años. En estos momentos, las propuestas más innovadoras se inclinan por trabajar la llamada *aritmética mental* que implica el desarrollo de capacidades en los alumnos de manera que puedan resolver cualquier problema aritmético al margen de los algoritmos de lápiz y papel.

1.1. El cálculo mental

El término cálculo mental está fuertemente arraigado en la enseñanza de las matemáticas. Muchos de nosotros, ya de cierta edad, recordamos series de operaciones recitadas por el maestro o la maestra del tipo 5+2-3+17-1x4:2 (operaciones encadenadas) que teníamos que responder. Estos tipos de ejercicios nos han ido acompañando, cambiado presentaciones adecuándolas a las modas del momento: las series de operaciones fueron sustituidas por juegos, adivinazas, magia, etc., pero el objetivo era el mismo: alcanzar un dominio importante en la manipulación de operaciones básicas para poder ser competentes en el ejercicio del cálculo. Sin embargo, el objetivo principal era externo al cálculo mental ya que en el fondo lo único que se buscaba era su dominio para atacar, con garantías de éxito, el cálculo escrito.

Esta característica del cálculo mental realizado solamente como servicio al cálculo escrito conlleva que solo se efectúe con “números pequeños” dejando de lado la posibilidad de resolver cálculos más complejos ya que se considera que son tarea propia de los algoritmos escritos. Por ejemplo, si miramos en los cuadernos de alumnos de Primaria la resolución de un problema que involucra la suma 24+15, es altamente probable que nos encontremos con la utilización del algoritmo.

$$\begin{array}{r} 24 \\ +15 \\ \hline 39 \end{array}$$

Pero este cálculo es perfectamente realizable utilizando estrategias de cálculo mental:

$$24+10=34$$
$$34+5=39$$

Hay otras maneras de resolver problemas o situaciones reales mucho más ricas matemáticamente que los algoritmos, maneras que implican el uso y la aplicación de conceptos y propiedades, la generación de estrategias personales, la resolución de un cálculo como un reto, como un problema a resolver y que dan a la matemática una imagen muy distinta de la de “esto se hace así”. Esta idea ha sido desarrollada en otros países con notable éxito y concretamente en Holanda los investigadores del “Freudenthal Institute” la han bautizado con el nombre de *aritmética mental*.

1.2 Aritmética mental, un cambio de mentalidad

Para introducir la idea de aritmética mental reproducimos la definición del Instituto Freudenthal

> Aritmética mental es el cálculo interno con representaciones numéricas mentales en lugar de escritas. Esto incluye el uso de datos memorizados y las propiedades de los números y las operaciones y las maneras en que éstas se relacionan. Sin embargo, no es lo mismo que hacer cálculos y escribir algunos pasos cuando sea necesario. No debería ser visto como lo opuesto a la aritmética escrita[1].

[1] Esta definición forma parte del glosario de Van der Heuvel-Panuizen (2001).

La implantación de la aritmética mental como eje central de la enseñanza del cálculo implica definir unos nuevos contenidos centrados en estrategias, potenciando el aprendizaje funcional de las propiedades de las operaciones y la estructura del sistema posicional.

2. Estrategias aditivas y aritmética mental

Cuando los alumnos se enfrentan por vez primera a un problema aritmético, algunas de las estrategias de resolución que ellos proponen (estrategias emergentes) no son generalizables a otros valores más que los concretos que el problema involucra. Sin embargo, cuando las estrategias que emergen de la primera discusión del problema tienen mayor potencialidad son institucionalizadas ante el grupo, para promover su utilización (estrategias institucionalizables). Esta institucionalización de algunas de las estrategias emergentes no debería implicar la completa pérdida de aquellas otras estrategias emergentes que sin ser generalizables a todo tipo de números son eficaces en algunos casos (estrategias alternativas).

Entre las estrategias institucionalizables nos encontramos con:

- la *estrategia de descomposición*, que es básica ya que es utilizada en los algoritmos escritos de lápiz y papel, y
- la *estrategia de saltos*, de una gran potencia didáctica ya que nos acerca al uso de la *línea* numérica y favorece el descubrimiento de nuevas estrategias, como veremos más adelante.

La diferencia básica entre las estrategias institucionalizables y las alternativas reside en que mientras las primeras pueden aplicarse siempre, en el caso de las estrategias alternativas son los números y las relaciones entre ellos los que "invitan" a utilizarlas (por ejemplo sumar 39 llama a sumar 40 y restar 1).

Analizaremos la estrategia de saltos y la de descomposición a partir de ejemplos de suma y resta.

Ejemplo a). Disponemos de dos monederos en los que solamente hay billetes de 10 € y monedas de 1 €, uno de los monederos tiene 34 € y el otro 23 €. Pedimos a los alumnos que nos digan de cuánto dinero disponemos en total: una de las resoluciones más comunes es la de contar primero los billetes (30+20=50) después las monedas (4+3=7) y finalmente sumar los resultados parciales (50+7=57).

Ejemplo b). Ponemos en un cajón 34 €, le damos 23 € a una alumna, le pedimos que los ponga en el cajón y le pedimos que diga cuánto dinero habrá al final en el cajón. Es posible que algunos alumnos resuelvan el problema con la estrategia del ejemplo *a*, pero otra estrategia posible es la siguiente: empieza a contar a partir del 35 y añade el otro número por partes: primero los billetes (34+20=54) y después las monedas (4+3=7), aunque el orden pude ser el inverso.

En el primer caso (descomposición), para sumar dos números se descomponen los dos y se suman billetes por un lado (decenas si queremos llamarlo así) y euros por el otro (unidades), mientras que en el segundo caso (saltos) se deja fijo el primer número y solo se descompone el segundo para añadirlo por partes (billetes y monedas).

Expresado en el nivel de cálculo formal las dos resoluciones serían las siguientes:

a) 34 + 23	b) 34 + 23
30+20=50	34+20=54
4+3=7	54+3= 57
50+7=57	

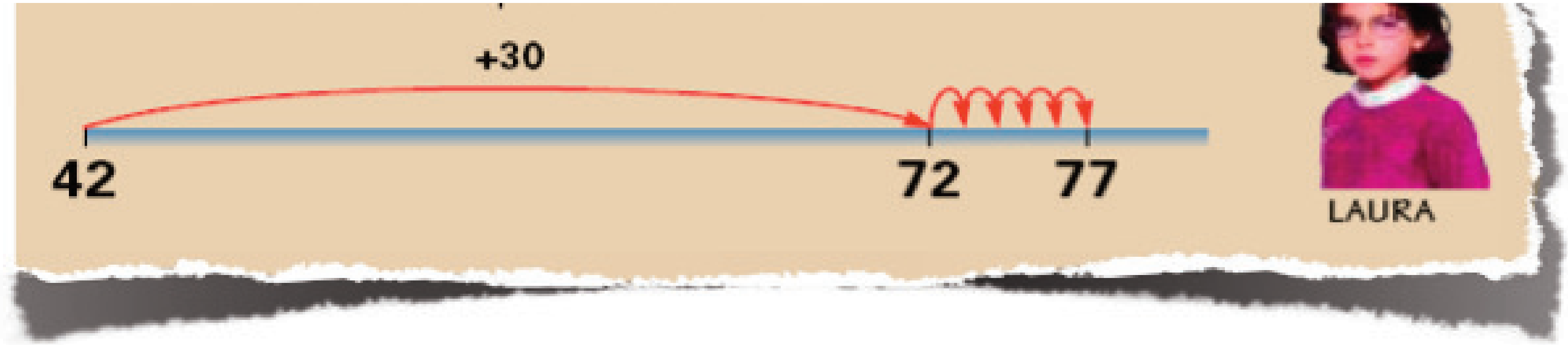
2.1 Estrategia de saltos

Una de las diferencias entre el antiguo cálculo mental y la aritmética mental estriba en que mientras el primero no permitía el uso de anotaciones escritas, en la aritmética mental esta restricción no se da, ya que debido a la complejidad de los cálculos es necesario anotar resultados parciales. Por otra parte, el uso de *contextos*, como por ejemplo el dinero en los ejemplos anteriores, y *modelos estructurados*, como la *línea numérica vacía*, forman parte del dispositivo didáctico de la aritmética mental.

Ejemplo 1: sumar sobre la línea numérica[2]

Se plantea la suma 42+35 utilizando como modelo la línea numérica vacía, es decir, una línea en la que no se preestablece la posición de los números, sino que solamente se respeta el orden en la recta y la direccionalidad de las operaciones (para sumar avanzar y para restar retroceder).

[2] Ejemplo extraído de BARBA, D.; BARBA C. & CALVO, C. (2005). *3x6.mat Quaderns d'estratègies de càlcul.* Editorial Barcanova.

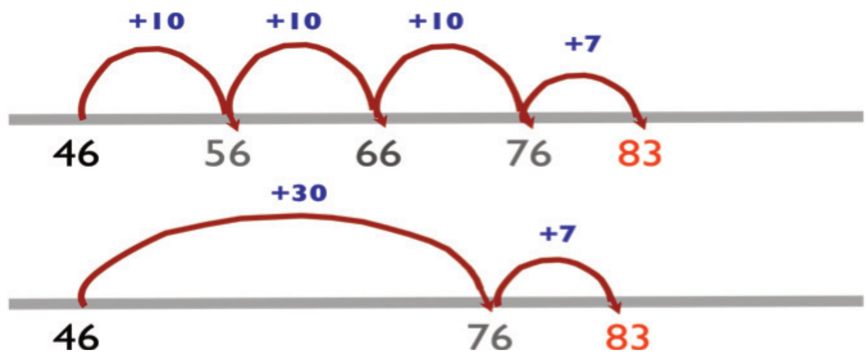


Los alumnos colocan el 42 en la línea y luego aplican la estrategia de saltos, en este caso, sumando primero 30 y anotando el resultado, y después 5 más. Puede observarse cómo para hacer el segundo paso, en el caso de la imagen, la alumna no suma directamente 5 (dibujando una sola flecha) sino que se apoya en el conteo uno a uno, lo que da a la maestra una información muy valiosa sobre su manera de contar (en este caso de uno en uno).

Ejemplo 2: diferentes estrategias para capacidades distintas

Presentamos unos ejemplos para ilustrar la evolución del proceso de suma utilizando la estrategia de saltos.

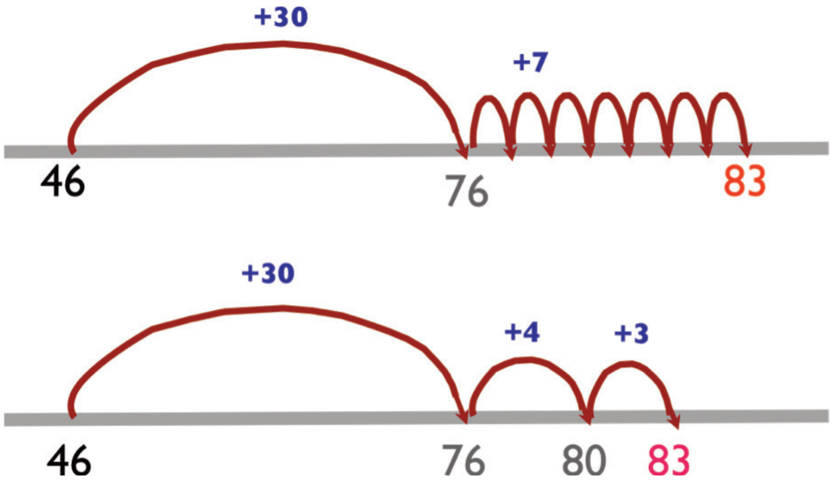
Comprimir procesos: 46 + 37



Las figuras presentan dos soluciones distintas para realizar la misma suma y representan las producciones de alumnos distintos con capacidades distintas: mientras la primera puede indicar que necesita "pararse" al contar de 10 en 10 para sumar 46+30, la segunda indica que lo calcula mentalmente en un solo salto de manera automática.

Ejemplo 3: el "paso del 10"

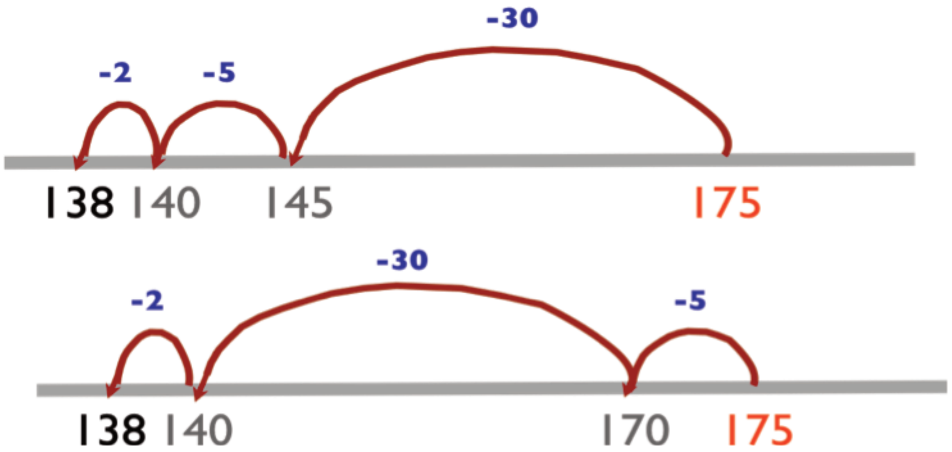
El "paso del 10" es otra de las estrategias importantes a adquirir que en la línea numérica vacía se pone de manifiesto de manera clara:



Nos encontramos con una diferencia básica entre los dos procedimientos anteriores: mientras el primer alumno utiliza el conteo para sumar 76+7, el segundo realiza el "paso del 10", que es como llamamos genéricamente a hacer un salto a la siguiente decena, que en este caso es el 80. Para realizar este "paso del 10" el alumno necesita dominar las descomposiciones de los dígitos y del 10. Estos prerrequisitos y la estrategia del "paso del 10" han de formar parte de nuestros objetivos si queremos que dejen de contar con los dedos.

Ejemplo 4: un indicador de habilidades

175-37



Este ejemplo presenta una resta en la que calculan el resultado partiendo del 175 y saltando. Los dos procesos son distintos y seguramente dependen en gran parte de las habilidades previas de los resolutores: mientras el primero para saltar hacia atrás parte directamente del 175 (165, 155, 145) el segundo va a buscar (¿desesperadamente?) la decena más próxima para poder contar con más facilidad hacia atrás 170, 160, 150, 140. Una de las cosas que nos podría indicar el uso de esta estrategia sería que el segundo alumno presenta dificultades en contar decenas hacia atrás si el número de las unidades es distinto de cero, pero esto solo es un indicador de una dificultad que debe ser confirmada por el maestro.

Si nos referimos a la estrategia de saltos en general, uno de los puntos más importantes es el siguiente: si se resolviera la resta planteada utilizando el algoritmo estándar, esta resta sería *con llevadas.* Utilizando la línea numérica el procedimiento no tiene ninguna característica especial. La dificultad "llevadas" es propia de la ejecución de los algoritmos pero no de la operación.

Queremos destacar finalmente dos características importantes de los modelos que hemos podido observar en los ejemplos: por una parte *ayudan a pensar* ayudando a los alumnos a ordenar sus cálculos y seguir el proceso con anotaciones intermedias, y por la otra *ayudan a comunicar.* Solamente mirando la producción del alumno queda de manifiesto la estrategia usada y esto nos permite organizar de manera fácil discusiones de estrategias entre los propios alumnos, debates colectivos utilizado la pizarra para conseguir que cada alumno vaya mejorando sus procesos, convirtiéndolos en más *eficaces* gracias a la interacción que permite el uso de la línea numérica.

2.2 Estrategia de descomposición

Una caja contiene 25 lápices y otra 15, ¿Cuántos lápices hay en total?

$$\begin{array}{r} 25 \\ +15 \\ \hline 40 \end{array}$$

Una caja contiene 25 lápices y otra 15, ¿Cuántos lápices hay en total?

Empezaremos con una pregunta con la que queremos poner de manifiesto la riqueza de calcular utilizando la aritmética mental: antes de continuar leyendo, piense sobre las diferencias entre los dos tipos de resolución que aparecen más arriba (el primero responde a una solución algorítmica y el segundo a un proceso de aritmética mental).

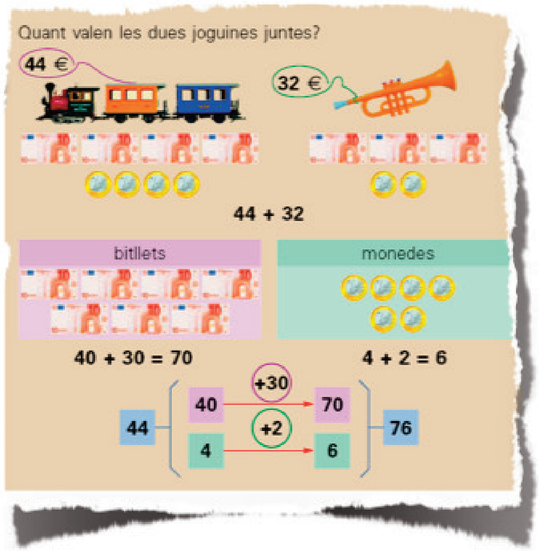
Como se ve, en los dos casos los alumnos saben resolver correctamente el problema, pero mientras el primero lo resuelve aplicando el algoritmo, el segundo (a quien se le ha propuesto el problema antes de explicar el algoritmo) recurre a sus conocimientos previos sobre el sistema posicional para resolverlo, *representando* las decenas por "palos", las unidades por puntos y aplicando de manera intuitiva la *estrategia de descomposición*.

Podríamos decir que convierte un problema en dos: el primero saber cuáles son las acciones necesarias para resolverlo (en este caso la suma o "juntar") y el segundo solucionar la operación con estrategias emergentes.

Del modelo del dinero al algoritmo en columnas

De la misma manera que la línea numérica es un modelo que "llama" a la utilización de la estrategia de saltos, el contexto del dinero crea un modelo que conduce a la utilización de la estrategia de descomposición, ya que cuando tenemos que contar cuánto dinero hay entre dos sobres juntamos los billetes por un lado y las monedas por otro, para contarlos separadamente. En la siguiente figura puede observarse el proceso desde el contexto creado a partir de un problema, hasta la representación simbólica[3].

[3] Ejemplo extraído de BARBA, D.; BARBA C. & CALVO, C. (2005). *3x6.mat Quaderns d'estratègies de càlcul.* Editorial Barcanova.



A medida que los números van aumentando las representaciones cambian, así, por ejemplo, para sumar 152 + 376 descomponen los números y los colocan de forma ordenada para facilitar las sumas parciales.

152	100	50	2
376	300	70	6
	400	120	8

400 + 120 + 8 = 528

Una vez entendido y dominado el proceso podemos pensar en simplificar el modelo colocándolo en vertical, pasando ya al mundo de los algoritmos, es lo que llamamos *algoritmo en columnas* que en este caso solo implica a los alumnos un cambio en la presentación gráfica.

Su estructura es cercana al algoritmo estándar con la diferencia básica que se empieza por la izquierda y que los alumnos trabajan utilizando cantidades y no dígitos (dicen 100+300=400 en lugar de 1+3=4) lo que da mucha transparencia al procedimiento (esta noción de transparencia se volverá a tratar al final del escrito).

$$\begin{array}{r} 152 \\ +376 \\ \hline 400 \\ 120 \\ 8 \\ \hline 538 \end{array}$$

2.3 Pequeño homenaje a Antonio Martín

Finalmente, y hablando de suma en columnas, queremos rendir un homenaje a Antonio Martín Adrián poniendo como ejemplo uno de sus "vídeo-artículos", como él los llama, que nos mostró ya hace más de 10 años cómo sumaban sus alumnos del CEIP Aguamansa de Tenerife haciendo gala de un sentido numérico envidiable.

Visualice el siguiente vídeo: cálculo en columnas.wmv.mp4

2.4 Aspectos relevantes de la aritmética mental en situaciones aditivas

El hecho de utilizar estas estrategias para solucionar los cálculos en nuestras aulas implica realizar actividades de una enorme riqueza numérica, ya que:

- Para calcular es necesario descomponer los números en unidades y decenas, conceptos que habitualmente se trabajan de manera independiente pero simultánea, y el uso de estas estrategias da funcionalidad a estas descomposiciones.

- Continuamente están realizando conteos de 10 en 10, de 100 en 100 que, al igual que las descomposiciones, normalmente se trabajan aparte y sin que quede demasiado claro su funcionalidad.

- Al contrario que en el algoritmo estándar de la suma, los alumnos suman cantidades y no dígitos. Se evita la situación confusa que se da en clase cuando mientras se trabaja numeración, el 3 de 34 vale por 30, y cuando se efectúan los algoritmos el 3 de 34 vale por 3, el 2 de 23 vale por 2, dicen "2 y 3, cinco" mientras que en aritmética mental se suman 20 y 30 en coherencia con el sistema de numeración.

- Al sumar primero las cantidades de magnitud superior obtenemos una primera estimación del resultado, cosa que permite un control del error, información que los algoritmos escritos no comunican.

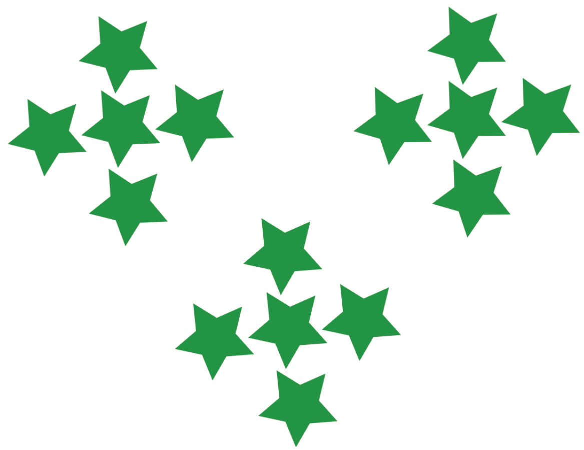
3. Estrategias multiplicativas y aritmética mental

En el punto anterior hemos presentado las dos estrategias generales pero hemos desarrollado mucho más la estrategia de saltos ya que el tema de suma y resta es el campo en el que se desarrollan la mayoría de sus aplicaciones con toda su riqueza y posibilidades. Veremos ahora la parte de multiplicación y, asociado directamente a ella, el papel sumamente importante de la estrategia de descomposición.

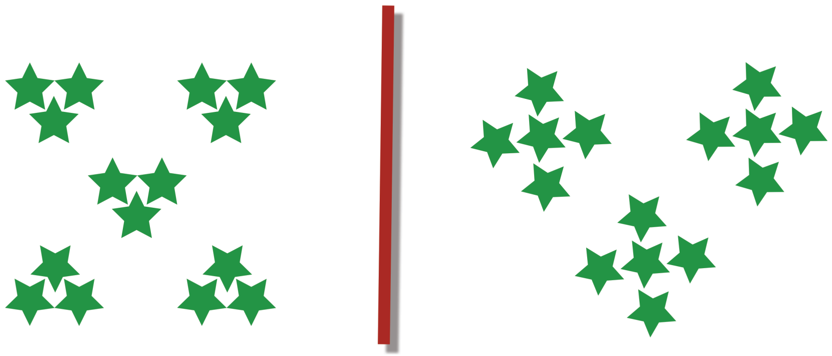
3.1 Multiplicación: contextos, propiedades y modelos

Podríamos decir que en el fondo la multiplicación aparece por una necesidad de contar rápido: en lugar de contar de uno en uno una serie de objetos, los juntamos en grupos del mismo número de elementos y después efectuamos el conteo por grupos: contar de dos en dos, de cinco en cinco o de 10 en 10, son generalmente los más usados. Así pues el contexto elegido normalmente para la presentación de la multiplicación es el de *suma reiterada* (4+4+4+4+4 o "cinco veces cuatro") y es lógico que sea así ya que es el contexto más asequible.

Un ejemplo de actividad de esta primera fase correspondiente al nivel manipulativo es: disponemos de una cantidad de objetos determinada depositados encima de la mesa y para poder contarlos los disponemos en grupos de igual número de elementos (ver figura). Una vez hecho esto se pide a los alumnos que expliquen qué es lo que ven (tres grupos de cinco objetos) y posteriormente les pedimos que los cuenten observando si lo hacen contando de uno en uno (conteo), lo que nos indica que funcionalmente aún no intuyen el concepto de multiplicación, o de cinco en cinco, lo que muestra una primera aproximación a la multiplicación como suma reiterada.



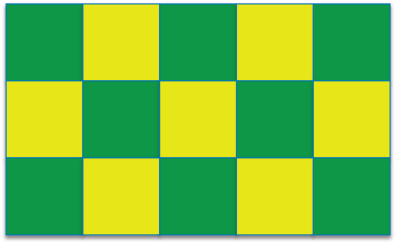
Sin embargo, cuando posteriormente para facilitar el aprendizaje de las tablas queremos utilizar la propiedad conmutativa (7x3 es lo mismo que 3x7), el modelo "suma reiterada" queda un poco artificial. Veámoslo en el siguiente ejemplo:



Visualmente, para un alumno, 3x5 y 5x3 no representa "lo mismo", de la misma manera que puestos en contexto no es lo mismo que para viajar se utilicen cuatro coches con dos personas en cada coche que dos coches con cuatro personas en cada uno. No es lo mismo, como mínimo es más caro. Si queremos que nuestros alumnos construyan las matemáticas y no las vivan como una cosa arbitraria tenemos que buscar contextos que respondan a lo que queremos desarrollar.

3.2 El modelo rectangular: propiedades y ayuda a la compresión del algoritmo

La introducción de un segundo modelo, llamado *modelo rectangular,* nos ofrece un contexto distinto que nos ayudará a abrir puertas que con la suma reiterada no son asequibles. La pregunta a formular sería: ¿cuántas baldosas forman este mosaico?

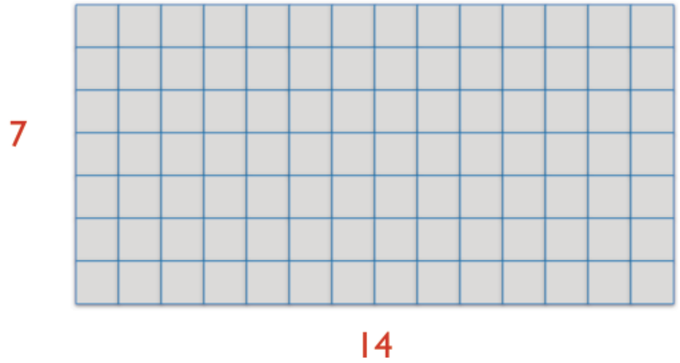


Seguramente muchos de los alumnos, que parecía que dominaban el concepto multiplicación, volverán al conteo uno por uno en lugar de multiplicar 5x3. Sin embargo, creemos que es necesario introducir este nuevo modelo de multiplicación ya que nos abrirá la puerta a aspectos que nos facilitarán el aprendizaje de las propiedades, empezando por la propiedad conmutativa: si giramos el mosaico no cambia y podemos deducir que 3x5 (tres de alto por cinco de largo) no cambia en referencia al 5x3 (cinco de alto por tres de largo).

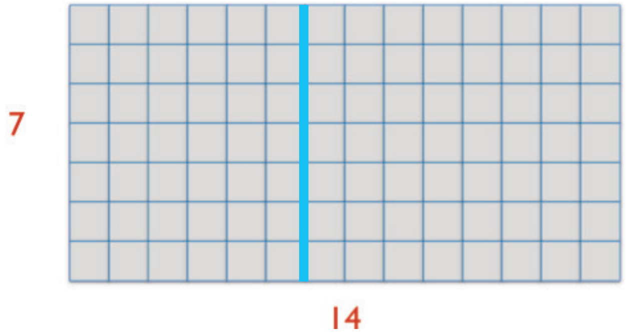
La segunda aplicación de este modelo la encontramos cuando queremos plantear ejercicios que superen los cálculos propios de las tablas de multiplicar, como por ejemplo las multiplicaciones del tipo 7x14.

Aquí queremos destacar la filosofía de la aplicación de la aritmética mental: la aparición de una dificultad nueva no es solucionada por la maestra sino que su papel se limita a proveer modelos, hacer preguntas y guiar a los alumnos y alumnas hacia el descubrimiento de *algoritmos personales*. Es decir, cambia el orden clásico que consistía en explicar primero el algoritmo para después plantear ejercicios por el de proponer primero la situación para poder construir el algoritmo personal con posterioridad.

Vamos a ver un ejemplo. La situación que se plantea es la siguiente: ¿cuántos cuadraditos ocupa éste rectángulo?



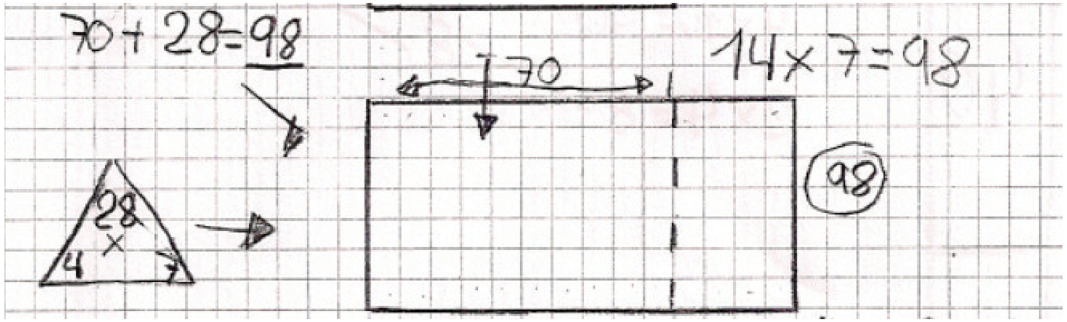
Una de las respuestas comunes que el alumnado propone es la de dividir el mosaico en dos o más partes y después calcular resultados parciales, como se ve en esta figura, para posteriormente calcular el resultado a partir de productos parciales, y después sumar.



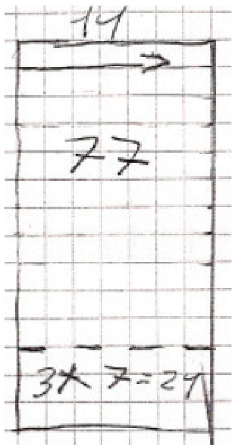
- 7x6 = 42
- 7x8= 56
- 42+56= 98

Estas primeras estrategias emergentes son correctas y representan una forma personal de resolver la multiplicación pero hay elementos importantes a tener en cuenta en el momento de recoger y discutir las estrategias:

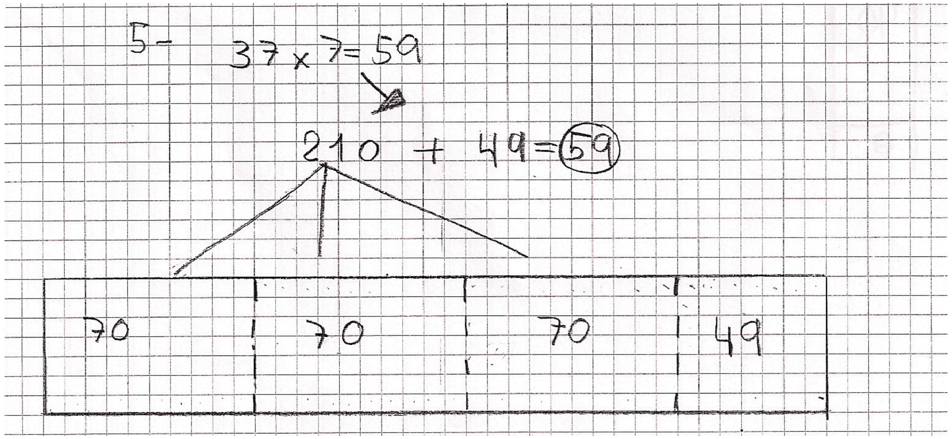
- La utilización de la *propiedad distributiva* de manera funcional por parte del alumnado.
- La importancia de la descomposición del multiplicando en la forma 10a+b (34=30+4), ya que es la utilizada en el algoritmo estándar y seguramente la más eficaz a la hora de calcular la suma final debido a que involucra sumandos acabados en cero.



Sin embargo, una cosa es la eficacia y otra las particularidades de los alumnos. La alumna cuyo trabajo se ve en la siguiente figura, al dominar la multiplicación por 11, ha preferido calcularlo así:



Al analizar el trabajo de otro alumno en relación a un nuevo ejemplo: 37x7, se observa que para multiplicar por 30 reitera tres veces la multiplicación por 10, y esto podría indicar que aún no domina la multiplicación por decenas (3x20, 6x70 etc.) y que será necesario intervenir en este sentido.



3.3 Algoritmos personales y algoritmos estándar

El aprendizaje clásico de la aritmética se gestiona a partir de pequeños compartimentos que se trabajan por separado: contar hacia adelante o hacia atrás unidades, decenas o centenas, descomponer un número (365=300+60+5), estudiar propiedades, multiplicar por un número seguido de ceros, etc.

El planteamiento de la aritmética mental es más global, o dicho en lenguaje más actual, establece muchas más *conexiones*, se ponen en funcionamiento diferentes aspectos de la materia en el momento de resolver una misma tarea.

Veamos un ejemplo: analicemos la operación 345x6, según si se resuelve aplicado el algoritmo estándar o el modelo rectangular

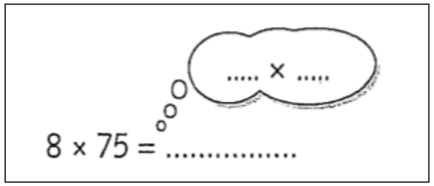
$$\begin{array}{r} 345 \\ \times\, 6 \\ \hline 2070 \end{array}$$

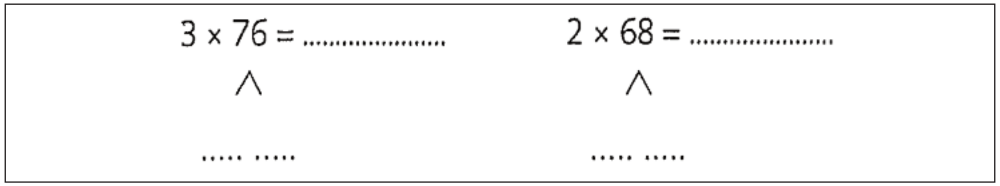
	300	40	5
6	1800	240	30
1800+240+30 = 2070			

Como se verá en el siguiente cuadro, las competencias desarrolladas aplicando algoritmos estándar se reducen al propio algoritmo (si bien, tal como veremos en el quinto apartado de este escrito, los algoritmos son un contenido con una gran potencialidad) y esto contrasta con la riqueza de los algoritmos personales (siempre y cuando sean eficientes).

Algoritmo estándar	Aritmética mental
• Colocar los números en vertical • Multiplicar 6x5, 6x4, 6x3 • Retener y sumar las llevadas • Suma final: sumas de dígitos recordando las llevadas	• Descomponer 345 en unidades decenas y centenas • Multiplicar por "unidades decenas centenas" etc. (6x300, 6x40, 6x5) • En el momento de la suma: propiedad distributiva: 6x345= 6x300+6x40+6x5 • Sumar cantidades en lugar de dígitos • Estimación: Posibilidad de control de la magnitud resultado (1800 da una buena referencia)

Presentamos a continuación algunos ejercicios de resolución de multiplicaciones a nivel simbólico[4] utilizando recursos gráficos distintos, pero reproduciendo la misma estrategia empleada en el modelo rectangular y en donde se pone de relevancia que el punto más importante es saber descomponer de manera adecuada.





[4] Extraídos de *Rekenrijk 6a,* un libro de ejercicios usado en escuelas holandesas editado por Wolters-Noordhoff (ISBN 9789001146061).

Para posteriormente expresarse en esta forma:

$$8x75 = 8x70 + 8x5 = 560+40 = 600$$

o bien

$$8x75 = 560+40 = 200$$

Esta estrategia muchas veces se convierte en una estrategia de cálculo mental para un determinado nivel de alumnos, que son capaces de resolverlas sin necesidad de utilizar anotaciones escritas.

Hasta este momento hemos presentado las ideas centrales de la aritmética mental, que se distingue de los algoritmos básicamente porque el proceso empleado depende de las estrategias del resolutor y no de unas leyes preestablecidas y un camino único.

Sin embargo, el proceso de algoritmización es muy interesante desde el punto de vista de las matemáticas y los alumnos deben dotarse de ellos; por esta razón, una vez llegados al final de la aritmética mental, podemos acceder a construir algoritmos personales como el que se describe a continuación.

Si en aritmética mental la resolución es: 367x6 = 6x300+6x60+6x7, el llamado *algoritmo en columnas es* el siguiente (se puede observar que el único cambio es la direccionalidad de los resultados parciales):

$$\begin{array}{r} 367 \\ \underline{x\ 6} \\ 1800 \\ 360 \\ \underline{42} \\ 2202 \end{array}$$

El “discurso” asociado sería:

6x300 = 1800

6x60 = 360

6 x 7 = 42

y posteriormente la suma se acostumbra a hacer mentalmente, por ejemplo

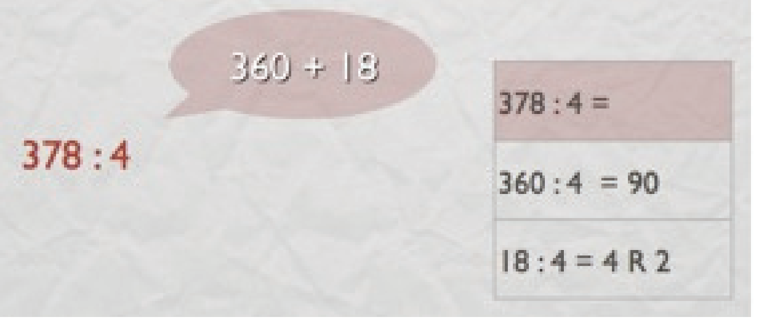
1800+300= 2100

2100+60= 2160

2160+42= 2202

Aunque sumar aplicando el algoritmo es otra alternativa posible, depende de nuestras expectativas.

Para finalizar veremos que la estrategia de descomposición también nos permite resolver divisiones al margen de los algoritmos como lo hacíamos en la multiplicación.



Como se puede observar, el proceso es paralelo al de la multiplicación, pero con una diferencia básica: en el caso de la división la descomposición del dividendo no se hará, en general, de la misma forma que en la multiplicación, sino que tendremos que encontrar números que sean múltiplos de 4 (en este caso) para poder resolverla.

4. Aritmética mental *vs* algoritmos, una propuesta de cambio en el currículum

Entramos de lleno en la propuesta final: incorporar la aritmética mental como eje vertebrador de la enseñanza de la aritmética, educar alumnos con la capacidad de resolver los cálculos que se realizan en cualquier problema de Primaria sin necesidad de acudir a los algoritmos escritos. Esta decisión además nos servirá para reforzar los aprendizajes aritméticos en general, ya que continuamente se están estableciendo conexiones entre ellos. Sin embargo, esto implica desplazar la enseñanza de los algoritmos de su papel como contenidos estructuradores del currículum como han sido hasta ahora.

Sin embargo, la razón principal para plantear este cambio viene dada por el hecho de que, desde la aparición de las calculadoras, la enseñanza de los algoritmos escritos y su papel en la escuela han sido discutidos.

¿Se han fijado en que actualmente casi nadie habla de los algoritmos?, aparecen poquísimo o no aparecen ni en las jornadas de matemáticas, ni tampoco en las revistas. Las escuelas innovadoras que trabajan con organizaciones de clase tipo rincones o proyectos cuando exponen su trabajo no cuentan cuál es el tratamiento de los algoritmos, sin embargo en general siguen allí. En algún lugar de la clase o de casa podemos encontrar cuadernos de cálculo en los que los alumnos repiten rutinas. Y es que, en el fondo, siguen siendo los *contenidos organizadores del currículum*. Es decir, por innovador que sea el proyecto, la resta con llevadas se inicia en general en segundo de Primaria y la división por dos cifras es el regalo de Navidad de cuarto.

4.1 Las tres preguntas

Sin embargo, existen suficientes referentes históricos para pensar que la actual enseñanza de los algoritmos toca a su fin y que resumimos en tres preguntas (entre paréntesis la fecha en que fueron expuestas):

- ¿Cuánto tiempo hace que no ve a alguien resolviendo una división por dos cifras con lápiz y papel? (1979).
- ¿Cuál es la razón para continuar enseñando algoritmos en la escuela? (1987).
- ¿Cómo es posible que dedicando tanto tiempo al aprendizaje de los algoritmos se obtengan resultados tan pobres? (Finales del siglo XX).

La primera pregunta se formuló a final de los años 70. Stuard Plunkett[5], a partir de la irrupción de las calculadoras en la sociedad, en un artículo llamado *La descomposición y demás basura* cargaba contra la enseñanza de los algoritmos en un mundo que había dejado ya de calcular operaciones largas con lápiz y papel. Para apoyar su argumento hizo un estudio sobre cómo calculan las personas y lo recogió en la tabla siguiente:

Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul
5+9	135+100	139+28	592+276	3964+7123+4918+5960
13-8	85-20	83-26	592-276	
4x7	5x30	17x3	931x8	931x768
35:5	90:3	72:4	693:7	8391:57

[5] PLUNKETT, S. (1979). "Decomposition and All That Rot". *Mathematics in School,* v.8, n.3, p. 2-5.

Según Plumkett, para resolver las operaciones la mayoría de la gente hacía lo siguiente: las tres primeras columnas las resolvían con facilidad mentalmente, la columna verde presentaba dificultades en su resolución y la columna azul era solucionada con la calculadora o con cálculo escrito (si es que no tenían a mano una calculadora). ¿Qué sentido tenía efectuar operaciones largas en la escuela si en la sociedad ya no se usaban?

Para enmarcar la segunda pregunta sobre el motivo por el cual se continuaban enseñando algoritmos en la escuela a finales de los ochenta nos referiremos a Eugene A. Maier[6], que acuñó el término *supervivencia escolar* para definir la razón de la continuidad de los algoritmos (el subrayado es nuestro):

> Sin embargo, algunos educadores sostienen que los estudiantes necesitan conocer esos procedimientos. Y tienen razón: los estudiantes necesitan conocerlos, pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a los estudiantes a tener éxito en la escuela. Dicho sencillamente, estos procedimientos son <u>destrezas para la supervivencia escolar</u> de los alumnos (...) en mi opinión, carece de sentido, tanto educativa como económicamente, usar nuestros recursos educativos para enseñar destrezas que solo sirven para perpetuarse a sí mismas. Cuando tal cosa ocurre, es la hora de cambiar.

Y en el terreno de la anécdota nos gustaría recoger una frase que resume de manera divertida la polémica de los algoritmos, pronunciada por el profesor Lluís Segarra en una conferencia hace un par de meses:

> Solamente existen tres colectivos que actualmente dividen por dos cifras utilizando el algoritmo estándar de lápiz y papel: los niños que cursan cuarto de Primaria, los maestros de cuarto de Primaria cuando enseñan o corrigen las tareas de sus alumnos y los padres de los alumnos de cuarto de Primaria cuando les ayudan con esas tareas.

La tercera pregunta, una vez asumidos los factores sociales y institucionales de las dos primeras, incide en la eficacia de la enseñanza de los algoritmos, y los maestros se la han planteado muchas veces: ¿cuál es la razón por la que nuestros alumnos, que han aprendido a dividir en cuarto, se olvidan al llegar a sexto? Es un aspecto realmente preocupante, de todas maneras puede ser tranquilizador saber que esto no nos pasa solamente a los españoles, sino que es un problema generalizado, tanto que a niveles de investigación en Didáctica de las Matemáticas se planteó cómo era posible que con el tiempo dedicado a la enseñanza de los algoritmos de lápiz y papel se obtuvieran resultados tan pobres, hasta llegar a la conclusión que era necesario efectuar un cambio radical.

---

[6] MAIER, E.A. (1987). “Basic Mathematical Skills or School Survival Skills?”. Editorial de la revista *Teaching Children Mathematics* (sep).

Está claro que la enseñanza de los algoritmos es básicamente aprendizaje repetitivo, entrenamiento lejano a la comprensión. Los algoritmos esconden su lógica (por ejemplo, cuando bajo el 3 en una división y lo pongo al lado del 12 anterior se convierte en el 123, ¿es magia?). Los alumnos efectúan acciones por imitación sin entrar a fondo en la comprensión, con el resultado que cuando dejan de entrenar olvidan y no tienen referentes aprendidos para recuperar lo olvidado.

Entramos en el quid de la cuestión: por una parte tenemos el convencimiento de que la enseñanza y el papel de los algoritmos ha de cambiar, como se ha argumentado en el apartado "las tres preguntas". Por otro lado ya existe una propuesta, la aritmética mental, con la que conseguimos un aprendizaje del cálculo mucho más significativo y eficaz que nos asegura además que los alumnos continúan siendo capaces de resolver los problemas aritméticos tradicionales.

Parece que ha llegado el momento de descabalgar a los algoritmos de su papel como contenidos organizadores del currículum en favor de una estructura centrada en la aritmética mental.

La aritmética mental puede recoger el testimonio de los excelentes, pero viejos y cansados, algoritmos y convertirse en el andamio sobre el que construir los aprendizajes. Y puede hacerlo por tres razones:

- Es transparente, contrariamente a la opacidad de los algoritmos, lo que permite que los alumnos puedan aprender los procesos en profundidad en lugar de memorizarlos.
- Es una alternativa que –de formas distintas– se está llevando a cabo en distintos países cuyo rendimiento en enseñanza de las matemáticas podemos considerar notable y es una propuesta curricular, o sea, que no son actividades aisladas sino una línea de trabajo.
- Su filosofía entronca con la idea de trabajar las matemáticas en un ambiente de resolución de problemas.

4.2 Una anécdota final

No es fácil cambiar, y hacerlo también requiere saber explicarlo a los padres... y que los padres nos crean.

Estamos trabajando con las escuelas experimentando la implantación de la aritmética mental. En una de estas escuelas, trabajando la división, Ainara, una niña de cuarto curso que resolvía las divisiones por el método de columnas sin ningún tipo de problemas, se acercó a la maestra llorando y le dijo: "Susana dile a mi padre que no me enseñe a dividir, él dice que su manera es más corta, pero yo no entiendo nada".

Nos reímos mucho al conocer la anécdota pero parece que en este país proponer un cambio más o menos igual al que están aplicando desde hace casi una década algunos países de Europa no será nada fácil, y lo preocupante es que vamos de los últimos en los *ranking* europeos en enseñanza de la matemáticas.

5. ¿Para qué enseñamos algoritmos aritméticos en la escuela?

Después de lo expuesto en los apartados anteriores cabe hacerse la pregunta anterior. Lo que ha quedado claro es que no enseñamos los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división con el objetivo de que nuestros alumnos puedan "resolver problemas" ya que estos se pueden resolver sin algoritmos. Pero si los enseñamos por otros motivos, cabe cuestionar si los algoritmos estándar son los más adecuados para alcanzar esos objetivos.

A continuación presentaremos algunos algoritmos aritméticos alternativos junto con los motivos por los que vale la pena llevarlos al aula.

5.1 Un motivo histórico

Enseñamos los algoritmos estándar porque son una construcción social que se ha mantenido vigente durante varios siglos gracias a su eficiencia. Pero también es importante que el alumno sepa que no siempre se ha operado igual.

Multiplicación en celosía

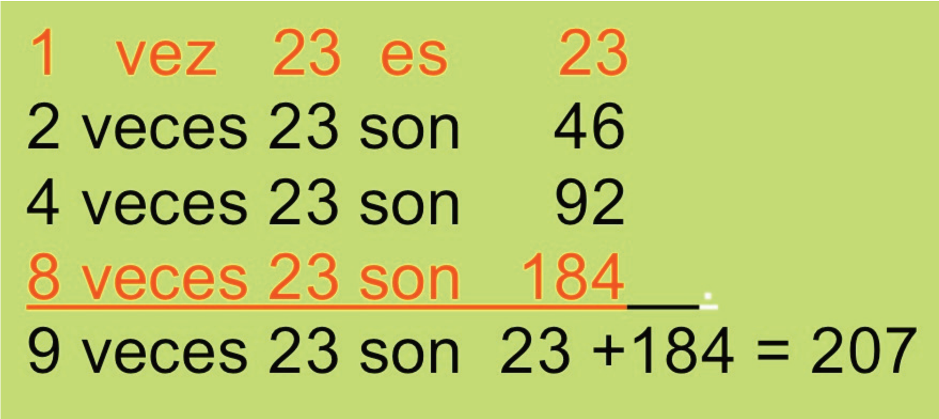
Se puede entender el funcionamiento de este algoritmo viendo el vídeo *lattice multiplication* en Youtube[7]

Tarea: Calcula 284 x 478 usando este algoritmo. ¿Por qué funciona esta manera "tan diferente" de multiplicar? Compara este algoritmo con el que consideramos estándar.

[7] Este vídeo está disponible en www.youtube.com/watch?v=R6uiz8YdA7w (octubre de 2009).

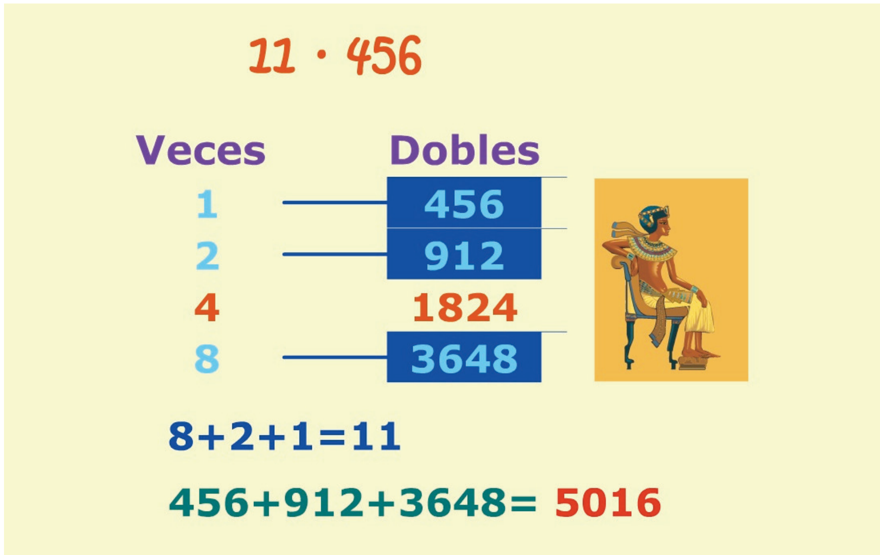
Multiplicación egipcia

Veamos el funcionamiento de este algoritmo a partir de un ejemplo, 23x9:



- Escribimos 9 como suma de potencias de 2, o sea, como suma de algunos de los números: 1, 2, 4, 8, 16, etc.
- Calculamos el doble de 23, el doble del doble de 23, el doble del doble del doble de 23, etc.
- Como 9=1+8, para calcular 23x9 basta sumar 23x1y 23x8 (el doble del doble del doble de 23).

Se puede ver otro ejemplo de este procedimiento en la animación realizada por Joan Jareño: egipcia.swf



Tarea:

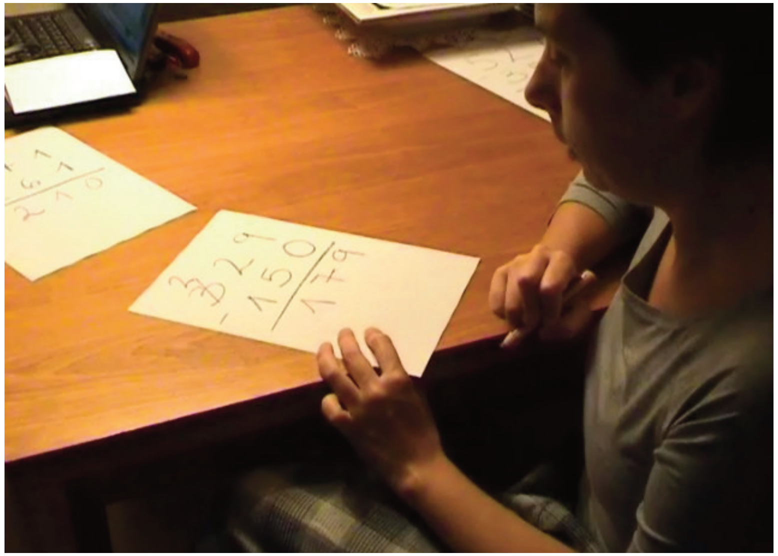
Calcula 78 x 13 usando este algoritmo. ¿Qué tablas de multiplicar se necesitan para hacer esa multiplicación? ¿Qué inconveniente de este algoritmo puedes destacar en relación al tamaño de los factores?

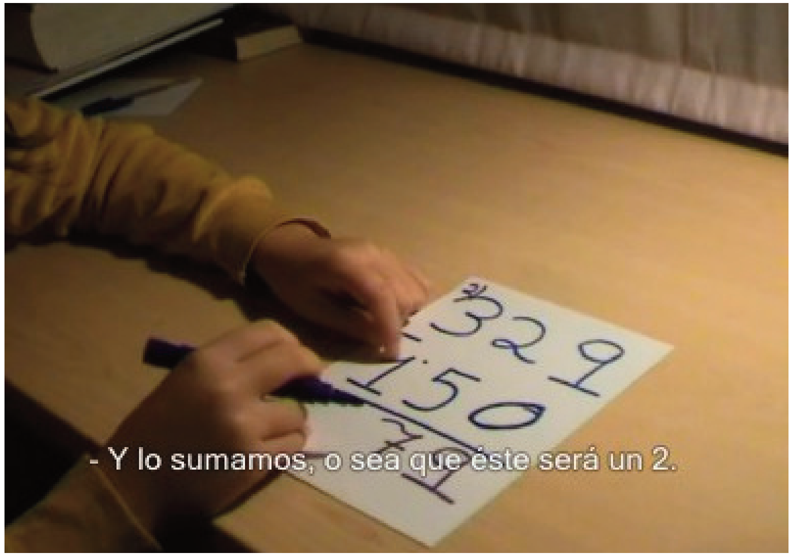
5.2 Otro motivo: la multiculturalidad

No solamente ha cambiado la manera de realizar cálculos a través del tiempo, en la actualidad tampoco se opera igual en todos los sitios del mundo. Para confirmarlo basta con comparar los algoritmos que utiliza un alumno extranjero cuando llega al aula de acogida.

Resta

Visualice los siguientes vídeos: procedimiento1.wmv y procedimiento2.wmv





Comparemos los dos procedimientos:

- El procedimiento que aparece en el primer vídeo para restar dos cantidades, pongamos por caso 72-34, se basa en la siguiente descomposición de ambos números:

72 = 7 decenas y 2 unidades

34 = 3 decenas y 4 unidades

Como el minuendo tiene menos unidades que el sustraendo se prueba con otra descomposición:

72 = 6 decenas y 12 unidades

34 = 3 decenas y 4 unidades

Por tanto, la diferencia entre 72 y 34 son 3 decenas y 8 unidades, o sea, 38.

- El procedimiento que aparece en el segundo vídeo se basa en sumar a ambas cantidades un mismo número:

72 = 7 decenas y 2 unidades

34 = 3 decenas y 4 unidades

Como el minuendo tiene menos unidades que el sustraendo sumo diez unidades al minuendo y una decena al sustraendo, lo que hace que no varíe la diferencia entre ambos:

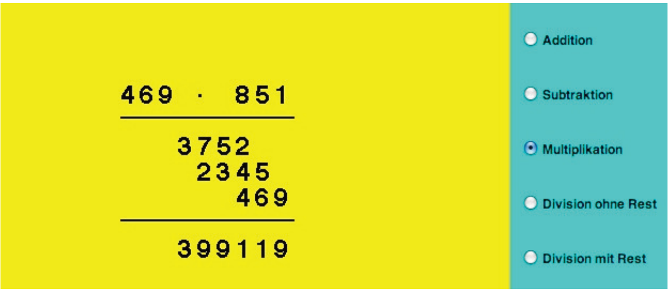
82 = 7 decenas y 12 unidades

44 = 4 decenas y 4 unidades

Por tanto la diferencia entre 72 y 34 son 3 decenas y 8 unidades, o sea, 38.

Multiplicación

En algunos países el algoritmo estándar luce diferente del “nuestro”. En la imagen[8] podemos ver una multiplicación tal como la hacen en Alemania.



Observar que para multiplicar 469 por 851 comienzan multiplicando 469 por 8 y colocando la última cifra de ese resultado bajo el 8, luego pasan a multiplicar 469 por 5 y a colocar la última cifra de ese resultado bajo el 5, para terminar multiplicando 469 por 1 y colocando la última cifra de ese resultado bajo el 1. A continuación suman los resultados de esas multiplicaciones parciales.

[8] La imagen proviene de la página web http://home.fonline.de/fo0126//rechnen/rech6.htm en la que se puede practicar el algoritmo usual de la multiplicación en Alemania.

Tarea:

Calcula 284 x 478 usando este algoritmo. ¿Por qué funciona esta manera "tan diferente" de multiplicar? Compara este algoritmo con el que consideramos estándar.

En la imagen de la derecha aparece el cálculo realizado por una alumna de 12 años cuando su maestra le pidió que resolviera un problema en el que debía multiplicar 34 por 45:

```
  3 4
X 4 5
-----
1 7 0
  1 3 6
-------
1 8 3 6
```

Cuando se le preguntó por qué lo había hecho así explicó que no recordaba si la segunda fila de números la debía correr hacia la derecha o hacia la izquierda.

La cuestión de fondo es que tanto el algoritmo estándar de la multiplicación que usamos aquí como el que usan en Alemania trabajan con cifras, no con cantidades[9]. Una persona que primero multiplica 34x5 y después 34x4 no puede recurrir más que a la memoria para la colocación del segundo resultado, mientras que para quienes ven que primero se multiplica 34x5 (170) y después 34x40 (1360) ya no hay arbitrariedad en la colocación de los productos parciales.

5.3 Otro motivo: valorar la transparencia

Considerando la imagen errónea que sobre las matemáticas genera en el alumno la aplicación de un procedimiento sin que entienda la razón de su funcionamiento, abogamos por la exclusiva presentación de algoritmos transparentes. Siendo que entendemos por transparencia de un algoritmo la posibilidad de captar las razones por las que un procedimiento da respuesta al problema que pretende resolver.

Resta con nueves

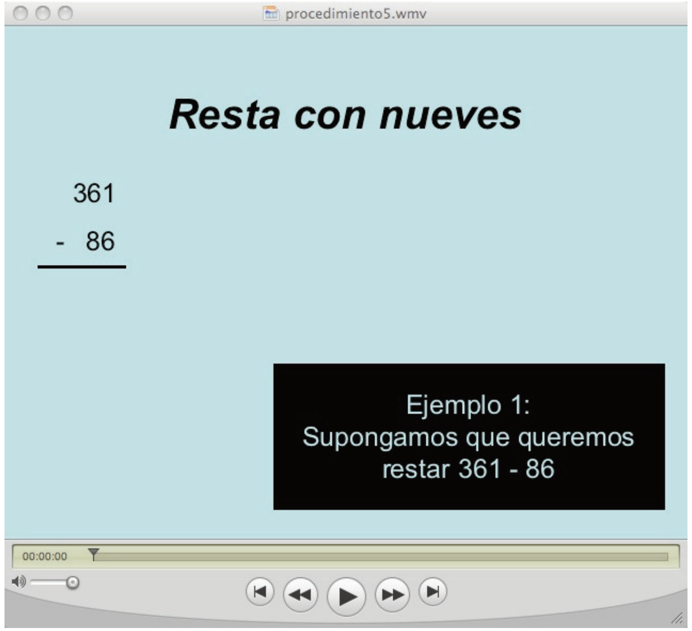
Para restar A-B, si A tiene, por ejemplo, 3 cifras, realizamos 999-B (una resta siempre sencilla), al resultado le sumamos A, y de este último resultado quitamos el 1 del inicio y lo sumamos al final.

---

[9] Puede encontrar un ejemplo de algoritmo de la multiplicación que trabaja con cantidades en www.bbc.co.uk/skillswise/numbers/wholenumbers/multiplication/written/flash1.shtml

Por ejemplo: para hacer 531-472, restamos 999-472 = 527, sumamos 527+531 = 1058, quitamos el 1 del inicio, queda 058 y sumamos el 1, por lo que queda 59 (que es efectivamente el resultado de 531-72).

Se pueden encontrar otras descripciones de este procedimiento en la página 73 del libro *Más actividades matemáticas* de Brian Bolt[10] y en la siguiente presentación: procedimiento5.pps



Tarea:

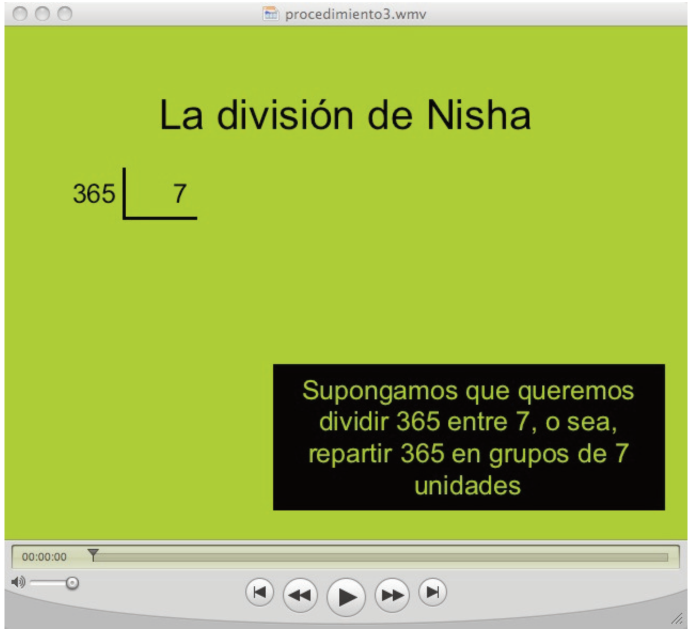
Calcula 423-284 y 1230-789 usando este algoritmo. ¿Por qué crees que no enseñamos a restar así? ¿Por qué funciona esta manera "tan diferente" de restar?

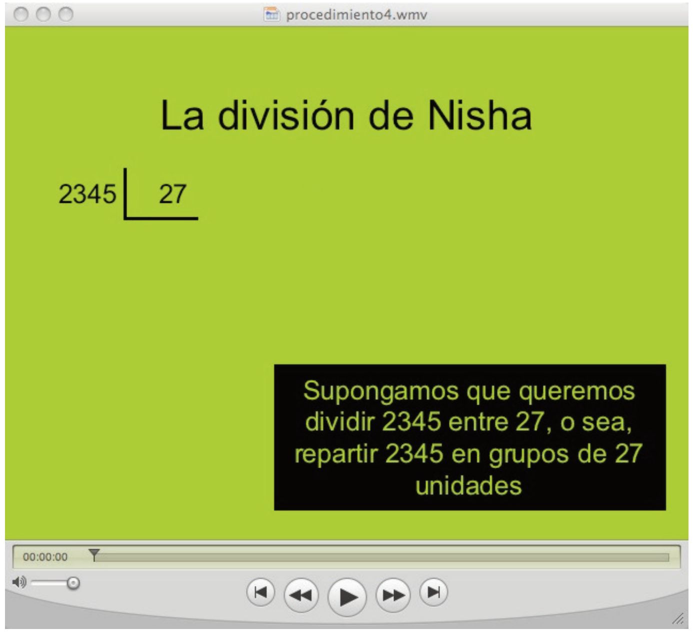
10 BOLT, B. (1990). *Más actividades matemáticas*. Editorial Labor.

La división de Nisha

Hace algunos años, en un encuentro de maestros que compartían un proyecto Comenius, Nisha, una maestra holandesa, nos comentó cómo enseñaba a sus alumnos a dividir.

Visualice las siguientes presentaciones: procedimiento3 y procedimiento4





Tarea:

Calcula 3125:6 y 3125:21 usando este algoritmo. ¿Por qué crees que la tabla auxiliar tiene únicamente columnas para 1, 2, 4 y 8? ¿Por qué funciona esta manera de dividir?

Bibliografía

MORROW, L.J.. & KENNEY, M.J. (1998). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. (Yearbook) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

VAN DER HEUVEL-PANUIZEN, M. (ed.). (2001). *Children Learn Mathematics.* The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.