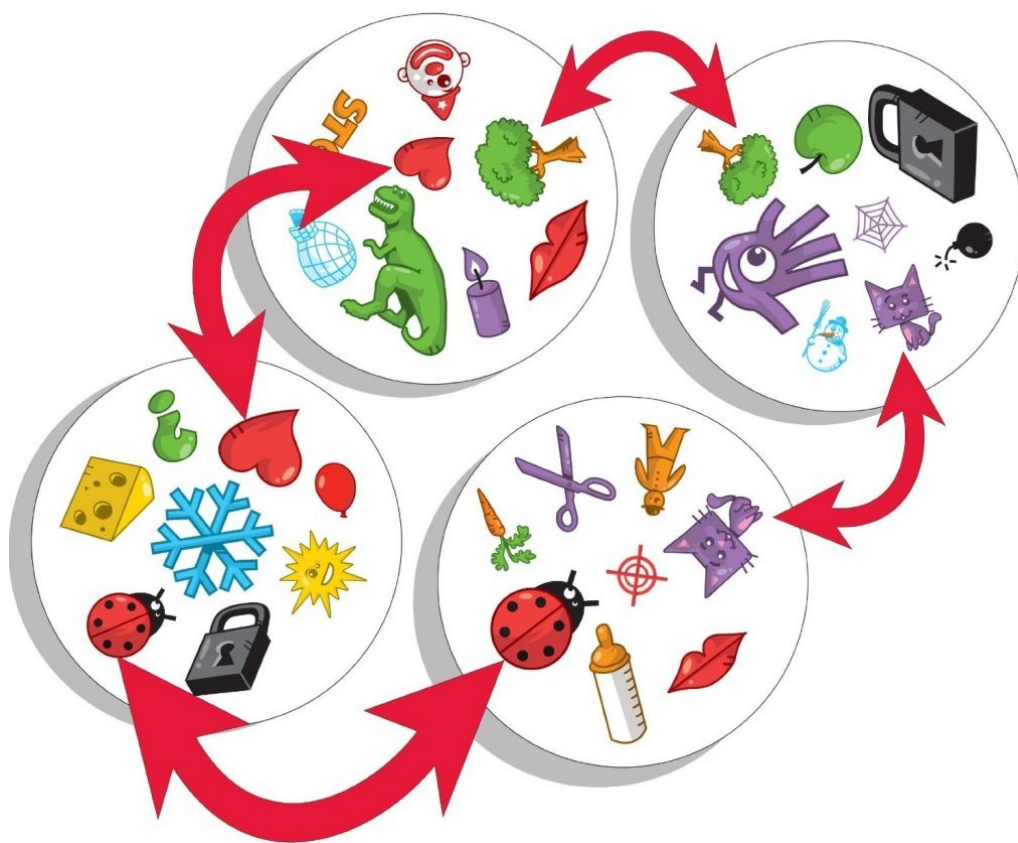


Dobble

Hace tiempo apareció en casa un extraño juego de cartas circulares con varios símbolos o dibujos al que al principio no le presté demasiada atención. Hasta que descubrí que el objetivo del juego siempre pasa por encontrar el símbolo común entre dos cartas cualesquiera del conjunto. Ahí ya me empecé a interesar un poco más. Se trata de un mazo de cartas en las que en cada una de ellas han incluido el mismo número de símbolos, todos distintos dentro de la misma carta. Y, según parecía, siempre había uno (y sólo uno) común a cualquier pareja seleccionada. En el juego comercial se presentan un total de 55 cartas, cada una de ellas con 8 símbolos distintos. Aquí tenéis una imagen donde se han marcado con flechas rojas los símbolos comunes a cada pareja de cartas:



Como el Dobble original resultaba un poco difícil para mi hijo pequeño tomé la decisión de investigar un poco en esta magia matemática y poder así construir un Dobble con un número menor de símbolos por carta con la idea de hacerlo más sencillo. Además así también es posible elegir los símbolos; en el set que compramos son dibujos bastante neutros (señales, objetos cotidianos, animales, símbolos, etc.) pero en la versión customizada puedes lógicamente elegir la tipología de símbolos que quieras: escudos de equipos de fútbol, logotipos de marcas de cerveza, posturas sexuales del Kama-sutra, etc. Además una de las ventajas del Dobble es que si se pierde alguna carta se puede seguir jugando casi exactamente igual.

La forma más sencilla de construir un Dobble me parece que es decidir el número de cartas del mazo (lo llamaremos N en general) y dibujar una cuadrícula con N filas y N columnas. En cada una de las relaciones entre cartas se dibuja un símbolo diferente dejando vacía la diagonal principal de la matriz. Os presento a continuación un ejemplo con N=7 donde los símbolos son letras del alfabeto (en un alarde de originalidad):

	1	2	3	4	5	6	7
1		A	B	C	D	E	F
2	A		G	H	I	J	K
3	B	G		L	M	N	O
4	C	H	L		P	Q	R
5	D	I	M	P		S	T
6	E	J	N	Q	S		U
7	F	K	O	R	T	U	

De esta forma, la carta 1 tendrá por ejemplo los símbolos A-B-C-D-E-F y la carta 2 los símbolos A-G-H-I-J-K. Está claro que el Dobble así construido funciona, pero tiene un total de N cartas, N-1 símbolos por carta y $N(N-1)/2$ símbolos en total. En nuestro ejemplo serían 7 cartas, 6 símbolos por carta y 21 símbolos en total. Si consideramos el juego comercial del Dobble que tiene 55 cartas necesitaríamos 54 símbolos por carta y la friolera de 1.485 símbolos en total.

Fijándonos de nuevo en la matriz anterior de N=7, está claro que podemos reducir el número total de símbolos reutilizando el mismo símbolo para diferentes combinaciones. Por ejemplo, entre las cartas 1 y 2 el símbolo común es la letra A y

entre las cartas 6 y 7 es la letra U. Pero en realidad para esa U podríamos reutilizar la letra A y el Dobble seguiría funcionando igual de bien con un símbolo menos. Ahora bien, ¿hasta que punto podemos reutilizar símbolos? Porque ciertamente tiene que existir un límite a partir del cuál es imposible hacerlo sin romper las reglas de distribución que hemos comentado antes.

Vamos a analizarlo para un ejemplo sencillo (de tres símbolos por carta) y os prometo que no perderemos generalidad en las conclusiones que saquemos. Si llamamos M al número de símbolos por carta en este ejemplo tendremos $M=3$ y la primera carta será:

Carta 1: A-B-C

La segunda carta a construir tendrá en común con la primera la letra A y necesitamos otros dos símbolos nuevos para completarla (lógicamente no pueden ser ni la B ni la C porque ya están en la primera carta):

Carta 2: A-D-E

Podemos construir otra tercera carta con la letra A y otros dos símbolos nuevos, en este caso las letras F y G.

Carta 3: A-F-G

Si queremos construir una cuarta carta ya no vamos a poder utilizar la letra A. Os explico por qué. Si en la cuarta carta incluimos la letra A necesitaremos otras dos letras nuevas ya que no servirán las letras B-C-D-E-F-G. Entonces hacemos:

Carta 4 (errónea): A-H-I

El problema es que cuando queremos hacer la carta 5 tiene que tener un símbolo (y uno solo) en común con las cuatro cartas anteriores. Y podeis comprobar que eso es imposible con solo tres símbolos por carta, por ejemplo si hacemos B-D-F vale para las tres primeras cartas pero no valdría para la Carta 4 – A-H-I. Así que cada símbolo solo se puede repetir como mucho M veces, es decir, puede aparecer en M cartas diferentes. En nuestro caso la letra A sólo puede aparecer por tanto en 3 cartas.

A partir de ahí se puede deducir que si tenemos M símbolos por carta el número total de símbolos que necesitamos es $M + (M-1)(M-1)$. En nuestro ejemplo $M=3$ y necesitaríamos entonces 7 símbolos (las letras A a la G) para construir el mazo completo. Respetando las reglas un poco a ojo y tanteando hacemos la siguiente distribución válida:

Carta 1: A-B-C

Carta 2: A-D-E

Carta 3: A-F-G

Carta 4: B-D-F

Carta 5: B-E-G

Carta 6: C-D-G

Carta 7: C-E-F

Si tenemos M símbolos por carta y cada símbolo aparece en M cartas es inmediato deducir que tendremos el mismo número de cartas que de símbolos diferentes, es decir N (número de cartas) = $M + (M-1)(M-1)$ que vienen a ser 7 cartas en nuestro ejemplo de $M=3$.

Ojo porque estas deducciones y análisis no nos explican cómo construir las combinaciones, ni siquiera nos garantizan que forzosamente tengan que existir. Para pequeños valores de M en principio podríamos construir:

$M=3$ – 7 símbolos y cartas en total

$M=4$ – 13 símbolos y cartas en total

$M=5$ – 21 símbolos y cartas en total

$M=6$ – 31 símbolos y cartas en total

$M=7$ – 43 símbolos y cartas en total (*)

$M=8$ – 57 símbolos y cartas en total

$M=9$ – 73 símbolos y cartas en total

$M=10$ – 91 símbolos y cartas en total

Es curioso porque para el Dobble comercial se ha elegido $M=8$ pero el mazo sólo tiene 55 cartas en lugar de 57. Eso quiere decir que “faltan” dos cartas en el mazo, es decir, no se han explotado todas las combinaciones posibles. Un entretenimiento consiste en averiguar las dos cartas que faltan, esas dos cartas faltantes lógicamente también tendrían un símbolo común entre ellas que es el que menos aparece en el Dobble comercial (el muñeco de nieve). Así tenemos 42 símbolos que aparecen en 8 cartas, 14 símbolos que aparecen en 7 cartas y un único símbolo que sólo aparece en 6

cartas. He intentado averiguar por qué no se han generado las 57 combinaciones en el Dobble y no he encontrado una respuesta así que tengo dos teorías. La primera teoría es más de marketing, y es que como el juego se llama Dobble es más apropiado que tenga 55 cartas (el 5 también “dobble”) y no 57. La segunda teoría es más matemática y se explica porque en muchas variantes de este juego hay que repartir las cartas del mazo entre los jugadores dejando una en el centro. Entonces con 55 cartas se reparten 54 que es divisible entre 2 y entre 3. En cambio con 57 cartas se reparten 56 que es divisible entre 2 y entre 4. Así que para tres jugadores es más práctico un mazo de 55 cartas mientras que para cuatro jugadores lo es uno de 57. Me doy cuenta de que esta teoría es un poco tonta porque te podrían dar el mazo completo de 57 con todas las combinaciones y si son tres jugadores siempre se podrían quitar dos cartas.

Generar las combinaciones de símbolos no es trivial, aunque para ello se pueden utilizar pequeños programas en lenguajes como Java o C. Si no queréis buscar por ahí os adjunto una hoja de cálculo en formato Excel con el detalle de combinaciones para varios valores de M , uno en cada pestaña:

[dobble](#)**Descarga**

En cada pestaña del fichero se indica por un lado la combinación de símbolos para cada carta (se han elegido los números naturales como símbolos porque no hay suficientes letras distintas) y a la derecha una matriz que actúa como ‘comprobante’ de que el número de símbolos comunes entre cualquier combinación de cartas es siempre uno. En su momento utilicé esa hoja de $M=6$ para generar un Dobble más sencillo con motivos de animales. En total son 31 cartas y símbolos diferentes. Aquí tenéis el fichero PDF por si lo queréis imprimir, es preciso hacerlo a dos caras para poder imprimir también el reverso. Como podeis ver sólo entran 6 cartas en cada hoja, con lo que hacen falta 7 hojas y el espacio sobrante se puede aprovechar para imprimir 5 cartas repetidas. Igual lo más complicado es recortar las cartas en forma de círculo, lo ideal es que se pudieran troquelar de alguna manera sencilla pero no se me ocurrió nada.

[dobble](#)**Descarga**

(*) Resulta interesante que por ejemplo que para $M=7$ la distribución ‘óptima’ del Dobble con 43 símbolos y cartas no se puede conseguir. Eso es debido a que el Dobble de N símbolos por carta ‘vive’ en un plano proyectivo de orden $N-1$. Es sabido que no existe solución para el plano proyectivo de orden 6 y ello tiene relación con el problema de los 36 oficiales de Leonhard Euler, un desafío que se planteó ya en 1782. Eso no quiere decir que no se puede construir un Dobble con 7 símbolos por carta,

pero para ello es preciso utilizar más de 43 símbolos diferentes. Realmente la justificación de su causa queda un poco fuera del alcance de este blog.