

Con e de Euler (III)

Cando no número 83 de *Mathesis* iniciamos este resume sobre a biografía de **Leonhard Euler**, xa mencionamos que seu pai e seu avó materno eran clérigos protestantes. Como citamos, o pai de Euler tiña determinado que el tamén sería pastor calvinista e, con esa finalidade, Leonhard estudou filosofía, teoloxía e linguas clásicas; aínda que logo fose rescatado para as matemáticas debido á intervención dalgúns dos membros da familia **Bernoulli**.

Así e todo, tanto a educación familiar coma eses estudos iniciais, acompañaron a **Leonhard Euler** durante toda a vida. *Eric Temple Bell* (1883 – 1960) no seu libro *Men of Mathematics*, apunta:

[...] a precoz educación relixiosa de Euler influíu sobre toda a súa vida, e nunca puido desfacerse dunha partícula da súa fe calvinista. En efecto, a medida que pasaban os anos foi virando cara onde seu pai intentara dirixilo; organizaba os rezos familiares e acotío dáballes remate cun sermón.



Seguindo con cuestións relixiosas, *Augusto De Morgan* (1806 – 1871, matemático inglés) no libro *A Budget of Paradoxes*, publicado en 1872, recolle a seguinte anécdota que ten como protagonistas a **Leonhard Euler** e **Denis Diderot** (1713 – 1784, filósofo e enciclopedista francés).

Na segunda estancia de **Euler** en San Petersburgo, *Catalina a Grande* convidou a *Denis Diderot* a visitar a súa corte. *Diderot* era un ateo declarado que trataba de convencer para a súa causa a todos os nobres rusos cos que tiña relación. A tsarina, cansa daquela situación, encargou a **Euler** que lle parase os pés a *Diderot*.

Para cumprir esta encomenda, **Euler** decidiu que demostraría matematicamente a existencia de Deus e o filósofo francés aceptou o desafío.

Organizouse unha xuntanza en palacio na que estiveron presentes *Catalina a Grande*, os seus cortesáns e os membros da academia. **Euler** ergueuse do seu asento, camiñou cara *Diderot*, parouse diante del e espetoulle coa maior convicción:

$$\text{Señor: } \frac{a+b^n}{n} = x, \text{ e polo tanto Deus existe. Refúteo!}$$

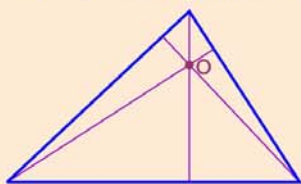
Parece ser que *Denis Diderot* quedou tan descolocado e falto de recursos matemáticos que non soubo que responder. Os asistentes comezaron a rir diante de tal situación e el, humillado, pediu permiso para abandonar a sala e regresar a Francia.

RECTA DE EULER

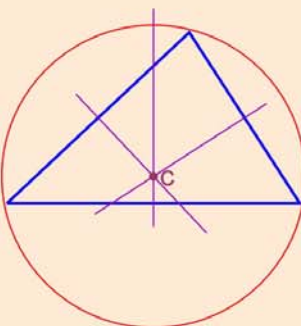
As tres **medias** dun triángulo
córtanse no **baricentro**



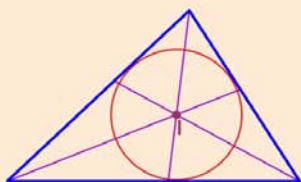
As tres **alturas** dun triángulo
córtanse no **ortocentro**



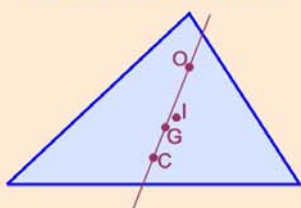
As tres **mediatrices** dun triángulo
córtanse no **circuncentro**



As tres **bisectrices** dun triángulo
córtanse no **incentro**



Recta de Euler



O obxectivo destas notas vai ser tratar de explicar que é a **recta de Euler**. Para iso, imos recordar previamente como se constrúen certos puntos notables dun triángulo.

Chámanse **medias** dun triángulo a cada un dos tres segmentos que unen un vértice do triángulo co punto medio do lado oposto.

O punto, **G**, onde se cortan as tres medias de calquera triángulo, denomínase **baricentro**. O **baricentro** divide a cada **mediana** en dous segmentos, sendo o segmento que vai dun vértice a **G** de dobre medida que o segmento que une **G** co punto medio do lado oposto. Ademais, o baricentro é o *centro de gravidade* do triángulo.

Denomínanse **alturas** dun triángulo aos segmentos que, trazados dende os vértices, son *perpendiculares* a cada un dos lados opostos.

O punto, **O**, onde se cortan as tres **alturas** dun triángulo, é o seu **ortocentro** (*ortogonal: que forma un ángulo recto, perpendicular*).

A **mediatriz** dun segmento é a recta que, pasando polo seu punto medio é perpendicular a el.

O punto, **C**, onde se cortan as tres **mediatrices** dos lados dun triángulo, denomínase **circuncentro** pois é o centro da circunferencia *circunscrita* ao triángulo.

Chámase **bisectriz** dun ángulo á recta que, pasando polo seu vértice, o divide en dúas partes iguais.

O punto, **I**, onde se cortan as tres **bisectrices** dos ángulos dun triángulo denomínase **incentro** e ten a propiedade de que é o centro da circunferencia *inscrita* no triángulo.

Nos triángulos *equiláteros* o **baricentro**, o **ortocentro**, o **circuncentro** e o **incentro**, coinciden nun mesmo punto.

En todo triángulo *non equilátero*, cúmprese a seguinte propiedade: o **ortocentro**, o **baricentro** e o **circuncentro** están *aliñados*. A recta que contén estes tres puntos chámase **recta de Euler**. Denomínase así en honor ao matemático suízo **Leonhard Euler**, quen demostrou a colinealidade dos mencionados puntos notables dun triángulo en 1765.

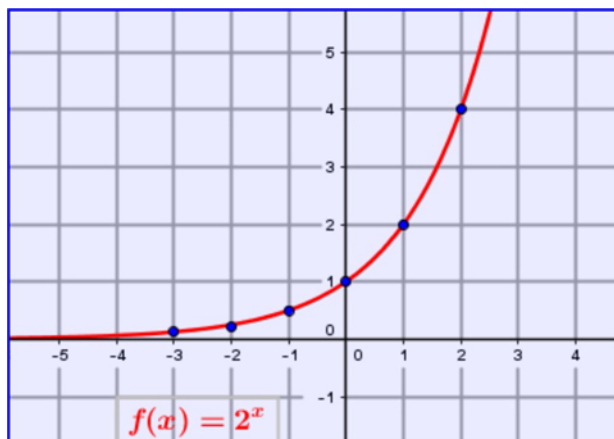
Comproba, utilizando *Geogebra*, que o **incentro** tamén está sobre a **recta de Euler** cando o triángulo é *isóscele*.



Irene de Castro Cebreiro
Cuarto ESO A.

FUNCIONS EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Unha **función exponencial** ten a forma $f(x) = a^x$ ($y = a^x$) sendo a **base**, a , un número positivo distinto de 1 ($a > 0$, $a \neq 1$). Para ver cales son as propiedades dunha función deste tipo, imos observar dous casos particulares sinxelos: $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$. Fixádevos que a variable independente, x , é un **expoñente** (velaí o motivo do nome deste tipo de funcións).



x	≤ -3	-2	-1	0	1	2	3	$\geq$
y	$\leq \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\geq$



x	≤ -3	-2	-1	0	1	2	3	$\geq$
y	≥ 8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\leq$

Lembras as definicións de **dominio** e **percorrido** dunha función? O **dominio** das dúas funcións anteriores é o conxunto dos números reais, $Dom(f) = \mathbb{R}$, e en ambos casos o **percorrido** coincide co conxunto dos números reais positivos, $Perc(f) = (0, \infty)$. As dúas funcións son **continuas**.

Todas as gráficas que se axusten a este modelo, $y = a^x$, cortan ao eixe OY no punto $(0, 1)$ –recorda que $a^0 = 1$ – e non teñen puntos de intersección co eixe OX.

Observemos as tendencias das funcións. Para o caso de $f(x) = 2^x$ constatamos que, a medida que avanzamos no eixe OX, as imaxes correspondentes, 2^x , toman cada vez valores máis altos (isto é, a función crece indefinidamente cando x tende a infinito) pero para valores “moi negativos” de x as imaxes teñen cada vez valores máis pequenos. Pola contra, $f(x) = (1/2)^x$ compórtase xusto ao revés: a función toma valores máis altos canto “máis negativo” sexa o valor de x e aproxímase a cero cando x tende a infinito. Podemos resumir así o contido deste parágrafo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

A partir do anterior, podemos facer un par de afirmacións:

- 1.- O eixe OX (é dicir, a recta $y=0$) é unha **asíntota horizontal** da familia de funcións $f(x) = a^x$.
- 2.- Se $a > 1$ as funcións $f(x) = a^x$ son **estritamente crecentes** e son **estritamente decrecentes** se $0 < a < 1$, polo tanto non teñen **máximos** nin **mínimos**.

Tratemos agora de dar resposta á seguinte pregunta: **Que é o logaritmo dun número?**

O logaritmo dun **número**, n , nunha determinada **base**, a ($a > 0$ e $a \neq 1$), é o **expoñente**, z , ao que se debe elevar a base a para obter o número n . Escribiremos $\log_a n = z$ ou $z = \log_a n$, expresións que se len respectivamente así: “o logaritmo en base a de n é z ” ou “ z é o logaritmo en base a de n ”. Como acabamos de dicir:

$$\log_a n = z \text{ é equivalente a } n = a^z$$

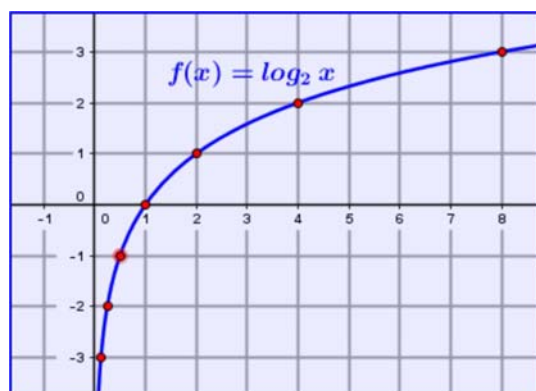
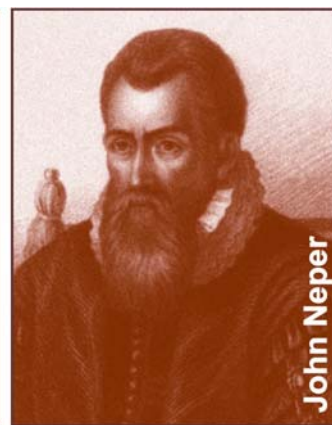
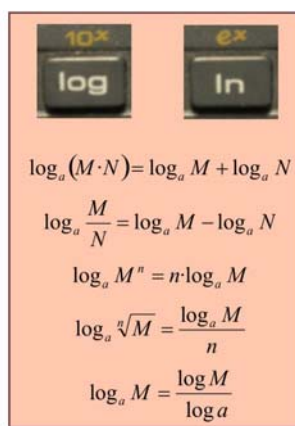
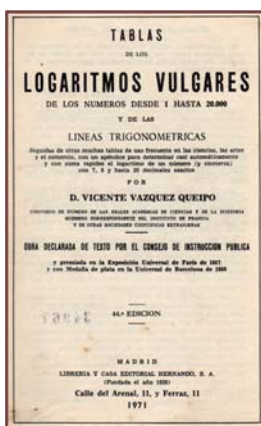
Poñamos algúns exemplos:

O logaritmo en base 2 de 8 é 3, $\log_2 8 = 3$, xa que $8 = 2^3$.

O logaritmo en base 5 de 625 é 4, $\log_5 625 = 4$, pois $625 = 5^4$; o logaritmo en base 5 de 1 é 0, $\log_5 1 = 0$, pois $1 = 5^0$ e o logaritmo en base 5 de 0,2 é -1, $\log_5 0,2 = -1$, pois $0,2 = 5^{-1}$.

Do mesmo xeito que, ao estar facendo cálculos con raíces, se ten por costume non poñer o índice 2 para referirnos ás raíces cadradas, cando traballamos con **logaritmos en base 10** tampouco se adoita facer explícita a base. Deste modo, cando se escriba $\log 100=2$ temos que entender que nos estamos referindo ao **logaritmo en base 10 de 100** que, evidentemente é 2, pois $100 = 10^2$.

Os **logaritmos en base 10** tamén se coñecen como **logaritmos vulgares** ou de **Briggs** (Henri Briggs, matemático inglés, 1561 – 1630). Despois do que acabamos de apuntar, resultarache moi doado dicir cal é o valor de $\log 1\,000\,000$ ou de $\log 1$ ou de $\log 0,001$.



x	$\leftarrow$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\rightarrow$
y	$\leftarrow$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\rightarrow$

Agora propoñémosche que collas a túa calculadora e aches os valores de $\log 3000$, $\log 425$, $\log 23$ e $\log 0.5$. **Podes xustificar (coa axuda da calculadora) por que son correctos os resultados obtidos?**

Tendo en conta a *definición de logaritmo* en base a dun número, non debera resultar estraño aceptar que a **función logarítmica**, $f(x) = \log_a x$ ($y = \log_a x$), sexa a **recíproca** da **función exponencial**, pois $y = \log_a x$ é equivalente a $x = a^y$. Reflexiona sobre as propiedades da **función logarítmica** a partir da observación da gráfica da función $y = \log_2 x$.

Fíxate que, no campo dos números reais, nin o cero nin os números negativos teñen logaritmo e os números comprendidos entre 0 e 1 posúen logaritmo negativo. Cal é o logaritmo de 1 en calquera base? Canto vale o logaritmo da base?... A función logarítmica de base a e a correspondente función exponencial, teñen gráficas simétricas respecto da recta $y=x$.

A función exponencial con **base** o **número e**, $f(x) = e^x$, aparece en moitas situacións relacionadas co crecemento continuo dos animais, dos vexetais, das poboacións... Tamén en contextos científicos e noutros propios da economía.

A **recíproca** desta **función exponencial** é, loxicamente, a **función logarítmica** con **base** o **número e**, $f(x) = \log_e x$. Este tipo de logaritmos tamén se denominan **logaritmos naturais** ou **logaritmos neperianos** na memoria de **John Neper**, matemático escocés (Edimburgo, 1550 – 1617) que foi o primeiro en definir o

conceito de logaritmo.

Cando se traballa con logaritmos neperianos non se acostuma utilizar a notación $\log_e x$, o frecuente é escribir Lx ou $\ln x$. Busca na túa calculadora a tecla para calcular **logaritmos neperianos**.

