

Ano 9
Número 84
Abril 2016

Mathesis

Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

<http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropeyocoruna/>

Con e de Euler (II)

No número anterior de *Mathesis* iniciamos este resume sobre a biografía de **Leonhar Euler** e deixamos aprazada a escrita no momento no que **Euler** consegue o seu doutoramento en 1726.

En 1727 **Euler** participa por primeira vez no concurso promovido pola *Academia das Ciencias de París* que desta vez propoñía atopar a mellor forma posible de colocar os mastros nun buque de guerra. Nesta ocasión só puido acadar o segundo posto, pero posteriormente, **Euler** conseguiría gañar este premio en doce ocasións.

O obxectivo de **Leonhard Euler** era conseguir un posto de profesor de física na Universidade de Basilea pero esa meta resultou imposible. Por este motivo acabou aceptando o ofrecemento que desde Rusia lle fixeron os seus amigos *Daniel* e *Nicolás Bernoulli*, fillos do seu mestre *Johann Bernoulli*. Daniel e Nicolás traballaban na *Academia de Ciencias de San Petersburgo*. En xullo de 1726 produciuse o falecemento de Nicolás, e Daniel asumiu o cargo de seu irmán no departamento de matemáticas e física, recomendando que o posto que el deixaba vacante en fisioloxía e medicina fose ocupado por **Leonhard Euler**.



Euler chegou a Rusia en maio de 1727 e traballou no departamento de fisioloxía e medicina ata 1730, ano no que o asignaron a unha praza de física. En 1733, tras o regreso de *Daniel Bernoulli* a Basilea, converteuse no director do departamento de matemáticas, mellorando así de maneira importante a súa situación profesional.

O 7 de Xaneiro de 1734, **Euler** casa con Katharina Gsell (filla do pintor suízo Georg Gsell, que tamén traballaba na Academia de San Petersburgo). O matrimonio tivo trece fillos.

Euler marchou de San Petersburgo o 19 de xuño de 1741 para traballar na *Academia de Berlín*, aceptando o cargo que lle ofreceu Federico II o Grande, Rei de Prusia. Viviu vinte e cinco anos en Berlín, onde escribiu máis de 380 artigos.

Ademais publicou aquí dúas das súas principais obras: *Introductio in analysin infinitorum*, un traballo sobre funcións publicado en 1748; e *Institutiones calculi differentialis*, que trata sobre cálculo diferencial e se publicou en 1755. Durante esta época tamén investigou sobre números complexos e descubriu a chamada *identidade de Euler*.

A pesar da inmensa contribución de **Euler** ao prestixio da Academia, a falta de sintonía entre el e o propio rei, determinou que se vise obrigado a deixar Berlín.

Departamento de Matemáticas do IES Ramón Otero Pedrayo. A Coruña.

En 1766, **Leonhar Euler** aceptou unha nova invitación para volver á *Academia de San Petersburgo* onde viviu o resto da súa vida.

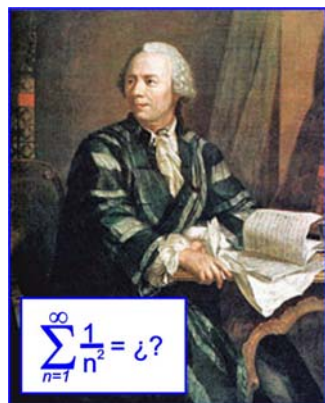
Os problemas de vista de **Euler** xa comezaran polo ano 1738, perdendo parte da visión do ollo dereito. Durante a súa estancia en Alemaña esta cuestión foise agravando, pero co seu regreso a Rusia perdeu tamén case por completo a visión do ollo esquerdo, polo ano 1771 estaba practicamente cego. A pesar diso, a súa grande capacidade de cálculo mental permitíalle continuar coa súa produtividade intelectual e ditáballe ao seu fillo as investigacións que realizaba.

Outro revés co que se tivo que afrontar **Euler** foi a perda da súa esposa Katharina Gsell en 1773, despois de 40 anos de matrimonio. Volveu casar tres anos máis tarde con Salome Abigail Gsell, irmá por parte de pai da súa primeira muller. Este segundo matrimonio durou ata a morte do matemático.



O 18 de setembro de 1783, **Leonhard Euler** faleceu na cidade de San Petersburgo tras sufrir un accidente cerebrovascular.

O PROBLEMA DE BASILEA



O obxectivo que temos en mente agora que comezamos este escrito, non é outro que tratar de comprender o enunciado do chamado **Problema de Basilea** e, con esa finalidade, imos recordar algúns conceptos que interveñen na redacción dese enunciado.

Lembremos unha vez máis que os conxuntos numéricos cos que temos traballado ata agora reciben os seguintes nomes: **naturais**, **enteiros**, **racionais** e **reais**. Os símbolos que usamos para representalos permítenos indicar de que maneira están contidos uns conxuntos dentro dos outros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

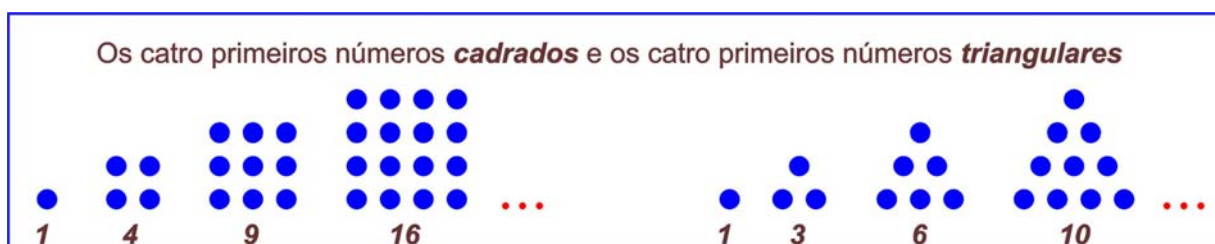
O conxunto dos números naturais está formado por infinitos elementos que nos permiten contar e ordenar obxectos.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 100, 101, 102, \dots, 10\,000\,000, 10\,000\,001, \dots\}$$

Dentro dos conxuntos dos números **enteiros**, **racionais** e **reais** cada número ten o seu **oposto**. Dous números son **opostos** cando ao *sumalos* obtemos *resultado cero*. Por exemplo: 3,675 e -3,675 ou 2 e -2 son opostos, pois, $3,675 + (-3,675) = 0$ e $2 + (-2) = 0$.

Nos conxuntos dos números **racionais** e **reais** cada número ten o seu correspondente **inverso**. Dous números son **inversos** se ao *multiplícalos* obtemos como *resultado 1*. Por exemplo: 12 e $1/12$ son inversos e tamén $3/5$ e $5/3$, pois, $12 \cdot \frac{1}{12} = 1$ e $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$. O *cero* non ten inverso, pois non existe ningún número que multiplicado por 0 dea 1.

Dentro do conxunto dos números **naturais** existen diversos subconxuntos notables ou destacados: os *pares*, os *impares*, os *primos*, os *triangulares*, os *cadrados*...



Lembremos tamén que o signo $\sum_{n=1}^k$ indica que temos que **sumar** **k** termos que se obteñen ao ir substituíndo o subíndice **n** por 1, 2, 3, ... k na expresión afectada polo dito signo. Por exemplo:

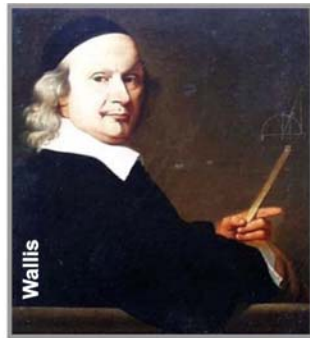
$$\sum_{n=1}^6 \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^4 n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

Despois destes conceptos que acabamos de recordar, xa estamos preparados para desvelar a redacción do curto enunciado do **Problema de Basilea** (Basilea, cidade Suíza na que naceu **Leonhard Euler**). Di así:

$$\text{Cal é o valor de } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ?$$

Ou sexa: Canto vale a **suma** dos **inversos** dos **cadrados** dos infinitos **números naturais** maiores que 0?

Este problema foi presentado por primeira vez no 1644 na obra *Novae Quadraturae Arithmeticae*, da que é autor **Pietro Mengoli** (1626-1686), profesor da Universidade de Bolonia.



Moitos grandes matemáticos intentarían atopar a solución a este problema, pero non foron quen de dar coa solución. Entro outros, o británico **John Wallis** (1616-1703) que na súa obra "*Arithmetica Infinitorum*" (1655) aproximou o valor da suma a 1,645 cometendo un error menor que unha dezmilésima; outro foi **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1706) que resolveu o problema da suma dos inversos dos infinitos **números triangulares**; ou **Jakob Bernoulli** (1654-1705) que chegou a estar obsesionado co problema e, a pesar de non atopar a solución exacta, chegou a demostrar que a suma deses infinitos números era converxente cara un valor menor que 2.

En 1731, cando **Leonhard Euler** contaba 24 anos, comezou cos seus primeiros intentos de solucionar o problema. Non foi ata 1735, despois de moitos intentos, cando deu coa solución exacta do problema, presentando a demostración na Academia de San Petersburgo e publicándoa anos despois na obra *Introductio in Analysin Infinitorum*. Velaquí a solución dada por **Euler**:

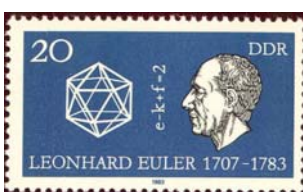
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dende aquela, esta expresión está considerada como unha das fórmulas matemáticas máis fermosas.



Paula Conchado Amado
Cuarto ESO A

FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS



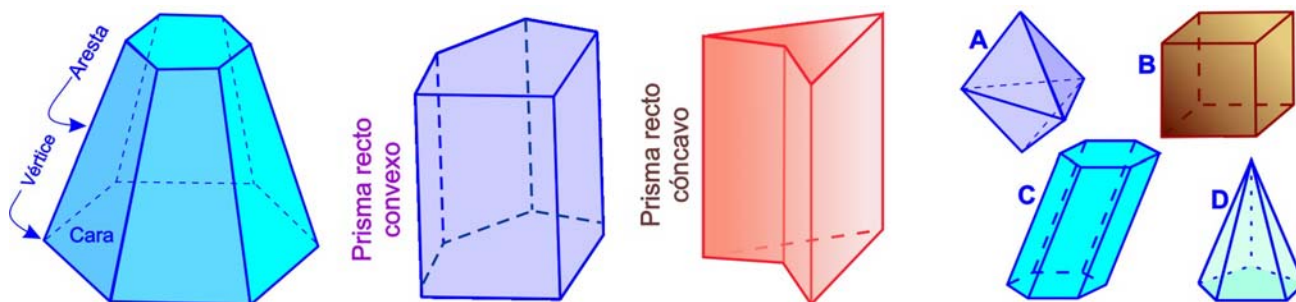
*Descartes tomou xa seriamente interese pola matemática no frío inverno de 1619, no que estivo co exército bávaro, cando podía quedar na cama pola mañá ata as dez, debido á fragilidade da súa saúde, tempo que dedicaba a pensar en problemas matemáticos. Foi neste período da súa xuventude cando descubriu a fórmula sobre poliedros, que adoita coñecerse como **fórmula de Euler**, é dicir $c+v=a+2$, onde **c**, **v**, **a**, son respectivamente os números de caras, vértices e arestas dun poliedro convexo.*

Carl B. Boyer. *Historia de la matemática*.
Alianza Universidad Textos.

Un **poliedro** é un corpo xeométrico limitado por caras planas que son **polígonos**. Nun poliedro poden distinguirse os seguintes elementos básicos: as **caras**, que son os **polígonos** que forman a superficie poliédrica; as **arestas**, **segmentos** nos que se cortan dúas caras; e os **vértices**, que son os **puntos** onde concorren tres ou máis arestas.

Os poliedros poden ser clasificados segundo diversos criterios, desta vez imos repartilos en dúas familias:

convexos ou **cóncavos**. Os poliedros **convexos** son aqueles que, se eliximos dous puntos calquera da superficie poliédrica, o segmento que os une ou ben está sobre esa superficie ou no interior do espazo finito encerrado por ela. Cando esta propiedade non se cumpre, o poliedro é **cóncavo**.



Existe algunha relación entre o número de caras, **C**, vértices, **V**, e arestas, **A**, dun **poliedro convexo**? Na táboa da dereita, facemos o resumo do que ocorre para o caso dos poliedros **A**, **B**, **C** e **D** da figura anterior.

Poliedro	C	V	A	C+V-A
Poliedro A	6	5	9	2
Poliedro B	6	8	12	2
Poliedro C	8	12	18	2
Poliedro D	6	6	10	2

Catro poliedros son ben poucos para comezar a sospeitar se a relación $C + V - A = 2$ se verifica **para todos** os poliedros convexos, pero a resposta é que si se cumpre. Ou sexa; **para todo poliedro convexo**, é certo que:

$$C + V - A = 2$$

O teorema no que se demostra a verificación deste resultado foi publicado por **Leonhard Euler** en 1750.



Que ocorre para os poliedros cóncavos? A resposta a esta pregunta imos deixala para que investigues ti. Para que comeces as túas indagacións propoñémosche que contes as caras, vértices e arestas dos dous poliedros que mostramos á esquerda e tires as túas propias conclusións.

Para rematar, colle cada unha das seguintes figuras que debuxamos a seguir e represéntaa sobre un plano. Fíxate no número das rexións, **R**, nas que queda dividido o plano (as rexións que están pechadas e tamén a rexión exterior), conta as arestas, **A**, e os vértices, **V**, e cotexa os resultados cos da táboa... Que che parece?

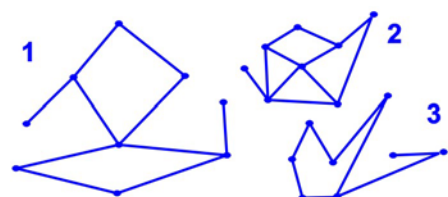


Figura	R	V	A	R+V-A
Figura 1	3	9	10	2
Figura 2	5	8	11	2
Figura 3	2	8	8	2



Andrea de Castro Cebreiro
Cuarto ESO A