

Con e de Euler (I)



Leonhard Euler naceu o 15 de abril de 1707 en Basilea, Suíza. Polo tanto, no vindeiro mes de abril cumpríranse tres centos nove anos dende a data do seu nacemento.

Seu pai, que era pastor calvinista, chamábase Paul Euler e súa nai (filla doutro pastor protestante) foi Marguerite Magdalena Brucker. **Leonhard Euler** tivo dúas irmás menores ca el e pasou a súa nenez nun pobo chamado Riehen.

O pai de **Euler** estaba moi ben relacionado con algúns dos membros da familia **Bernoulli** (a esta familia pertencen un grupo de importantes matemáticos) e por este motivo adquirira unha certa formación en matemáticas.

Paul Euler encargouse inicialmente da formación do seu fillo, a súa pretensión era que **Leonhard** fose pastor protestante, coma el. Así e todo, entre as ensinanzas que o neno recibía tamén estaban incluídas as matemáticas e dende moi pequeno mostrou gran capacidade para esta materia.

Mais tarde foi vivir á casa da súa avoa a Basilea, para comezar os seus estudos de maneira regrada. Aos 14 anos, en 1720, ingresou na universidade de Basilea para acadar coñecementos de tipo xeral e logo licenciarse en filosofía, obxectivo que acadou en 1723. De seguido comezou estudos de teoloxía, grego e hebreo, tal como seu pai tiña planificado.

De todos modos, **Leonhard Euler** nunca deixou de lado o seu interese polas matemáticas e, ao tempo que estudaba na universidade, continuaba coa súa formación matemática seguindo as pautas que lle marcaba **Johann Bernoulli** ao que visitaba todos os domingos para consultarlle dúbidas e recibir os seus consellos.

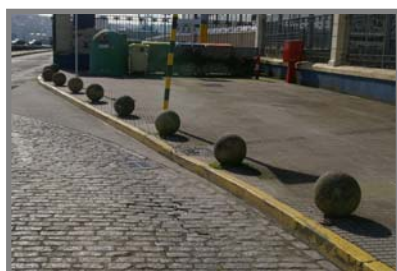
Leonhard Euler comezou a dubidar entre a teoloxía e as matemáticas e **Johann Bernoulli**, decatándose das súas extraordinarias capacidades para esta ciencia, xogou un papel determinante á hora de convencer ao pai para que lle permitise estudar matemáticas. Rematou a súa formación na universidade de Basilea en 1726, acadando o seu doutoramento cunha tese sobre a propagación do son que levou por título *De Sono*.

(continuaremos con esta historia en vindeiros números de Mathesis)



Miguel García de la Calle
Cuarto ESO-A

CAL É O VALOR DO NÚMERO e?



Unha **sucesión numérica** é unha colección *ordenada* de números que cumpren un *criterio* determinado. Cada elemento dunha **sucesión** chámase *termo* da sucesión.

Poñamos un par de exemplos: 1, 1/2, 1/3, 1/4... ou 2, 4, 8, 16... son **sucesións**.

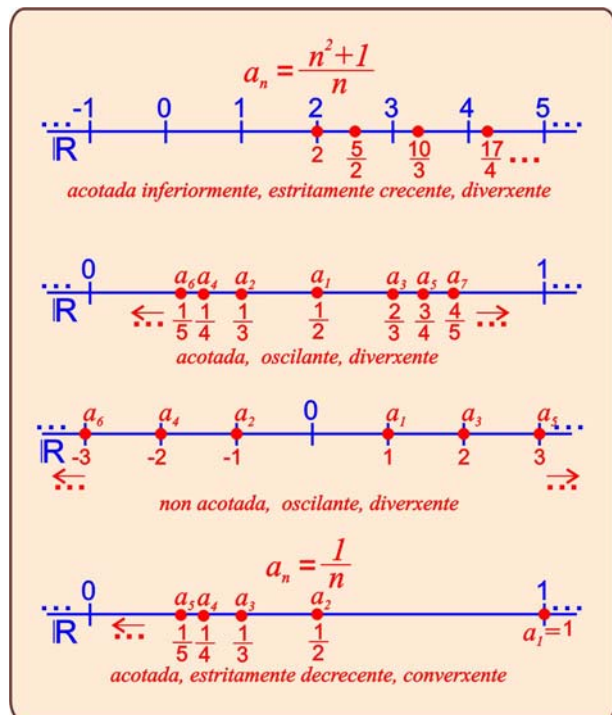
Para referirmos a unha sucesión de maneira xenérica utilizaremos a seguinte notación: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$

Os subíndices indican cales son os lugares nos que se atopan os diferentes termos. Deste modo, a_7 representará o termo que se atopa no lugar 7 e a_{100} o que está no lugar 100.

No primeiro dos exemplos anteriores $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, ...

Con a_n expresamos como se determina un termo calquera da sucesión, volvendo outra vez aos exemplos de antes teriamos, respectivamente: $a_n = 1/n$ e $a_n = 2^n$. Se imos cambiando n por 1, 2, 3, ... obteremos os termos da correspondente sucesión, a cada unha das expresións anteriores chámase **fórmula do termo xeral** da sucesión, dándonos o **criterio** co que se construíu cada sucesión.

Imos dar a continuación algunhas definicións que nos permitirán expresar de que modo se comportan os termos de determinadas sucesións.



Unha sucesión é **crecente** cando calquera termo é **maior ou igual** que o anterior ($a_n \geq a_{n-1}$, para todo n) e é **estritamente crecente** cando calquera termo é **maior** que o anterior ($a_n > a_{n-1}$, para todo n).

Por exemplo, a sucesión 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... é crecente e a sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... é estritamente crecente.

Sen embargo, unha sucesión **decrecente** é aquela na que calquera termo é **menor ou igual** que o anterior ($a_n \leq a_{n-1}$, para todo n) e unha sucesión é **estritamente decrecente** se calquera dos seus termos é **menor** que o anterior ($a_n < a_{n-1}$, para todo n).

Por exemplo, a sucesión 1, 1, 0, 0, -1, -1, -2, -2, -3, ... é decrecente e a sucesión 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, -11, ... é estritamente decrecente.

Diremos que unha sucesión está **acotada inferiormente** se existe **un número menor** que todos os da sucesión

($k < a_n$, para todo n) e estará **acotada superiormente** se se pode atopar **un número maior** que todos os da sucesión ($m > a_n$, para todo n)

Cando unha sucesión esta **acotada inferiormente e superiormente** dise que é unha sucesión **acotada**. Polo tanto, para unha sucesión acotada existe **un número menor** que todos os da sucesión e **outro maior** que todos eles ($k < a_n < m$, para todo n).

Se non se cumpren estas condicións, é dicir, se non hai un número maior que todos os da sucesión nin un número menor que todos eles, dicimos que esa sucesión é **non acotada**.



Chamamos sucesión **converxente** a aquela que, a medida que n aumenta, vai acercándose cada vez máis a un **valor finito**, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = k$. k denomínase **límite** da sucesión. Sen embargo, daquelas sucesións que **non posúan un límite finito**, diremos que son **diverxentes**. Serán **oscilantes** as sucesións nas que os seus termos vaian tomando valores que **alternen entre maior e menor, ou viceversa**.

Tendo presentes estes conceptos básicos sobre **sucesións** que acabamos de recordar, imos tratar de por de manifesto algunhas propiedades da **sucesión** que ten o seguinte termo xeral:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Comecemos por calcular o valor dalgúns termos desta sucesión, tal como mostramos na figura anterior. Observamos que esta sucesión é **estritamente crecente** ($a_{n-1} < a_n$, para todo n) e está **acotada** ($1 < a_n < 3$, para todo n). Por cumprir estas dúas condicións, pódese

demostrar que a sucesión é **converxente** (fíxate que cando n se fai máis grande os valores que toman os termos da sucesión se van achegando cada vez máis a un número). Ese número chámase **número e** na memoria do matemático **Leonhard Euler**.

As primeiras cifras do **número e** son:

2,7182818284590452353602874713527...

O **número e** é un dos números máis *importantes en cálculo* e ten moitas aplicacións, entre elas serve para calcular o *xuro composto continuo* ou para calcular *valores de crecemento continuo*, como por exemplo, o volume dunha árbore en certo tempo.



Lucía Castro Garrido
Terceiro ESO-A

A QUE FAMILIA NUMÉRICA PERTENCE O NÚMERO e ?

Temos comentado en moitas ocasións que, para contar e expresar cantidades, utilizamos un **sistema de numeración decimal posicional**. Podemos escribir calquera cantidade utilizando unicamente **dez cifras** (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) que toman valores diferentes **dependen da posición** que ocupen. Por exemplo, cando escribimos 555,55 cada 5 ten un valor distinto.

Estaredes de acordo comigo se digo que os números que primeiro utilizou calquera de nós foron os que nos permitiron contar e ordenar obxectos: “*comín dúas mazás*”, “*quedei de terceiro na carreira*”... Algo máis tarde tivemos necesidade doutros números, pois precisamos expresar partes da unidade: “*bebín medio vaso de leite*”, “*tardarei un cuarto de hora*”... Na vida diaria utilizamos diferentes tipos de números e hai números que se empregan case exclusivamente en contextos científicos ou teñen que ver con profesións determinadas.

Ao longo dos anos, na escola ou no instituto, fomos agrupando os números en diversas familias. A seguir imos recordar esas clasificacións ás que tantas veces nos referimos cando falamos de matemáticas.



O primeiro conxunto de números que empregamos os seres humanos, denomínase conxunto dos **números naturais**. Está formado polos números que serven para contar e ordenar, por exemplo: 5, 12, 6375, 43 987. Para escribir estas cantidades utilízase un número finito de cifras e para referirnos a eles dispoñemos do seguinte símbolo: **N**.

Os **números naturais** serven para representar *cantidades positivas* pero, coa evolución das sociedades, a humanidade enfrontouse á necesidade de ter que anotar *cantidades negativas* (débedas, estar antes ou por debaixo dun punto, nivel ou acontecemento que marque un antes ou un despois de algo...), deberon pasar séculos para *inventar e admitir as cantidades negativas* que, con tanta naturalidade, utilizamos na actualidade: -3, -45, -6598...

Fixádevos que estes dous tipos de números dos que acabamos de falar representan *cantidades enteiras* (positivas ou negativas), constitúen o conxunto dos **números enteiros** que representaremos como **Z**. Os **números naturais** son, polo tanto, un **subconxunto** dos **números enteiros**: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Como xa apuntamos máis arriba, en moitas situacións temos que utilizar números non enteiros, por isto xurdiu a necesidade de crear números fraccionarios. Unha fracción é a

división indicada de dous números enteiros: $\frac{2}{3}, \frac{15}{5}, \frac{-9}{8}, \frac{27}{-9}, \frac{1}{6}$.



No antigo Exipto, xa se realizaban cálculos con fraccións. Os matemáticos árabes comezaron a utilizar a notación actual (colocando unha liña entre o numerador e o denominador) e foi *Fibonacci* o primeiro en introducir este símbolo en Europa, consolidándose o seu uso algúns séculos máis tarde.

Teñen todas as fraccións o mesmo tipo de expresión decimal? A resposta é negativa. Vexamos cal é a expresión decimal das fraccións que citamos no exemplo anterior:

$$\frac{2}{3} = 0,6666... \quad \frac{15}{5} = 3 \quad \frac{-9}{8} = -1,125 \quad \frac{27}{-9} = -3 \quad \frac{1}{6} = 0,16666...$$



As fracción anteriores correspóndense cos tipos de expresión decimais que se poden obter cando calculamos o valor decimal de *calquera* fracción. Observamos que os **números enteiros** poden expresarse utilizando unha fracción; e noutros casos, obtemos resultados non enteiros que poden ser de tres tipos: **expresións decimais finitas**, **expresións decimais infinitas periódicas puras** ou **expresións decimais infinitas periódicas mixtas** (repasa estes conceptos se non recordas o seu significado).

En definitiva, os números que levamos descritos ata aquí poden expresarse *utilizando fraccións*, todos xuntos constitúen a familia dos **números racionais**, que se representan co símbolo $\mathbb{Q}$ e cúmprese $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

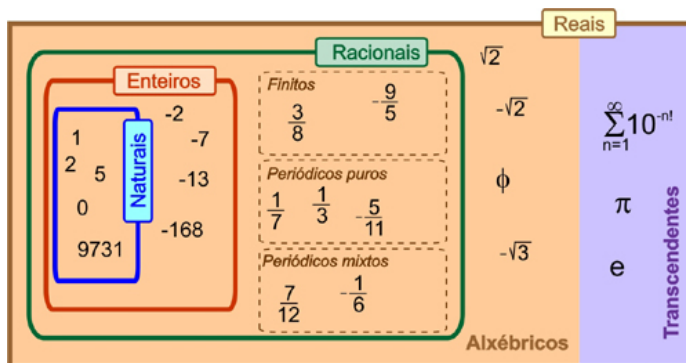
Todos os números citados ata agora poden obterse como solucións de ecuacións polinómicas. Estas son as ecuacións polinómicas máis sinxelas que teñen por solucións, respectivamente, as fraccións anteriores:

$$3x = 2 \quad 5x = 15 \quad 8x + 9 = 0 \quad 9x + 27 = 0 \quad 6x = 1$$

Por darse esta circunstancia, os **números racionais** son tamén **números alxébricos**.

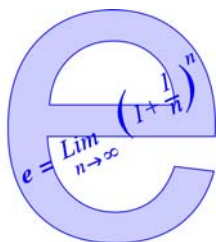
Existen números que **non se poden expresar en forma de fracción**, son os chamados **números irracionais**. Son números con **expresión decimal infinita non periódica**. Citemos uns exemplos:

$$\sqrt{2} = 1,414213562... \quad \phi = 1,618033988... \\ \pi = 3,141592653... \quad e = 2,7182818284...$$



Hai dous tipos de números irracionais. Os dous primeiros (raíz de dous e número áureo) son solucións, respectivamente, das ecuacións polinómicas $x^2 - 2 = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$; son, pois, **números alxébricos**.

Os número π e e non se poden obter como solucións de ecuacións polinómicas (no artigo anterior vimos que o **número e** é o límite dunha sucesión), estes dous números (e outros moitos) son números **irracionais transcendentos**.



Todos os números descritos ata aquí constitúen o conxunto dos números reais, $\mathbb{R}$, e temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Neste momento xa podemos responder á pregunta que faciamos no título deste artigo: **Un dos números máis importantes das matemáticas é o chamado número e , un número irracional transcendente; é dicir, ten infinitas cifras que non se repiten periodicamente e non é solución de ningunha ecuación polinómica. As súas primeiras cifras son: 2,7182818284590...**



Patricia Fernández Esmoris
Cuarto ESO-A