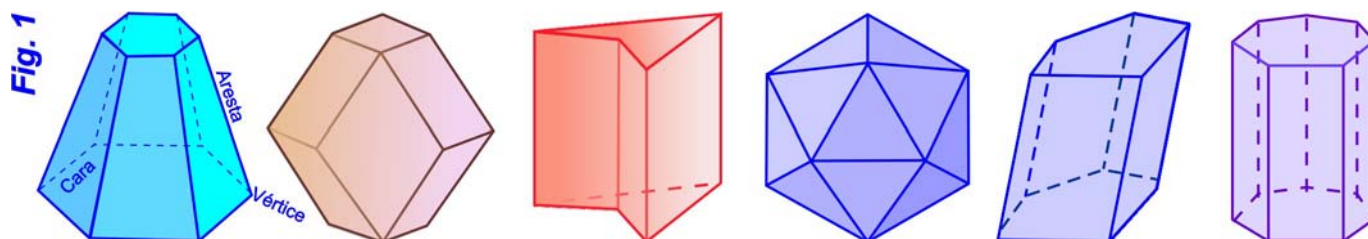


ORTOEDRO ÁUREO

A palabra **poliedro** procede do termo grego *polyedron*, formado polas partículas *polys* que significa moitas e *edra* que significa caras. Un **poliedro** (para ser máis precisos debéramos dicir unha **superficie poliédrica**) é un corpo xeométrico formado por **caras** que son **polígonos** que encerran un volume finito. Os seus elementos característicos son: as **caras**, é dicir, os polígonos que o forman; as **arestas**, segmentos onde se unen dúas caras, e os **vértices** que son os puntos onde concorren tres ou máis arestas.



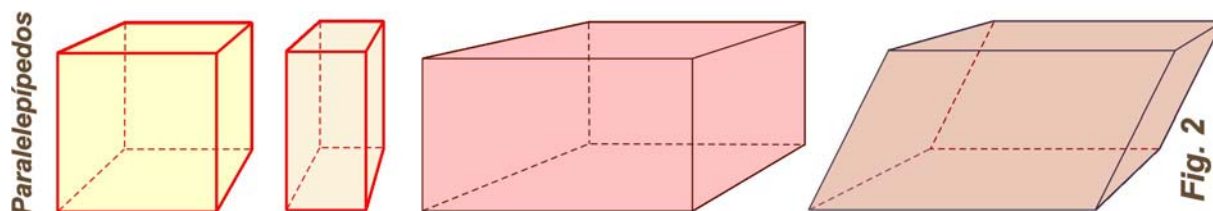
Os poliedros poden clasificarse de diferentes maneiras dependendo do criterio que se estableza.

Se nos fixamos no espazo que encerran, poden distribuírse en dúas familias: **convexos** e **cóncavos**. Un poliedro é **convexo** se todos os segmentos que unen dous puntos calquera da súa superficie están contidos no espazo encerrado polas caras. Poliedros **cóncavos** son os que non cumpren a propiedade anterior.

Se reparamos na forma das súas caras podemos diferenciar: **poliedros regulares**, se as súas caras son **polígonos regulares** idénticos e os vértices do mesmo tipo; ou poliedros **non regulares**, aqueles nos que non se cumpre algunha das dúas condicións anteriores. Só existen cinco **poliedros regulares convexos** que reciben o nome de **sólidos platónicos** (Podes xustificar que só hai cinco? Por que se chaman así?).

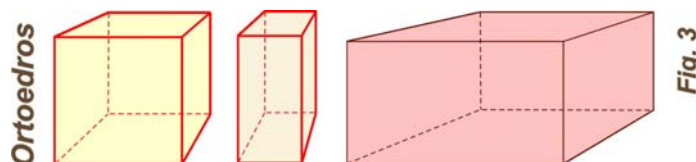
Os **prismas** son superficies poliédricas con dúas caras paralelas iguais que poden ser calquera polígono (triángulos, cuadriláteros, pentágonos... que adoitamos chamarlle **bases**) e **caras laterais** que sexan **paralelogramos**. Cando todas as arestas laterais do prisma son perpendiculares ás súas bases, falamos de **prismas rectos**; en caso contrario serán **prismas oblicuos**. Dentro dos prismas rectos podemos atopar os chamados **prismas regulares**, é dicir, prismas rectos nos que as súas **bases** son **polígonos regulares**.

Identifica cada un dos poliedros que aparecen na Fig. 1.



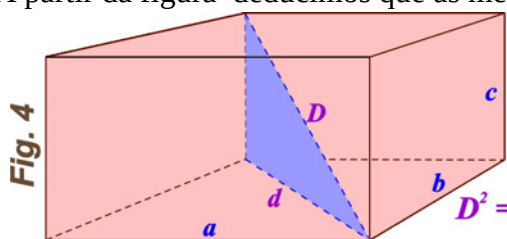
Un **paralelepípedo** é un **prisma** de seis caras que son **paralelogramos**. Os **ortoedros** son **paralelepípedos** nos que todas as súas caras son **rectángulos**. Isto é, nos **ortoedros** as bases son rectángulos e as arestas laterais son perpendiculares ás arestas das bases.

En consecuencia, se as caras dun **ortoedro** son todas cadradas teremos un **cubo**; se dúas caras son cadradas e as outras non, será un **prisma regular de base cadrada**.



Se coñecemos as tres *dimensións* dun **ortopedro**, poderemos calcular a medida das diagonais das súas caras aplicando o Teorema de Pitágoras (ver **Fig. 4**). Tamén será doado obter a medida das diagonais que unen dous vértices que non pertencen á mesma cara, que son as que se coñecen como **diagonais do ortopedro**.

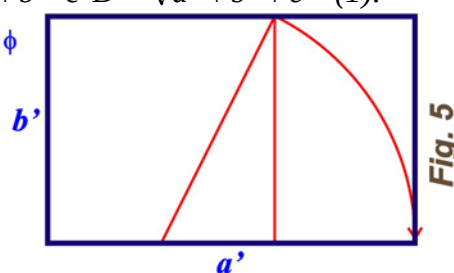
A partir da figura deducimos que as medidas de d e D son: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (1).



$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$m = \frac{a'}{b'} = \phi$$



O cálculo da *área* dun **ortopedro** (medida da súa *superficie*) e o cálculo do *volumen* (cantidade de espazo tridimensional que ocupa) son tarefas sinxelas de realizar: $A = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ e $V = a \cdot b \cdot c$.

No que segue imos tratar de relacionar **ortopedros** e **número áureo**. Recorda que o valor do número áureo, que adoitamos representar coa letra grega ϕ , coincide coa solución positiva da ecuación $x^2 - x - 1 = 0$,

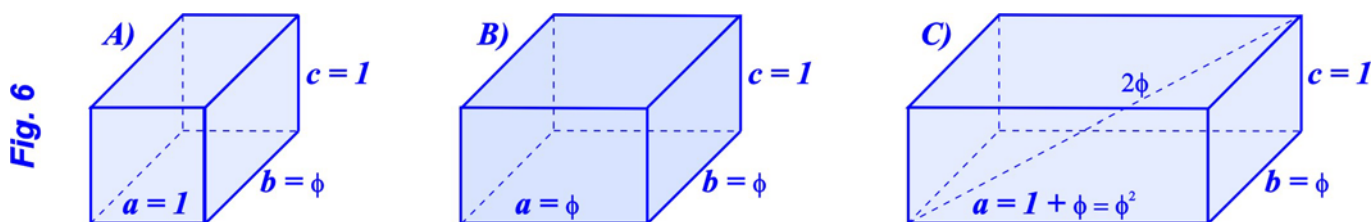
que é: $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$ Ou sexa, $\phi = 1,6180339887...$ Por ser ϕ solución da ecuación de

segundo grao anterior, cúmprese que $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ que tamén se pode escribir $\phi^2 = \phi + 1$ e, dividindo os dous membros entre ϕ , $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

O **módulo** dun rectángulo é a **razón**, m , entre as lonxitudes dos seus lados maior e menor. Chamamos **rectángulo áureo** ao que teña por módulo o número áureo, $m = \phi$. Na **Fig. 5** recordamos como se constrúe un **rectángulo áureo** partindo dun cadrado. Xustifica ti que o rectángulo obtido é **áureo**. Lembra que o teu DNI ou as tarxetas de créditos son rectángulos áureos?

Na nosa vida diaria usamos multitude de obxectos que teñen forma de **ortopedro**. Mesmo pasamos a maior parte do tempo dentro dalgún **ortopedro**. Os **ortopedros** utilízanse habitualmente para organizar o espazo (mobles, habitacións, edificios... adoitan ter forma de **ortopedro**).

Imos representar a seguir tres **ortopedros notables** por seren **rectángulos áureos** algunhas das súas caras. Axustándose a estas dimensións construíronse mobles, salóns, templo se edificios singulares.



Propoñémosche que determines os módulos dos rectángulos que forman estes tres **ortopedros**. O **ortopedro** do apartado **C)** da **Fig. 6**, que é equivalente á unión dos outros dous, representa ao que acostuma coñecerse como **ortopedro áureo** (Golden Solid, **sólido de ouro**). As súas dimensións son 1, ϕ e ϕ^2 (a terceira dimensión é a suma das outras dúas: $1 + \phi = \phi^2$). Calculemos a medida da súa diagonal utilizando a fórmula (1):

$$D = \sqrt{(\phi + 1)^2 + \phi^2 + 1^2} = \sqrt{\phi^2 + 2\phi + 1 + \phi^2 + 1} = \sqrt{2\phi^2 + 2\phi + 2} = \sqrt{2(\phi + 1) + 2\phi + 2} =$$

$$= \sqrt{4\phi + 4}.$$

$$D = \sqrt{4(\phi + 1)} = \sqrt{4\phi^2} = 2\phi$$

O que significa que, ademais das súas notables dimensións, o punto onde se cortan as súas diagonais atópase a distancia ϕ dos seus oito vértices. ¡Non se pode ser máis **áureo**!



Carlota Cal Álvarez
Cuarto ESO-A.

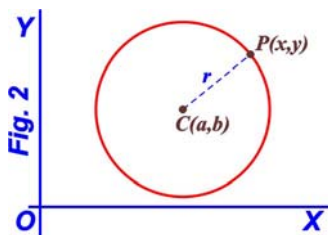
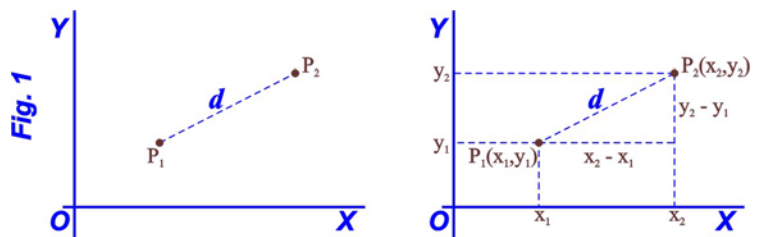
OUTRA OLLADA MATEMÁTICA NO PARQUE DE OZA



Supoñamos un plano dotado dun *sistema de coordenadas rectangulares cartesianas*. Como se calcula a distancia, d , entre dous puntos, P_1 e P_2 , dese plano? Observemos a **Fig. 1** para comprender a resposta.

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** obtemos o valor da distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Unha *circunferencia* de *centro* $C(a,b)$ e *raio* r é o *lugar xeométrico* dos infinitos puntos, $P(x,y)$, do plano que estean a distancia r do punto fixo C .



Así, pois, o *centro* é o *punto* do que equidistan todos os puntos que forman a circunferencia e calquera *segmento* que una o centro con un dos puntos da circunferencia é un *raio* (na definición dada no parágrafo anterior, a palabra *raio* está representando á *medida* dun *deses* *segmentos*).

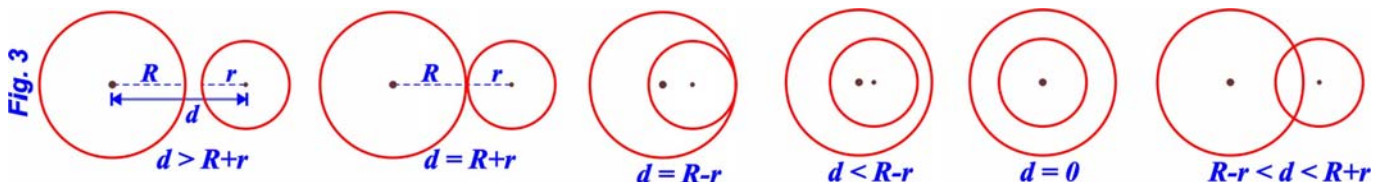
Utilizando a fórmula para o calculo da distancia entre dous puntos que deducimos máis arriba (axustando a notación á **Fig. 2** e elevando os dous membros ao cadrado), a *ecuación da circunferencia* será:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Se unimos calquera par de puntos que se atopen sobre unha circunferencia obtemos un *segmento* que se chama *corda*. Toda *corda* que pase polo *centro* da circunferencia denomínase *diámetro*. Dous puntos sobre a *circunferencia* determinan dous *arcos*.

Non é unha cuestión evidente, pero sabemos que a medida da lonxitude dunha circunferencia está en relación directa co seu diámetro: $L = \pi \cdot d$, polo tanto $L = 2\pi r$.

Vexamos cales poden ser as *posicións relativas* entre dúas circunferencias que se atopen no mesmo plano.



Sexa C_1 unha circunferencia de raio R e C_2 outra de raio r , con $R > r$. Chamemos d á distancia existente entre os centros de ambas circunferencias.

Se $d > R + r$, é dicir, se a distancia entre os centros das circunferencias C_1 e C_2 é maior que a suma das medidas dos seus raios, as circunferencias serán *exteriores* e non terán puntos en común.

Se $d = R + r$ ambas circunferencias terán un punto en común e serán *tanxentes exteriores*.

Se $d = R - r$ as circunferencias terán un punto común e serán *tanxentes interiores*.

Se $d < R-r$ as circunferencias non terán puntos en común e a de raio menor será **interior** á de raio maior.

Cando os dous centros coinciden, $d=0$, as circunferencias dinse **concéntricas**.

Se $R-r < d < R+r$ as circunferencias cortaranse en dous puntos e chamaranse **secantes**.

Un **círculo** é a porción de superficie plana limitada por unha **circunferencia**. Tendo en conta a **ecuación** (1) dada para a **circunferencia**, a **inecuación** que representa un **círculo** será:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

A medida do **perímetro** do círculo coincide coa **lonxitude** da **circunferencia**, a súa área calcularase coa fórmula $A=\pi r^2$.

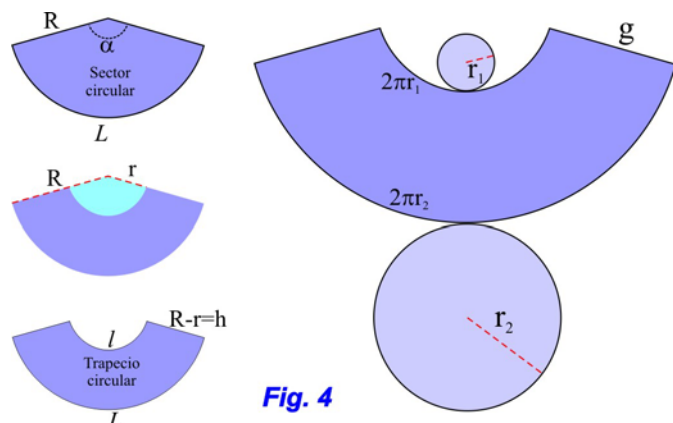


Fig. 4

A partir dun círculo podemos obter outras figuras planas coma as dúas que representamos na **Fig. 4**.

Como sabemos, un **sector circular** é unha porción de círculo limitada por dous **raios** e un **arco**.

A lonxitude do arco dun sector circular é proporcional ao ángulo que abarca, polo que se o ángulo mide 1° a súa lonxitude será:

$$L_{1^\circ} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$$

E se o ángulo mide α graos a lonxitude do arco é $L = \alpha \frac{\pi R}{180}$. (*)

Razoando de igual modo, a área do sector circular correspondente a un ángulo de α graos será $A = \alpha \frac{\pi R^2}{360}$

Imos reescribir esta última fórmula relacionándoa coa medida do arco que antes sinalamos con (*):

$$A_{\text{Sector}} = \alpha \frac{\pi R^2}{360} = \alpha \frac{\pi R \cdot R}{180 \cdot 2} = \frac{L \cdot R}{2}$$

Acabamos de obter, pois, unha formula que nos permite calcular a **medida da superficie dun sector circular en función das medidas do arco que abarca e do raio do círculo**. Utilicemos este resultado para calcular a área dun **trapezio circular** obtido a partir dunha **coroa circular** de raios R e r :

$$A_{\text{Trapezio Circular}} = \frac{\alpha \pi R^2}{360} - \frac{\alpha \pi r^2}{360} = \frac{\alpha \pi}{360} (R^2 - r^2) = \frac{\alpha \pi}{360} (R+r)(R-r) =$$

$$= \left(\frac{\alpha \pi R}{180 \cdot 2} + \frac{\alpha \pi r}{180 \cdot 2} \right) (R-r) = \left(\frac{L}{2} + \frac{l}{2} \right) h = \frac{(L+l)h}{2}$$

$$A_{\text{Trapezio Circular}} = \frac{(L+l)h}{2}$$



A partir deste último resultado (e tendo en conta a **Fig. 4**) poderás calcular de xeito doado cal é a **área lateral** do **tronco de cono** que se mostra na foto. Que medidas se deben tomar?

$$A_{\text{Lat.}} = \frac{(2\pi r_2 + 2\pi r_1) \cdot g}{2} = \frac{2\pi(r_2 + r_1) \cdot g}{2} = \pi(r_2 + r_1)g$$



Carla Delmonte Martínez
Cuarto ESO-A.

Para investigar e recordar: a) Como se calcula a **superficie total** dun **tronco de cono**? E o **volumen**?

b) Cales son as posicións relativas que poden ter unha recta, r , e unha circunferencia, C , que estean no mesmo plano?