

PROBABILIDADE

Escoitar o termo **probabilidade** e pensar automaticamente no lanzamento dun dado é pouco menos que un acto reflexo. Pero este feito ten a súa razón de ser, poderíamos dicir que o nacemento da parte das matemáticas que se ocupa do **estudo da probabilidade** veu provocado polo lanzamento dos dados.



Se collemos un dado e o lanzamos verticalmente cara arriba, a unha velocidade de 20 metros por segundo, sabemos (¡antes de lanzalo!) moitas das cousas que van pasar: cal será a altura máxima que vai acadar, canto tempo tardará en chegar a esa altura, sabemos que caerá e canto tempo lle levará chegar ao chan... coñecemos fórmulas da física que nos dan resposta a esas e a outras cuestións.

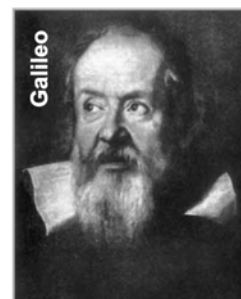
Non obstante, teremos que agardar a que remate a experiencia para saber cal será o número de puntos que vai mostrar a cara superior do dado cando se pouse no chan.

Se ao realizar un experimento podemos saber previamente cal é o resultado que imos obter, é que estamos levando a cabo un **experimento determinista**. Pola contra, das experiencias para as que é imposible predicir o resultado ata que remate a súa execución diremos que son **aleatorias**.

O termo *alea* ten, en latín, o significado de **dado**. *Alea jacta est* é unha famosa frase atribuída a *Julio César* no momento de cruzar o río *Rubicón*; significa *os dados foron lanzados* ou *a sorte está lanzada*, utilízase frecuentemente cando se dá comezo a unha actuacións da que o resultado depende do **azar**.

Investiga que consecuencias tivo, para a historia de Roma, o paso do río *Rubicón* por *Julio César*.

Os xogos de azar practicáronse dende hai miles de anos nas culturas máis antigas (como a exipcia ou a grega) e o obxectivo prioritario dos xogadores sempre foi, evidentemente, gañar. A pesar diso, os primeiros matemáticos que fixeron estudos relacionados co que hoxe se chama **probabilidade** sitúanse no Renacemento italiano: **Fra Luca Pacioli**, 1445 – 1517; **Nicolo Fontana (Tartaglia, o tatexo)**, 1499 – 1559; **Girolamo Cardano**, 1501 – 1576; **Galileo Galilei**, 1564 – 1642...

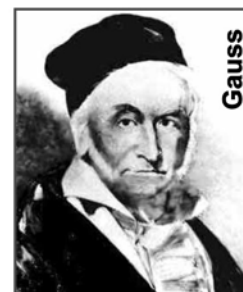
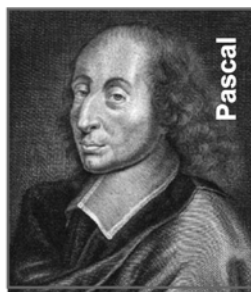


Así e todo, o que se considera como punto de partida do estudo matemático do azar fíxase no século XVII (época na que os xogos de azar estiveron moi de moda entre a nobreza francesa) e ten que ver coa resolución dun problema máis antigo do que existen múltiples versións.

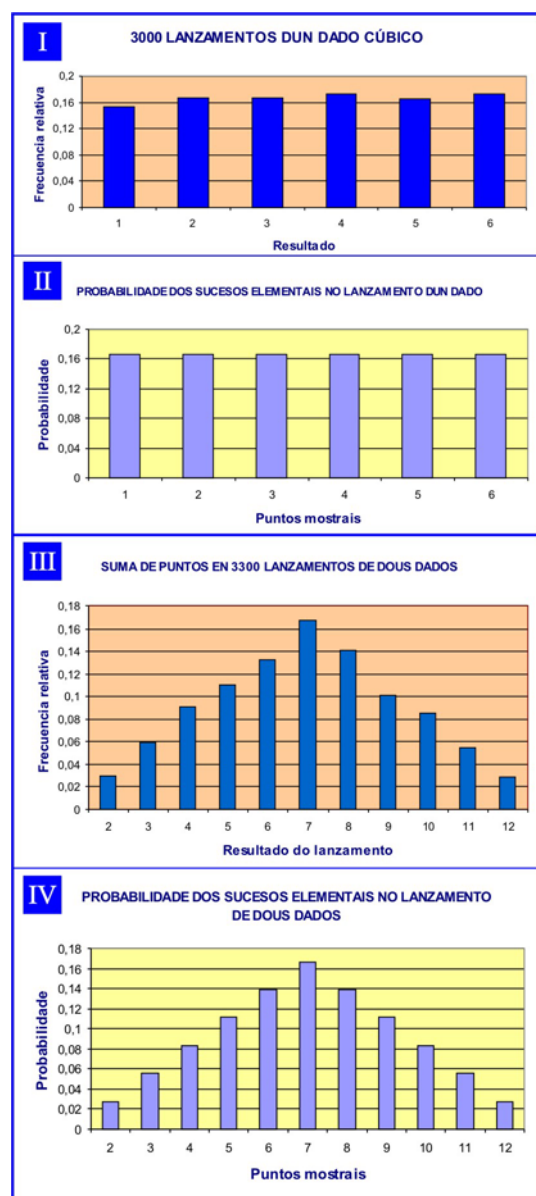
Antoine Gombaud (máis coñecido como **Cabaleiro de Meré**, a pesar de non ser membro da aristocracia) tiña entre as súas dedicacións favoritas a práctica dos xogos de azar. Por este motivo, propúxolle ao matemático **Blaise Pascal** (1623 – 1662) que resolvese o coñecido **Problema do Reparto**. Velaquí unha versión do enunciado:

Dous xogadores, **A** e **B**, apostan 1500 dobróns cada un. Lanzarán unha moeda, se sae cara gañará **A** e se sae cruz gañará **B**. Os 3000 dobróns serán para o primeiro dos xogadores que consiga gañar tres veces. No momento no que o xogador **A** vai gañando 2 a 1 teñen que interromper a partida e non se poderá continuar máis tarde. Cómo se debe facer o reparto dos 3000 dobróns?

Para resolver este problema, **Pascal** consultou con **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) establecéndose, entre xullo e outubro de 1654, unha correspondencia de sete cartas que son consideradas como o **inicio do Cálculo de Probabilidades**.



Investiga: a) Cabaleiro de Meré. B) Cal é a solución ao problema anterior? (Existe unha referencia a el no tema de probabilidade do noso libro de texto de 3º de ESO).



Cando se realiza un experimento aleatorio, denomínase **espazo mostral** ao conxunto formado por todos os resultados posibles que se poden obter. Cada un dos elementos que forman o **espazo mostral** é un **punto mostral**.

Por exemplo, se lanzamos un dado cúbico para mirar cantos puntos saen na súa cara superior, o **espazo mostral** será $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pero se lanzamos dous dados e sumamos os puntos que quedan nas dúas caras superiores, o **espazo mostral** é: $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Investiga: Cal é o espazo mostral se lanzamos unha moeda? E se lanzamos catro?

Calquera subconxunto dun espazo mostral, chámase **suceso**. Por exemplo, no caso do lanzamento dun dado, os **sucesos** saír par ou saír múltiplo de tres serán, respectivamente: $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{3, 6\}$.

Un **suceso** dise **elemental** se está formado por un **único punto mostral**. Teremos, pois, seis sucesos elementais no caso de lanzar un dado e once se lanzamos dous dados e facemos a suma dos puntos das caras superiores.

A **lei de Laplace** (Pierre Simon Laplace, 1749 – 1827) permítenos calcular a probabilidade de calquera suceso para as experiencias aleatorias nas que os sucesos elementais teñan a mesma probabilidade de realizarse. Nese caso a probabilidade dun suceso, S , calcularase así:

$$p(S) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$$

No exemplo do lanzamento dun dado, para os sucesos A e B citados máis arriba terase: $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

+						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Cando lanzamos **un dado** todos os **sucesos elementais** teñen a **mesma probabilidade**, $1/6$, (véxase o gráfico II na páxina anterior) por iso **se pode** aplicar a **lei de Laplace**. Sen embargo, non ocorre o mesmo ao lanzar dous dados e sumar os seus puntos (gráfico IV). A clave está na táboa que se mostra á esquerda, calcula ti as probabilidades dos sucesos elementais.

Nos días pasados, o alumnado de terceiro estivo investigando o cumprimento da **lei dos grandes números**. Lanzouse un dado 3000 veces e dous dados 3300 veces.

Os resultados móstranse nos gráficos I e III.

Investiga ti de que trata a mencionada **lei dos grandes números**. Fai tamén investigacións sobre os personaxes que aparecen na páxina anterior e non foron citados, que achegas fixeron á **Teoría das Probabilidades**?



María Seoane Rodríguez
Cuarto ESO-A

ACERCAMENTO Á HISTORIA DAS ECUACIÓNS III

Cando traballamos con ecuacións observamos que presentan diferentes aspectos que fundamentalmente están determinados polas operacións que interveñen en cada unha delas.

Unha ecuación **polinómica** (ou **alxébrica**) é a que se pode escribir usando o seguinte modelo: $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é un polinomio. O **polinomio** pode conter unha ou varias **variables** e debemos ter en conta tamén o seu grao (**recordas que é o grao dun polinomio?**).

Ademais das **ecuacións polinómicas** temos traballado con outros tipos: **ecuacións co x no denominador**, **ecuacións con radicais**, **ecuacións exponenciais**...

Investiga ti outros modelos de ecuacións. Clasifica estas que che damos a continuación e trata de atopar solucións por tenteo:

$$\frac{(x+1)^2}{3} - 10 = \sqrt{9-x} \quad \frac{2}{3} - \frac{x-5}{x+2} = 2 \quad (x-2)^2 + x = \frac{x+9}{3} \quad 2^x = 65\,536$$

Moitos de nós tivemos que resolver bastantes veces **ecuacións polinómicas de segundo grao** e mesmo **ecuacións bicadradas** (recorda ou investiga que é unha **ecuación bicadrada** e como se resolve).

Sabemos que unha **ecuación xeral de segundo grao** é a que se axusta ao modelo $ax^2+bx+c=0$ (sendo a , b , c números reais, con $a \neq 0$). Na actualidade dispoñemos dunha fórmula que podemos utilizar para

resolver calquera ecuación de segundo grao: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, pero as cousas non foron sempre así de

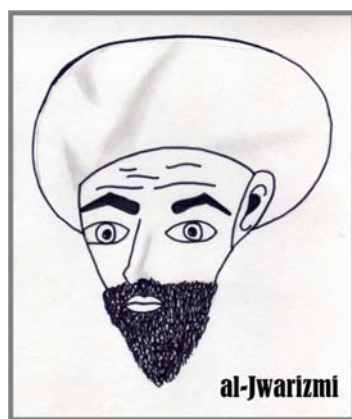
sinxelas a pesar de que, como apuntamos en entregas anteriores deste achegamento á historia das ecuacións, xa os babilonios, os gregos e os matemáticos da India resolveron certos tipos de ecuacións de segundo grao.

Os avances máis importantes na tarefa de **resolver unha ecuación de segundo grao** débémollos aos árabes.

Harun al-Rashid (766 - 809) foi califa entre 786 e 809, nesta época impulsou de maneira decidida a cultura e a ciencia ordenando a recompilación e tradución ao árabe dos saberes doutras civilizacións.

Foi sucedido polo seu fillo **Al-Mamún** (786 - 833). No seu reinado (813 - 833) conseguiu un gran esplendor científico e fundou a **Casa da Sabedoría de Bagdad** onde se arquivaron libros de todas as disciplinas, se traduciron obras procedentes de todas as partes do mundo e se fixeron novos avances.

Neste escenario cultural e científico, os árabes recolleron da cultura hindú o **sistema posicional de numeración de base dez** e tamén as **ecuación alxébricas** que fixeron progresar coa axuda da xeometría grega.



Debuxo: Zoe Calvo Ferreira. 3º ESO B.

Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 – 850) traballou na *Casa da Sabedoría* e a partir das súas investigacións escribiu varios libros. Imos referirnos aquí á máis coñecida e difundida de todas as súas obras: *al Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*. Este libro, de gran importancia dentro da historia das matemáticas, ten tres seccións diferenciadas: a segunda e a terceira están dedicadas, respectivamente, á xeometría, e a cuestións relacionadas con testamentos e repartos; na primeira parte do libro faise un estudo polo miúdo das ecuacións de segundo grao resolvendo abundantes exemplos.

O libro de *al-Jwarizmi* serviu tamén para darlle nome á nova disciplina matemática, pois a palabra *álgebra* que se utiliza actualmente deriva do termo *al-jabr* que aparece no seu título.

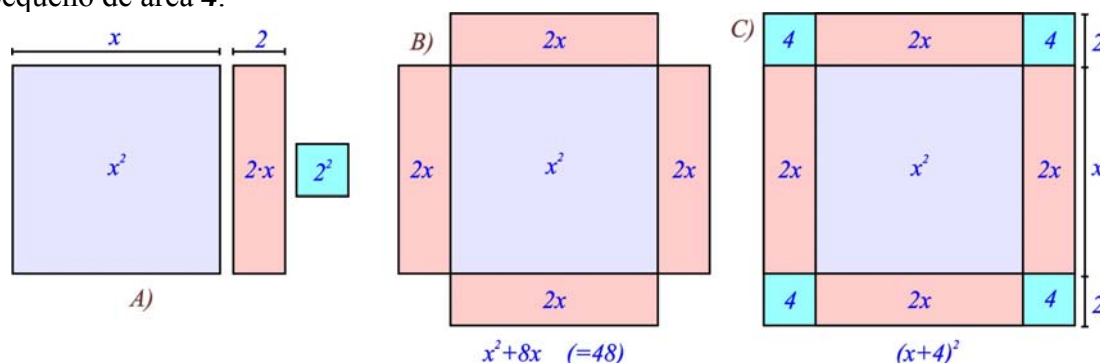
Os árabes resolvían as ecuacións de maneira retórica (facendo unha redacción con palabras) unindo os métodos que trouxeran da India cos coñecementos xeométricos recollidos da cultura grega. Para referirse á *incógnita* utilizaban a palabra *cousa*.

Al-Jwarizmi sempre traballa con ecuacións de segundo grao onde o *coeficiente principal* vale 1. Cando é preciso, fai transformacións para que isto se cumpra (divide os dous membros entre un número adecuado, diríamos hoxe) aínda que a transformación realizada o obrigue a traballar con coeficientes fraccionarios. Por outra parte, nunca utiliza coeficientes negativos nin admite as posibles solucións negativas. A introdución destas dúas restricións condúceno a que teña que considerar seis modelos diferentes entre as ecuacións de primeiro e segundo grao, tal como se mostra na táboa da dereita.

Linguaxe retórica	Actual
Cadrado da cousa igual a cousas	$x^2 = bx$
Cadrado da cousa igual a número	$x^2 = c$
Cousas igual a número	$bx = c$
Cadrado da cousa máis cousas igual a número	$x^2 + bx = c$
Cadrado da cousa máis número igual a cousas	$x^2 + c = bx$
Cadrado da cousa igual a cousas máis número	$x^2 = bx + c$

Imos mostrar a continuación como resolvían os árabes unha ecuación do tipo *cadrado da cousa máis cousas igual a número*, buscando a solución para seguinte caso particular: $x^2 + 8x = 48$.

Reparemos no apartado **A)** da seguinte figura. Comezamos elixindo un segmento que represente a *cousa*, x , e outro que represente á *cuarta parte do valor de b* (como no noso exemplo $b=8$, o segundo segmento representará a 2). A partir destes valores construímos o cadrado de área x^2 , o rectángulo de área $2x$ e o cadrado pequeno de área 4.



O apartado **B)** da figura representa $x^2 + 8x$, que é o primeiro membro da ecuación que queremos resolver, polo tanto é igual a 48.

O apartado **C)** pode mirarse baixo dous puntos de vista: como o apartado anterior que se completou cos catro cadradiños nas esquinas (incrementábase así a área en 16 unidades), ou ben coma un cadrado de lado $x+4$. É dicir: $(x+4)^2 = 48 + 16 \Rightarrow (x+4)^2 = 64 \Rightarrow x+4 = 8 \Rightarrow x = 4$ (lembra que *al-Jwarizmi* non tiña en conta as solucións negativas).

Lorena Mosteiro Díaz
Cuarto ESO-A