

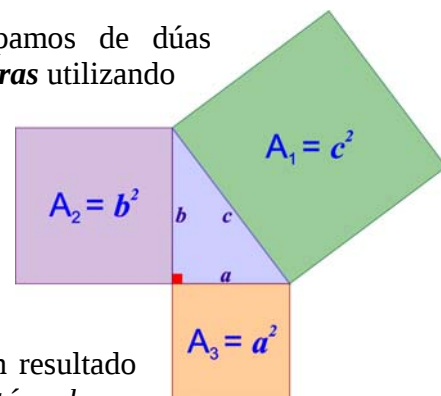
OUTRAS DÚAS DEMOSTRACIÓNS XEOMÉTRICAS DO TEOREMA CHAMADO DE PITÁGORAS



No número 66 de *Mathesis* xa nos ocupamos de dúas demostracións do chamado **Teorema de Pitágoras** utilizando propiedades xeométricas das figuras.

Un triángulo rectángulo é aquel que ten un ángulo recto e outros dous agudos complementarios. O lado oposto ao ángulo recto chámase *hipotenusa*, mentres que os outros dous son os *catetos*.

Como sabemos, o **Teorema de Pitágoras** é un resultado que se cumpre unicamente para triángulos rectángulos, e



afirma que: *se tomamos un triángulo rectángulo calquera, a área do cadrado construído sobre a súa hipotenusa, coincide coa suma das áreas dos cadrados construídos sobre os dous catetos*. É dicir, utilizando a notación que se detalla na figura de arriba: $A_1 = A_2 + A_3$. Ou, o que é o mesmo: $c^2 = b^2 + a^2$.

Antes de referirnos ás demostracións do teorema que imos comentar desta vez, imos lembrar algunhas propiedades que utilizaremos máis adiante.

Na Fig. 1 resúmense as condicións que serven para decidir se dous triángulos son iguais.

Os tres polígonos (romboide, rectángulo e triángulo) que aparecen na Fig. 2 teñen a mesma altura, pois atópanse entre dúas rectas, r_1 e r_2 , que son paralelas. O romboide, R_2 , e o rectángulo, R_1 , teñen a mesma área, pois son dous paralelogramos nos que coinciden as medidas das bases e das alturas. O triángulo T ten a metade de área que o rectángulo R_1 , por teren tamén os dous a mesma base e coincidiren as súas alturas.

Dous triángulos son iguais se cumpren algunha destas tres condicións:

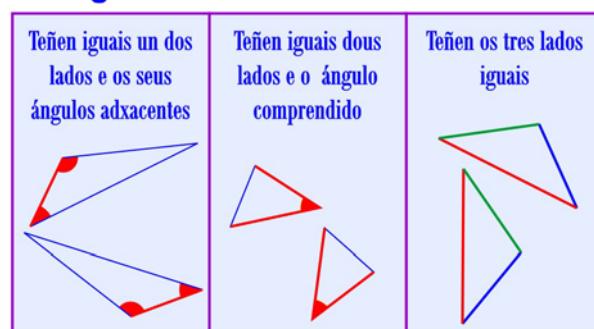


Fig. 1

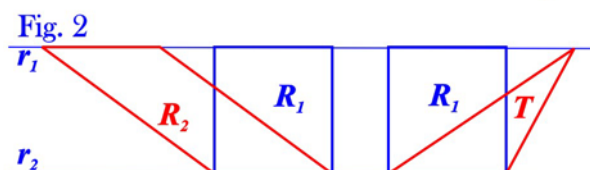


Fig. 2

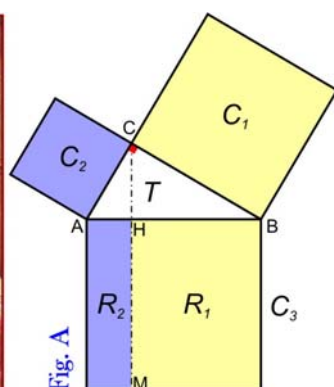


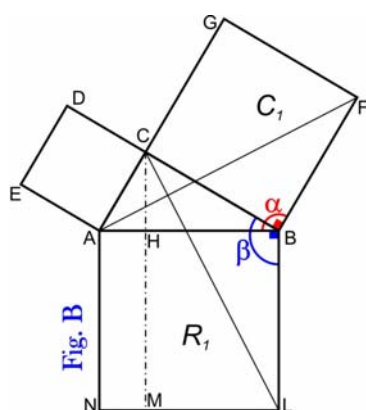
Fig. A

O obxectivo que perseguimos con este artigo é reproducir dúas demostracións do **Teorema de Pitágoras**. Os seus autores son **Euclides de Alexandría** e **Leonardo da Vinci**.

Euclides de Alexandría (aproximadamente 325 – 265 a.C.), ao que moitos chaman o *Pai da Xeometría*, foi o autor de importantes obras matemáticas. Ata os nosos días chegaronnos cinco desas obras, pero a máis coñecido dos seus escritos é o que leva por título **Os Elementos**. Os *Elementos* está formado por trece libros; a demostración do **Teorema de Pitágoras** que se mostra a seguir aparece no libro primeiro.

Se nos fixamos na Fig. A da páxina anterior, observamos que sobre os catetos e a hipotenusa do triángulo T se construíron, respectivamente, os cadrados C_1 , C_2 e C_3 . Na figura aparece tamén o segmento CM que contén á altura CH do triángulo. Se somos quen de demostrar que a área do cadrado C_1 coincide coa área do rectángulo R_1 e a área do cadrado C_2 coincide coa área do rectángulo R_2 , quedaría demostrado o *Teorema de Pitágoras* pois ao xuntar as áreas de R_1 e R_2 obtense a área do cadrado C_3 .

Comecemos por xustificar que a área do cadrado C_1 coincide coa área de rectángulo R_1 .



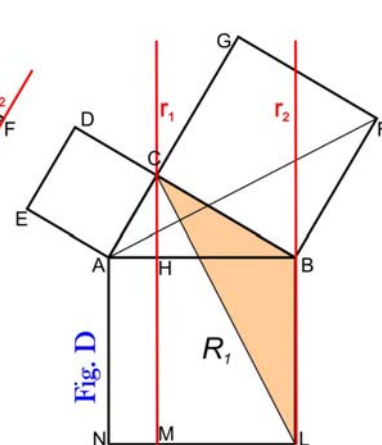
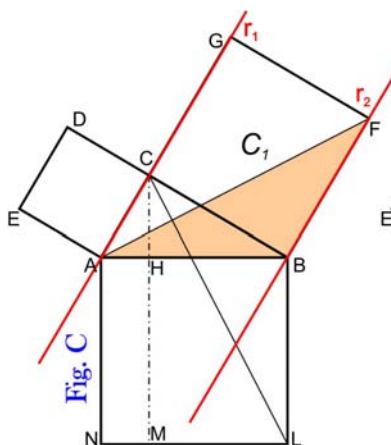
Na figura B trazamos os segmentos AF e CL e tamén observamos que os ángulos α e β teñen a mesma medida: α é a suma do ángulo do triángulo T que ten vértice en B máis un ángulo recto do cadrado C_1 e β é a suma do mesmo ángulo de T cun ángulo recto do cadrado C_3 .

Fixémonos nos triángulos ABF e LBC . Acabamos de probar no parágrafo anterior que teñen un ángulo da mesma medida, $\alpha = \beta$, ademais a medida do lado AB do primeiro coincide coa medida do lado LB do segundo e a medida do lado BF do primeiro é a mesma ca do lado BC do segundo.

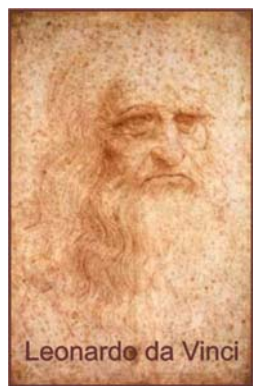
A conclusión é, pois, que os triángulos ABF e LBC son *iguais* xa que *teñen iguais dous lados e o ángulo comprendido entre ambos*.

Se observamos agora as figuras C e D constatamos que a área do cadrado C_1 é o dobre da área do triángulo ABF , pois ambos teñen a mesma base, BF , e están comprendidos entre rectas paralelas, r_1 e r_2 . E tamén o rectángulo R_1 ten de área o dobre da do triángulo LBC xa que teñen común a base LB e tamén están situados entre paralelas.

Conclusión: Como os triángulos ABF e LBC son *iguais*, o cadrado C_1 e o rectángulo R_1 *teñen a mesma área*.



A demostración do *Teorema de Pitágoras*, segundo o *método de Euclides*, quedará rematada facendo un razoamento similar ao anterior para mostrar que as áreas do cadrado C_2 e do rectángulo R_2 son iguais. Para iso temos que actuar sobre o ángulo do triángulo T que ten vértice en A e trazar os segmentos BE e CN . Deixamos esta tarefa como regalo para as persoas que lean este traballo.



E agora imos coa demostración do *Teorema de Pitágoras* realizada por **Leonardo da Vinci** (15 de abril de 1452 – 2 de maio de 1519). Por ser un típico exemplo de personaxe renacentista, unha persoa brillante en múltiples facetas do saber relacionadas coas artes, coas letras e coas ciencias, non chega a causar demasiada sorpresa a existencia dunha demostración do *Teorema de Pitágoras* da súa autoría.

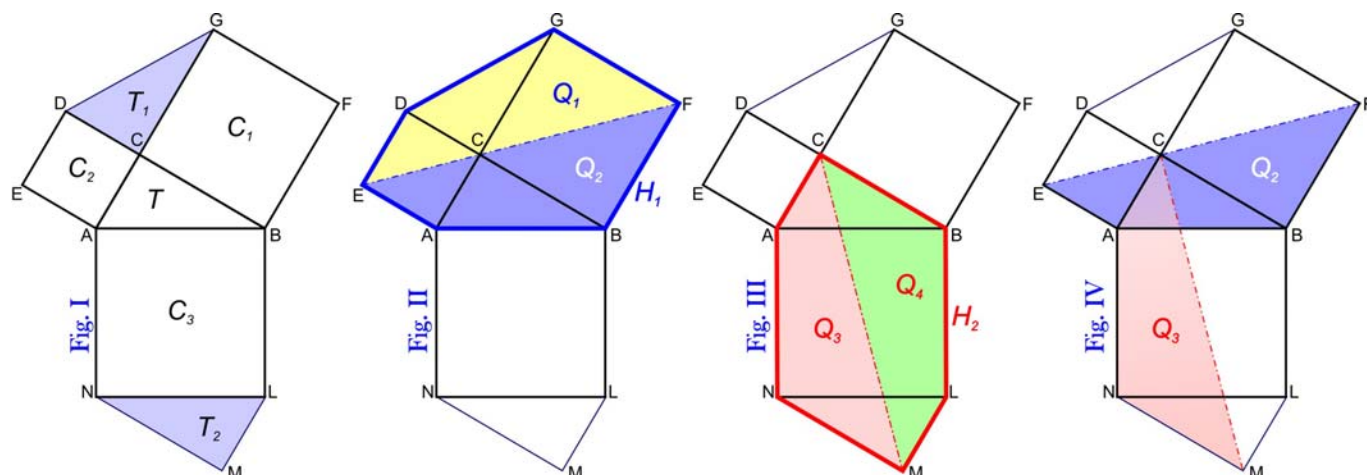
Para comprender mellor a demostración debemos ir seguindo os razoamentos tomando como apoio as figuras que aparecen ao comezo da páxina seguinte.

Partimos dun esbozo similar ao que utilizamos para ilustrar a demostración de Euclides (véxase a Fig. I), ao que se lle engadiron dous triángulos, T_1 e T_2 , idénticos ao triángulo de partida, T .

Na Fig. II e na Fig. III resaltamos dous hexágonos, H_1 e H_2 , para os que *queremos xustificar que teñen a mesma área*.

A diagonal EF do hexágono H_1 determina dous cuadriláteros Q_1 e Q_2 que *teñen a mesma área* por teren catro lados e catro ángulos de medidas idénticas (xustifica ti esta afirmación).

No hexágono H_2 , a diagonal **CM** determina outros dous cuadriláteros Q_3 e Q_4 que tamén teñen **áreas iguais** polas mesmas razón que no caso anterior (xustifícao).



Se na Fig. IV xiramos o cuadrilátero Q_3 un ángulo de 90° tomando **A** como *centro de xiro*, coincidirá co cuadrilátero Q_2 (fai as xustificacións necesarias); polo tanto, a área de Q_3 é a **mesma** que a de Q_2 . En definitiva, os cuadriláteros Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 teñen a **mesma área** o que implica que tamén teñen **igual área** os hexágonos H_1 e H_2 , como se quería demostrar.

E agora o paso final: como os hexágonos H_1 e H_2 teñen a **mesma área** se a cada un deles lle quitamos os seus dous triángulos iguais, as superficies que queden forzosamente terán a **mesma área**. E esas superficies non son outras que os **dous cadrados construídos sobre os catetos**, no caso do hexágono H_1 , e o **cadrado construído sobre a hipotenusa**, no caso de H_2 . O **Teorema de Pitágoras** queda, entón, **demostrado** ao modo de **Leonardo da Vinci**.

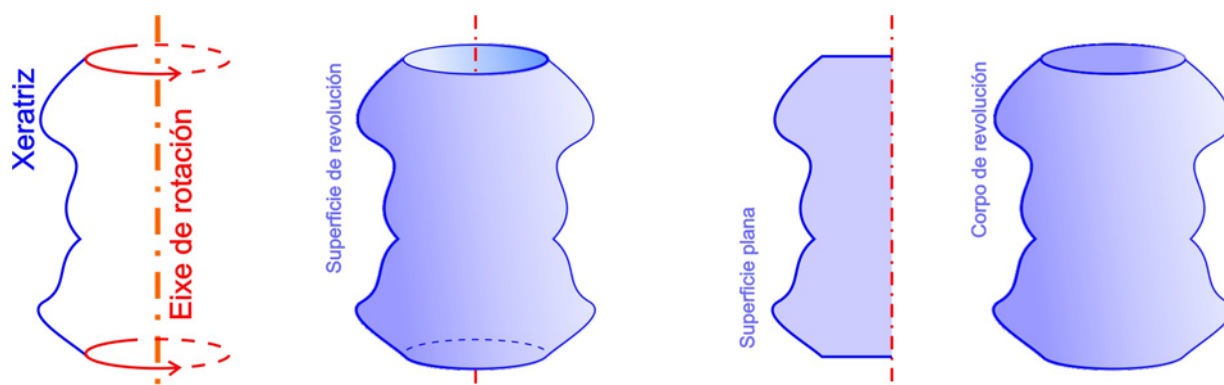


Iago Castanedo Gantes
Cuarto ESO-A

SUPERFICIES E CORPOS DE REVOLUCIÓN

Unha **superficie de revolución** obtense cando se fai xirar unha **curva plana**, que chamaremos **xeratriz**, arredor dunha recta que se atopa no mesmo plano que a curva e que se denomina **eixe de rotación**.

Un **corpo de revolución** é o que se obtén ao facer xirar unha **figura plana** arredor dun **eixe de rotación** que está no mesmo plano que a figura. Unha vez obtido o **corpo de revolución**, cada un dos infinitos planos que conteñen ao eixe son **planos de simetría** do corpo.

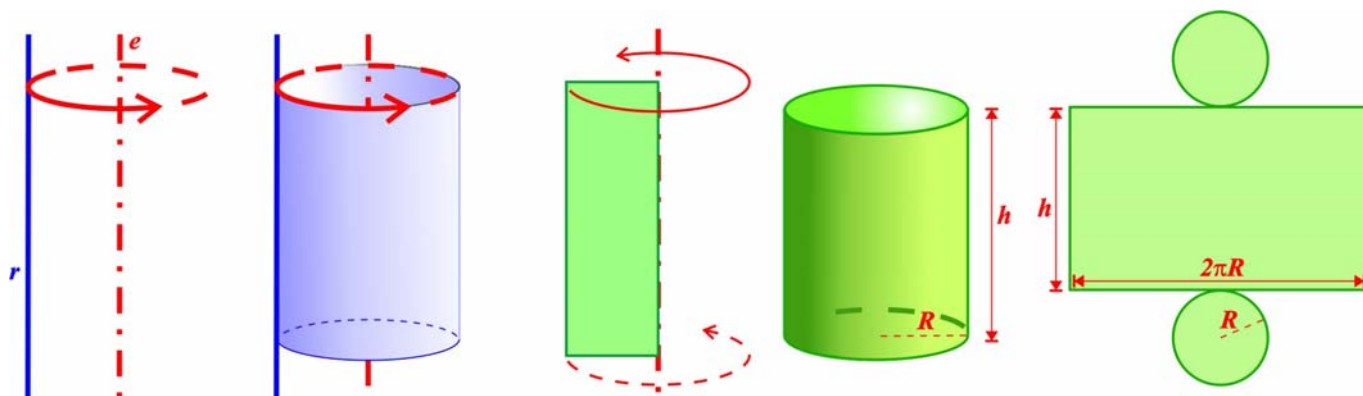


Cada día contemplamos e usamos multitude de superficies e corpos de revolución pois a súa presenza é común na natureza, nas artes, nas ciencias, na tecnoloxía e nas actividades simples da vida cotiá. ¿Cantas superficies ou corpos de revolución viches ou utilizaches hoxe?

Na páxina seguinte imos recordar algunhas características de tres coñecidas superficies de revolución (**superficie cilíndrica**, **superficie cónica** e **superficie esférica**) e dos tres corpos de revolución relacionados con elas: **cilindro**, **cono** e **esfera**.

Unha **superficie cilíndrica** obtense ao facer xirar arredor dun **eixe de rotación**, e , unha **recta**, r , que sexa paralela a el. Como unha recta é infinita, a **superficie cilíndrica** tamén é infinita.

Un **cilindro** é un **corpo de revolución** xerado ao facer xirar un **rectángulo** arredor dun **eixe de rotación** que conteña a un dos seus lados.

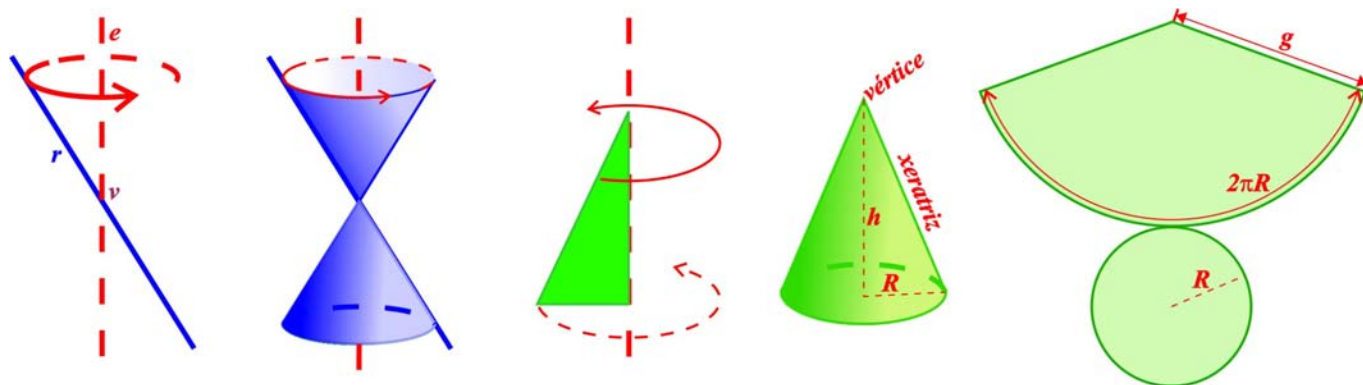


Nesta figura tratamos de mostrar as diferenzas que existen entre **superficie cilíndrica** e **cilindro**. Non debemos confundir tampouco o **concepto** de **superficie cilíndrica** co **exercicio** consistente no cálculo da **medida da superficie dun cilindro**. Á vista da notación que se indica na figura, ¿Cómo se expresan as fórmulas que nos permiten calcular a medida da superficie dun cilindro e a medida do seu volume?

Investiga: Sobre un plano debuxamos un rectángulo e unha recta r , exterior ao rectángulo, paralela a dous dos seus lados. ¿Que corpo de revolución se obtén ao facer xirar o rectángulo tomando a recta r como eixe de rotación? ¿Cal é a medida da superficie do corpo obtido? ¿Cal é a medida do volume?

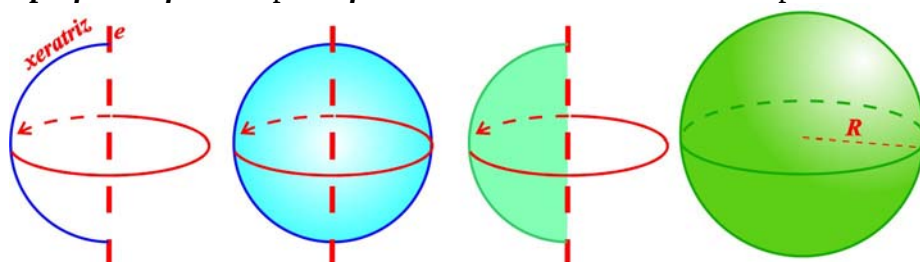
A **superficie cónica de revolución** xérase pola rotación dunha **recta** arredor dun eixe ao que corta nun punto chamado **vértice** ou **ápice**, de maneira que o ángulo que forma a xeratriz co eixe mantense constante durante a rotación..

O **cono** é o **corpo de revolución** que se obtén ao xirar un **triángulo rectángulo** arredor dun eixe que contén a un dos seus **catetos**.



¿Como se expresan as fórmulas que nos permiten calcular a medida da superficie dun cono e a medida do seu volume utilizando a notación que se indica na figura anterior?

Xa que o espazo deste boletín non dá para máis, define ti, á vista da figura seguinte, que se entende por **superficie esférica** e por **esfera**. Determina as medidas da superficie e volume dunha **esfera**.



Rodrigo Villar Bello
Cuarto ESO-A