

ACERCAMIENTO Á HISTORIA DAS ECUACIONES (I)

Os primeiros seres humanos que resolveron unha ecuación só pretendían satisfacer necesidades concretas da vida cotiá.

Mario Livio.

Unha *ecuación*, como sabemos, é unha *expresión alxébrica* con dous *membros* separados polo *signo igual* que se verifica só para algúns valores das *incógnitas*. Resolver unha ecuación consiste en determinar eses valores a priori descoñecidos.

A orixe das ecuacións non pode situarse nun lugar concreto nin nun momento histórico determinado; xurdiron cando diferentes culturas e sociedades, debido á súa evolución, sentiron a necesidade de ter que facer cálculos, anotar ingresos e gastos, levar a cabo reparticións... Polo tanto, para comprender a evolución desta rama do saber, como en tantas outras facetas da historia da humanidade, hai que buscar informacións en múltiples lugares, en épocas diversas ao longo de séculos e ter en conta as achegas dun número considerable de persoas.



As primeiras referencias que temos sobre resolución de problemas que hoxe en día se interpretarían utilizando ecuacións sitúase en *Mesopotamia*, na civilización do *Imperio Babilónico*. Nesta sociedade, na que a florecente agricultura era o motor do seu progreso, presentouse a necesidade de dispoñer de ferramentas matemáticas en datas que poderían situarse entre os anos 1800 e 1600 a.C.



Arredor de medio millón de *tablillas* cuneiformes de arxila atopadas, permítennos deducir o grao de desenvolvemento da sociedade mesopotámica. E nesa importante documentación, non faltan as referencias aos saberes matemáticos.

Os escribas tiñan que resolver a diario gran cantidade de problemas reais e tamén precisaban materiais para procurar a formación dos mozos que lles sucedesen a eles no traballo de escriba. Por estes motivos moitas *tablillas* conteñen listaxes de números, raíces e fraccións, ternas pitagóricas, e mesmo problemas teóricos destinados ao adestramento dos estudantes.

Os problemas matemáticos que tiñan por obxectivos atopar *cantidades descoñecidas* a partir doutras *cantidades coñecidas* (os que actualmente abordamos utilizando ecuacións) resolvíanse facendo a redacción con todo detalle de cómo chegar á solución, utilizando a linguaxe habitual, sen empregar ningún símbolo especial. Estamos, pois, diante dunha *álgebra retórica*.

Deste modo os babilónicos resolveron problemas que agora se tratarían utilizando unha ecuación de primeiro grao, de segundo grao ou un sistema de ecuacións. Para referirse ás cantidades descoñecidas (as incógnitas) utilizaron as palabras *us* (lonxitude), *sag* (anchura) e *asa* (área) considerándoas desprovistas do seu significado real e xeométrico.

Non é preciso dar un grande salto no espazo xeográfico nin no temporal para situármolos en terras do Nilo. Imos cambiar, sen embargo, o soporte no que quedaron rexistrados os documentos: Os escribas exipcios utilizaron o papiro no canto da arxila que empregaban os seus colegas mesopotámicos.

Existe un documento que podemos considerar a referencia por excelencia sobre as matemáticas exipcias: **O Papiro Rhind** ou **Papiro de Ahmes** (en *Mathesis* 6 podes ver unha alusión a este papiro).

Fragmento do Papiro Rhind



Este documento, duns 5,49 m de longo e 33 cm de ancho, foi copiado polo escriba Ahmes, arredor do 1650 a.C., a partir do texto orixinal que fora escrito 200 anos antes. Contén 87 problemas de diversos tipos coas súas solucións e atópase –case na súa totalidade– no Museo Británico de Londres.

A maioría dos problemas tratan cuestións relacionadas coa vida diaria, detectándose nos textos que algúns deles foron redactados co obxectivo de seren utilizados na formación de estudantes; varios son típicos exemplos para resolver utilizando ecuacións de primeiro grao. Os exipcios utilizaban a palabra **aha** (montón) para referirse á incógnita; velaquí dous exemplos tomados do **Papiro Rhind**:

O montón e a súa sétima parte fan un total de dezanove, ¿cal é o total do montón? (problema 24).

Un montón, os seus dous terzos, a súa metade, e a súa sétima parte todo xunto fan un total de trinta e sete, ¿cal é a cantidade? (problema 33).

Os exipcios atopaban a solución deste tipo de problemas asignando ao montón un valor aproximado para logo conseguir a valor correcto facendo varios pasos (este método denomínase *método da falsa posición*).

Noutro documento procedente da cultura exipcia, o coñecido como **Papiro de Berlín**, aparecen dous problemas que son casos típicos de ecuacións de segundo grao.

Podemos seguir o rastro das ecuacións indagando tamén na antiga cultura chinesa. O texto máis importante en relación coas matemáticas é o que leva por título **Jiuzhang suanshu** –Os Nove capítulos da arte matemática– (consulta *Mathesis* 53).

Os *nove capítulos da arte matemática*, que podería datarse uns 250 anos a.C., representa para as matemáticas orientais unha importancia similar á que teñen os **Elementos de Euclides** nas matemáticas occidentais, ademais é probable que estes dous importantes documentos viran a luz polo mesmo tempo (*Euclides de Alexandría*, arredor do 325 a.C. – 265 a.C.), outra coincidencia destacable é que **Liu Hui** (220-280), un dos máis grandes matemáticos chineses e un dos primeiros e principais comentaristas do **Jiuzhang suanshu**, foi contemporáneo de **Diofanto de Alexandría** (200 - 284).



O **Jiuzhang suanshu** é basicamente unha colección de 246 problemas, clasificados en nove seccións, que tratan de dar resposta a cuestións concretas da vida cotiá: medidas de campos e de cereais, reparticións, obras públicas, taxacións... os capítulos sete e oito son os máis relacionados coas ecuacións.

Eses capítulos conteñen problemas que poden ser resoltos mediante sistemas de ecuacións lineais de dúas, tres ou catro incógnitas. Para acadar as correspondentes solucións utilízanse os métodos da *falsa posición* e da *dobre falsa posición*. Citemos un par de enunciados a modo de exemplo:

Mercamos un obxecto de ouro conxuntamente. Cada un contribuíu con 8 moedas e sobraron 3; pero se cada un puxese 7, faltarían 4. Dime as persoas que participan na compra e o prezo do obxecto. (Problema 1, capítulo 7).

Supoñamos que 5 anos, 4 patos, 3 polos e 2 coellos valen 1496 moedas; 4 anos, 2 patos, 6 polos e 3 coellos valen 1175; 3 anos, 1 pato, 7 polos e 5 coellos valen 958; e 2 anos, 3 patos, 5 polos e 1 coello valen 861. Dime: ¿cal é o prezo dun ano, dun pato, dun polo e dun coello? (Problema 16, capítulo 8).

Debéramos dirixirnos agora para Grecia, pero esta aproximación á historia das ecuacións será retomada a partir deste punto nunha vindeira ocasión. Por agora, ímola deixar aquí.

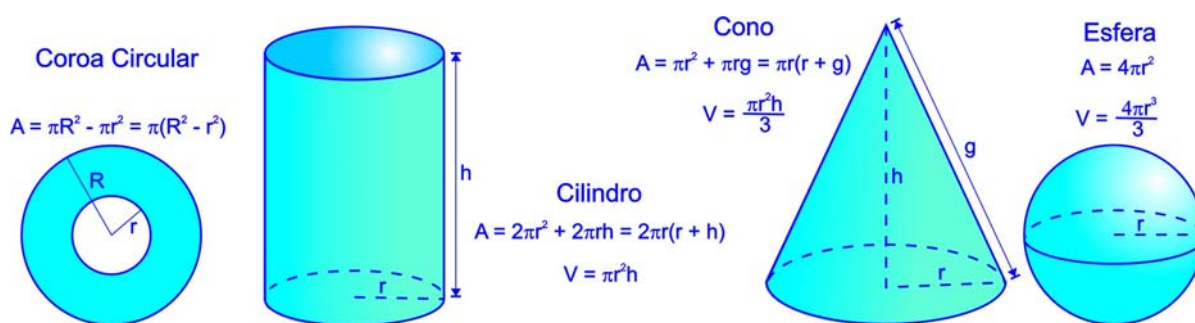


Candela Castro Garrido
Cuarta ESO-A

MIRAR FÓRMULAS BAIXO OUTRO PUNTO DE VISTA

Nun contexto escolar é habitual encontrarse coa resolución de exercicios que traten do cálculo de áreas e volumes despois de ter coñecidas fórmulas que nos permiten dar resposta as cuestións propostas e dispoñendo sempre dos datos necesarios, que habitualmente nos son facilitados.

Na figura seguinte móstranse as típicas fórmulas que aparecen en calquera libro de texto referidas á coroa circular, ao cilindro, ao cono e á esfera.



En certas ocasións da vida diaria tamén necesitamos determinar as medidas de superficies e volumes. ¿Como medir a superficie lateral dunha columna cilíndrica ou a capacidade dun depósito cilíndrico ou esférico? Pode ocorrer que os datos que solicitan as fórmulas escolares non se poidan obter de maneira rápida e directa.

Reparemos na imaxe da *Fonte da Bóla* do *Parque de Santa Margarida*, obxecto moi familiar para as persoas que vivimos na Coruña. Imos ter que pensar nalgunha estratexia se queremos obter as medidas dos raios dos cilindros, esfera e coroa circular que aparecen na foto.

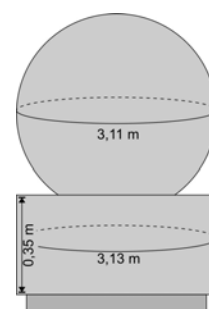
Nunha situación coma esta é fácil tomar a medida da altura, h , do **cilindro** e tampouco é complicado obter de maneira directa a lonxitude, L , dunha circunferencia sobre a súa superficie lateral (abonda con dispoñer dunha cinta métrica ou mesmo dunha corda que logo mediremos cun metro). Deste modo, para calcular a área lateral dun cilindro será máis lóxico empregar a fórmula $A = L \cdot h$ en vez de $A = 2\pi rh$.

¿E como determinar o volume do cilindro? Acabamos de medir directamente a lonxitude da circunferencia e sabemos que $L = 2\pi r$ polo

tanto $r = \frac{L}{2\pi}$. Tendo isto en conta $V = \pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \cdot h = \frac{\pi L^2 h}{4\pi^2} = \frac{L^2 h}{4\pi}$.

Utilizando as fórmulas que acabamos de obter e as medidas directas que tomamos no parque (que son as que apuntamos no esbozo da dereita) obtemos os seguintes valores para a **superficie lateral** e o **volume** do cilindro central da *Fonte da Bóla*:

$$A = 3,13 \times 0,35 = 1,0955 \text{ m}^2 \quad V = \frac{3,13^2 \cdot 0,35}{4\pi} \approx 0,2729 \text{ m}^3$$



Facendo varios intentos de medida sobre a superficie da **esfera**, podemos determinar a lonxitude dunha circunferencia máxima. Deste modo atopámonos na mesma situación que a que acabamos de describir no parágrafo anterior para obter o valor de r . E deste xeito obtemos as expresións para calcular a área e o volume dunha esfera utilizando como dato a lonxitude dunha circunferencia máxima, medida obtida directamente na realidade:

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{4\pi L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{\pi} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 = \frac{4\pi L^3}{24\pi^3} = \frac{L^3}{6\pi^2}$$

Utilizando a medida efectuada, $L=3,11$ m, obtemos para a *esfera* da *Fonte da Bóla*:

$$A = \frac{3,11^2}{\pi} \approx 3,0787 \text{ m}^2 \quad V = \frac{3,11^3}{6\pi^2} \approx 0,5080 \text{ m}^3$$

Se tratas de buscar en Internet datos sobre a *Fonte da Bóla*, podes atopar informacións coma estas:

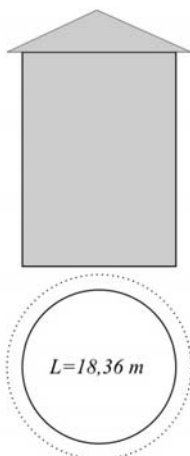
[...] la Fuente de la bola, una esfera de granito de **un metro de diámetro**, y con un **peso** aproximado de [...], que puede hacerse girar con asombrosa facilidad gracias que se mantiene en suspensión sobre una delgada película de agua [...]

[...] la Fuente de la bola, una pieza maciza de granito orbicular, del que se conoce como estructura rapakivi y de forma perfectamente esférica para que pueda funcionar. Con **97 centímetros de diámetro** y una **masa** de unos [...]

Tendo en conta as informacións dos dous parágrafos anteriores e as medidas que tomei no *Parque de Santa Margarida*, propóñoche que deas resposta ás seguintes cuestións:

- ¿En cal das dúas informacións se dá con maior precisión a medida do diámetro da esfera?
- Tendo en conta o material do que está feita a bola, calcula *razoadamente* cal é a súa masa.
- Observa a *coroa circular* que aparece na fotografía da páxina anterior. Describe un procedemento para determinar a medida da súa superficie.

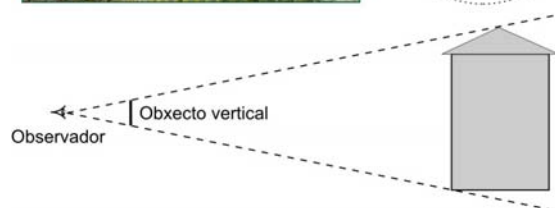
Seguindo con este curto paseo polo parque e polas fórmulas, ímonos deter agora diante do muíño que alí se atopa. Tomar medidas sobre este obxecto vai ser algo máis complicado debido ás súas dimensións.



O corpo inferior do muíño é un *cilindro*. Utilizando unha cinta métrica medimos a circunferencia da base, que ten unha lonxitude de 18,36 m.

Para facer unha *estimación* da altura pódese optar por tomar medidas sobre algúns dos bloques ou medir a altura da porta e a partir destas referencias deducir a altura do corpo cilíndrico. Estimouse unha altura $h = 6$ m. Con estes datos xa se poden determinar as medidas da superficie e do volume, como fixemos para o cilindro da *Fonte da Bóla*.

¿E como *estimamos* a superficie do tellado *cónico*? Propoñémosche que describas ti un procedemento e dámosche as seguintes axudas:



A persistente chuva das últimas semanas fixo que as pingueiras que esvaran do tellado debuxaran unha clara circunferencia que dista 70 cm da parede.



Miguel Franqueira Varela
Cuarto ESO-A

A figura da esquerda (aplicación do Teorema de Tales) e o Teorema de Pitágoras, poden ser útiles para rematar a cuestión.