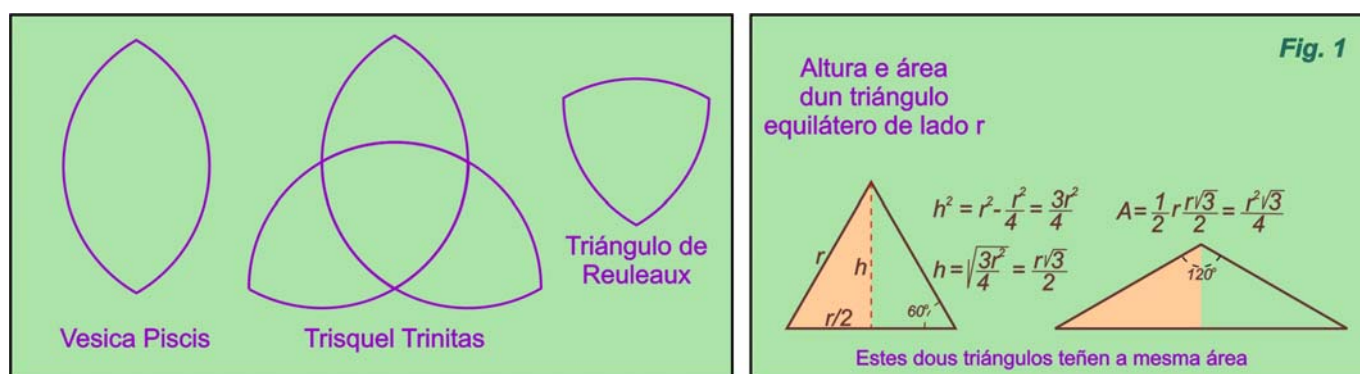


VESICA PISCIS, TRISQUEL TRINITAS E TRIÁNGULO DE REULEAUX

Moitas veces os elementos e conceptos da xeometría euclidiana –figuras ou proporcións– son utilizados ou contemplados baixo un punto de vista máxico, esotérico ou relixioso. Esta maneira de presentar certas relacións e propiedades xeométricas coñécese como *Xeometría Sagrada*.

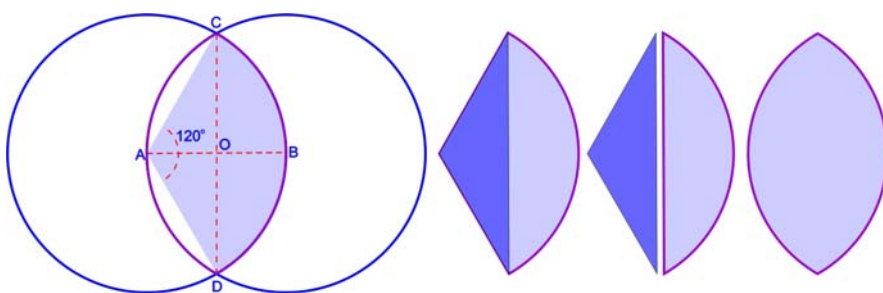
No número 22 de *Mathesis* xa tratamos da *Vesica Piscis*, desta vez imos retomar esta típica figura da *Xeometría Sagrada* para relacionala con outras dúas: o *Trisquel Trinitas* e o *Triángulo de Reuleaux*.



A *vesica piscis* é a figura que se obtén ao intersectar dous círculos dun mesmo raio, de forma que cada circunferencia pase polo centro da outra.

Desde a antigüidade distintas relixións utilizaron este símbolo como sinal que defende a existencia dunha deusa. Os antigos cristián, cando sufriron persecución, utilizábana como anagrama para identificar os lugares onde se reunían. Empregábana debido a que representaba a “Cristo, o Salvador” relacionado directamente coa forma de peixe da *vesica*. Tamén representaba a unión entre a terra e o ceo, entre a vida terreal e celestial, un equilibrio místico.

Para calcular a medida do perímetro dunha *vesica piscis*, basta con observar que cada un dos arcos que a forman se corresponde cun ángulo central de 120° . Polo tanto, a lonxitude de cada un dos arcos coincidirá coa terceira parte da lonxitude da circunferencia de raio



r , $2\pi r/3$. En consecuencia, o perímetro total da *vesica* é igual ao dobre da lonxitude dese arco: $P_v = \frac{4\pi r}{3}$.

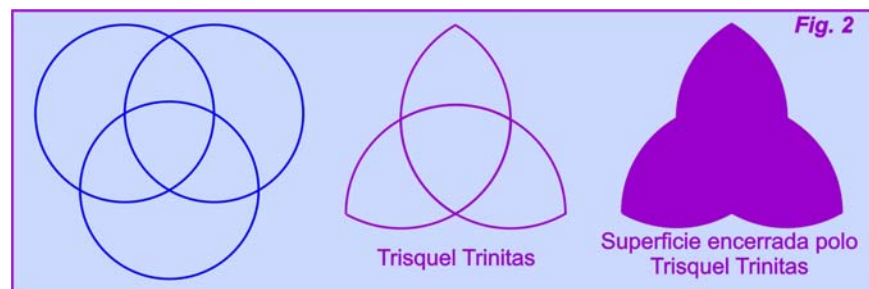
Para determinar a medida da superficie da *vesica* calculamos á área do *segmento circular* $CODB$ restando a área do *triángulo* ACD á área do *sector circular* $ACBD$. A área do *sector circular* coincide coa terceira parte da área do *círculo*, mentres que a área do *triángulo* está calculada na figura 1 de máis arriba.

Así pois, $S_{CODB} = S_{ACBD} - T_{ACD} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3}}{12} = \frac{r^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$. A área da *vesica piscis*

obtémola multiplicando á área do *segmento circular* por dous: $A_{vesica} = 2S_{CODB} = \frac{r^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

Imos ocuparnos agora doutra das figuras da *xeometría sagrada*: o *Trisquel Trinitas*. O *trisquel* tamén é un símbolo da *cultura celta* e doutras culturas anteriores. Os cristiáns utilizárono para representar a *Trindade* (Pai, Fillo e Espírito Santo).

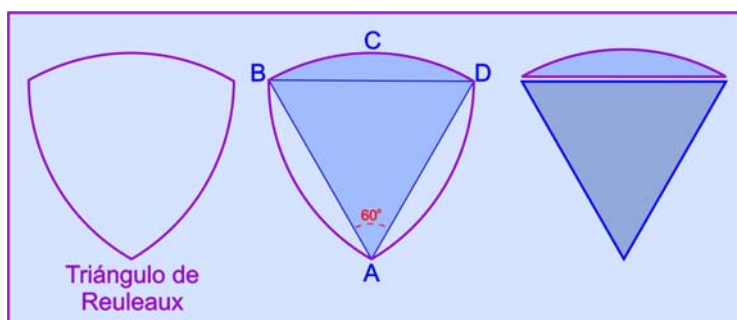
O *trisquel trinitas* constrúese a partir da intersección de tres circunferencias co mesmo raio, son tres *vesicas* entrelazadas onde cada circunferencia forma parte de dúas delas.



Se nos fixamos na construción do *trisquel* vemos que o integran tres *semicircunferencias*, polo tanto a lonxitude dos arcos que o forman será: $L_{Trisquel} = 3\pi r$.

Da área encerrada polo seu contorno, falaremos máis adiante.

A figura central que se pode observar no *trisquel trinitas* é un *triángulo curvilíneo* que leva por nome *Triángulo de Reuleaux*. Está formado por tres *arcos* que se corresponden con *ángulos centrais* de 60° , logo a lonxitude de cada un deles coincide coa sexta parte da lonxitude da circunferencia. Polo tanto, o perímetro do *Triángulo de Reuleaux* calcúlase así: $L = 3 \cdot \frac{2\pi r}{6} = \pi r$.



Para calcular a medida da superficie deste triángulo, fixémonos que se pode descompoñer no *triángulo equilátero* ABD e *tres segmentos circulares* coma o BCD, do que calculamos a área a seguir:

$$S_{BCD} = S_{ABCD} - T_{ABD} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi r^2 - 3r^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Tendo en conta este resultado xa podemos calcular a área do *Triángulo de Reuleaux*:

$$A = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{r^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{3r^2 \sqrt{3} + 6r^2 \pi - 9r^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{6r^2 \pi - 6r^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{r^2 (\pi - \sqrt{3})}{2}$$



Paull Cristian Acosta Mendoza
Cuarto ESO-A

Para que investigues: ¿Por que o *Triángulo de Reuleaux* ten ese nome? ¿Por que se di que é unha *curva de anchura constante*? ¿Que aplicacións prácticas ten? Tendo en conta a área da *Vesica Piscis* e a do *Triángulo de Reuleaux*, calcula a medida da superficie encerrada polo *Trisquel Trinitas* (ver Fig. 2), que quedou pendente anteriormente.

TEOREMA DE NAPOLEÓN



Napoleón Bonaparte (Ajaccio, Córcega, 15 de agosto de 1769 – Illa de Santa Elena, 5 de maio de 1821) tivo catro irmáns e tres irmás. A súa era unha familia acomodada que, así e todo, non deixaba de ter certos problemas económicos debido ás poucas aptitudes de administración do pai, que logrou introducir aos seus dous fillos maiores no Colexio de Autun como bolseiros. Un deles, *Napoleón*, comezou a destacar en matemáticas, ciencia que lle serviu de importante axuda na súa vida futura.

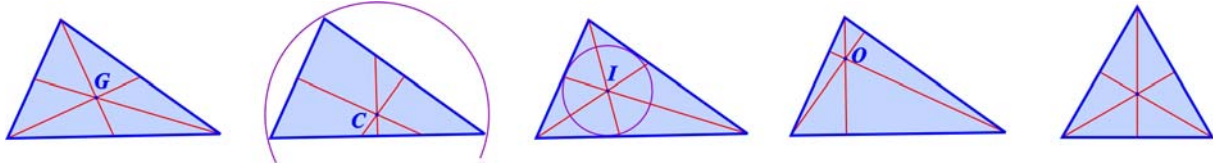
O aprecio de *Napoleón Bonaparte* polas matemáticas foi cousa que lle veu, pois, dende a súa infancia e levouno máis tarde a promover o desenvolvemento científico e tecnolóxico afirmando que perfeccionaban o espírito.

Esta afección cara ás matemáticas fixo que *Napoleón* se rodease e establecese amizade cos máis importantes matemáticos franceses da época: *Lagrange*, *Laplace*, *Fourier*... *Fourier* acompañouno na *campana de Exipto*;

Laplace foi nomeado ministro, pero o cargo non lle durou máis dun mes...

Antes de enunciar o denominado **Teorema de Napoleón**, propoñémosche que lembres certas cuestións sobre triángulos ás que nos temos referido baixo o epígrafe de **rectas e puntos notables do triángulo**.

¿Que son as **medianas**, as **mediatrices**, as **bisectrices** e as **alturas** dun triángulo? Recorda que as tres **medianas** dun triángulo se cortan nun punto, **G**, que se chama **baricentro** do triángulo; ese punto é o **centro de gravidade** do triángulo. As tres **mediatrices** determinan un punto, **C**, que coñecemos como **circuncentro** do triángulo, por ser o centro da **circunferencia circunscrita**. O **incentro**, **I**, é o punto de corte das tres **bisectrices interiores** do triángulo, ese nome é debido a que o punto **I** é o centro da **circunferencia inscrita** ao triángulo. Por último, as tres **alturas** determinan o **ortocentro**, **O**, do triángulo (¿cal é a xustificación do nome **ortocentro**?).



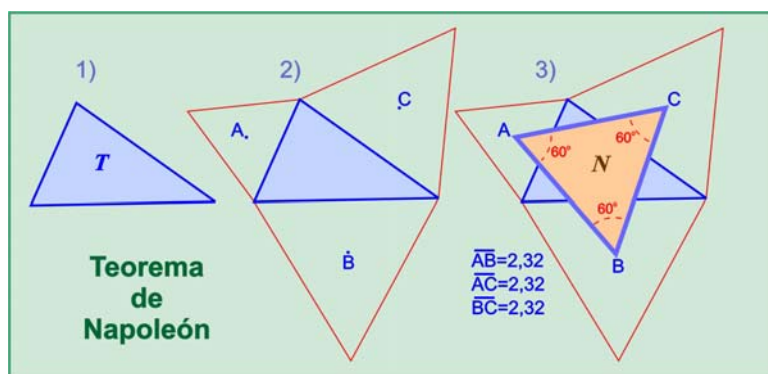
Todos estes conceptos aos que nos acabamos de referir, así como o **Teorema de Napoleón**, que imos enunciar de seguido, son típicos exemplos da parte das matemáticas que tradicionalmente se coñece como **xeometría de regra e compás**.

Xa sabes que dispoñemos dun magnífico programa informático (libre e de balde) co que, entre outras moitas cousas, se poden abordar todas as cuestións que ata hai pouco se facían con **regra e compás**, ese programa é **GeoGebra**. Con el realizáronse todos os debuxos e as comprobacións que aparecen neste traballo.

Podes comprobar que, tal como se mostra na figura anterior, nun **triángulo equilátero** o **baricentro**, **circuncentro**, **incentro** e **ortocentro** coinciden todos eles nun **mesmo punto** ao que imos denominar **centro do triángulo**.

O **Teorema de Napoleón** é un resultado que, *partindo dun triángulo calquera*, ten como protagonistas aos **triángulos equiláteros**. Aínda que se coñece baixo ese nome, é moi improbable que sexa da autoría de **Napoleón Bonaparte**, sendo máis crible que proceda dun dos seus amigos matemáticos que llo tería dedicado ao emperador.

O **Teorema de Napoleón** di o seguinte: Partimos dun triángulo, **T**, calquera e construímos triángulos equiláteros sobre os seus lados –cara o exterior do triángulo de partida–. Se unimos os centros deses triángulos construídos, obteremos sempre un novo triángulo equilátero, **N**, que se chama **triángulo de Napoleón exterior**.



Utilizando **GeoGebra**, simulamos as hipóteses do teorema e constatamos que se cumpre o resultado que se afirma. Débese ter en conta que **GeoGebra** é un programa **dinámico** que nos permite comprobar que o que se asegura se cumpre para *moitos* casos particulares; sen embargo, estas constatacións non constitúen unha

demonstración matemática rigorosa que probe que o teorema se cumpre en **todos** os casos.

Para comprobar o teorema pasamos por tres fases: 1) Debuxamos o triángulo **T**. 2) Sobre os lados do triángulo **T** construímos cadanseu triángulo equilátero orientado cara o exterior do triángulo de partida e determinamos os centros deses triángulos. 3) Construímos o triángulo **ABC** e comprobamos que é equilátero.

Para que investigues: Comproba que o **Teorema de Napoleón** tamén se cumpre se os triángulos equiláteros construídos sobre os lados de **T** se orientan cara o interior do triángulo.



O PUNTO DE FERMAT

¿Como debemos proceder se queremos conectar tres cidades por estrada, ou determinar o lugar para construír unha escola para tres pobos de forma que o transporte escolar sexa o máis eficiente posible?



Evangelista Torricelli



Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (17 de agosto de 1601 – 12 de xaneiro de 1665) exerceu a profesión de xurista pero tivo unha gran paixón: as matemáticas. Fixo moitas e importantes achegas relacionadas con esta ciencia ata o punto de recibir o sobrenome de *príncipe dos afeccionados*. O resultado máis ligado ao seu nome foi chamado *Ultimo teorema de Fermat*, un problema que ninguén foi quen de resolver ata 1995

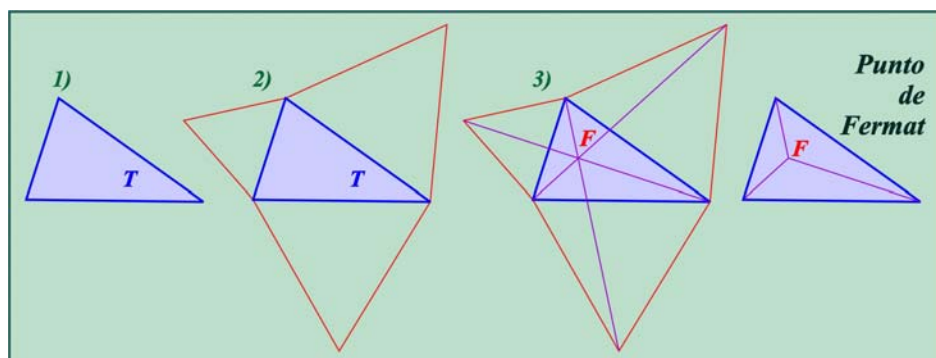
Unha das súas diversións favoritas era enviarlle cartas aos matemáticos da época presentándolle os problemas nos que traballaba e propoñéndolle que os resolveran. Bastantes desas cartas distaban moito de seren amigables, pois **Fermat** case nunca mostraba as solucións que descubría. Moitos foron os matemáticos aos que **Fermat** non lles caía simpático ou eran abertamente inimigos del, **René Descartes** dicía que era un *fachendoso* e o inglés **John Wallis** referíase a el como “ese maldito francés”.

Evangelista Torricelli (15 de outubro de 1608 – 25 de outubro de 1647) foi un físico e matemático italiano cuxo principal descubrimento foi o barómetro, co que demostrou a existencia da presión atmosférica. **Torricelli** recibiu de **Fermat** o seguinte problema: *Dado un triángulo, determina un punto tal que a suma das medidas dos segmentos trazados desde el a cada un dos vértices do triángulo sexa a menor posible.*

Torricelli non foi quen de atopar o punto pedido, pero realizou importantes avances na resolución do problema.

O punto en cuestión coñécese co nome de **Punto de Fermat** e é o que nos da as respostas ás preguntas que fixemos ao principio.

Nas seguintes imaxes móstrase como atopar o **punto de Fermat** dun triángulo **T** utilizando **GeoGebra**.



Procederemos do seguinte modo:

- 1) Construimos o triángulo, **T**.
- 2) Sobre cada lado do triángulo, cara o seu exterior, trazamos cadanseu triángulo equilátero.
- 3) Unimos o vértice mais afastado de

cada un dos triángulos equiláteros co correspondente vértice do triángulo inicial oposto a ese triángulo equilátero.

O **punto de Fermat**, **F**, coincide coa intersección dos tres segmentos debuxados.

Ademais deste punto que acabamos de obter, existe **outro punto de Fermat** que se consegue debuxando os triángulos equiláteros sobre cada lado do triángulo inicial orientados cara o seu interior. Proba ti a debuxalo.

Pedro Paz Mongil
Cuarto ESO-A

Día 11 de maio de 2013

VII FEIRA MATEMÁTICA

Palexco, A Coruña