



Para conmemorar o centenario da morte de **Abraham Stoker** (8 de novembro de 1847 - 20 de abril de 1912) na sede coruñesa da **Fundación Luis Seoane** está aberta unha exposición que xira arredor da obra máis coñecida do escritor irlandés: **Drácula**. Baixo o epígrafe **Cen anos sen Bram Stoker**, a mostra leva por título **Drácula, un monstro sen reflexo** e estará aberta ata o 7 de outubro de 2012.

Traemos aquí esta referencia porque queremos resaltar un dato biográfico sobre **Bram Stoker**: Estudou no **Trinity College** e en 1870 **graduouse con honores en matemáticas puras**. Investiga ti sobre el.



POLÍGONOS ESTRELADOS, ESTRELAS E NOTACIÓN DE SCHÄFLI

Un **polígono** é una figura pechada e plana que ten o contorno formado por *segmentos de recta*. Estes segmentos chámanse **lados** e os puntos nos que se xuntan dous lados denomínanse **vértices**. Un **polígono** que teña todos os seus *ángulos interiores* menores a 180° recibe o nome de **polígono convexo**; se algún dos ángulos é maior a 180° , chámase **polígono cóncavo**.

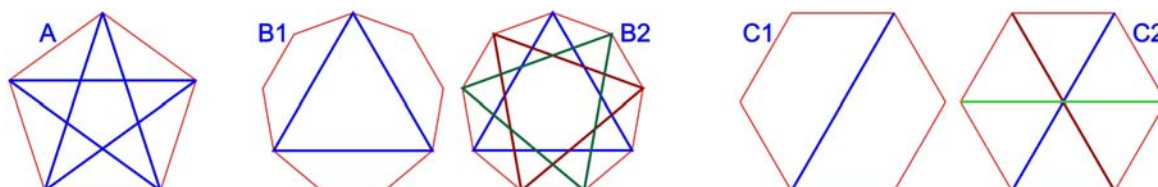


Chámaselle **polígono equiángulo** (ou *equiangular*) a aquel que ten todos os seus ángulos de igual medida e **polígono equilátero** (ou *equilateral*) a aquel no que todos os seus lados miden o mesmo. Un **polígono regular** cando todos os seus *lados* teñen a mesma *lonxitude* e os seus *ángulos* a mesma *amplitude*, é dicir, cando é *equilátero* e *equiángulo* ao mesmo tempo.

Os **polígonos regulares** van ser os obxectos matemáticos que darán soporte ás cuestións que queremos abordar neste comentario.

Tomemos un **polígono regular** de p *lados*, situémonos nun **vértice** para debuxar desde el un *segmento* ata outro **vértice** non consecutivo, avanzando un número q de *vértices*. Repitamos o proceso anterior, avanzando sempre q *vértices*, ata regresar ao punto de partida.

Cando rematemos de debuxar os segmentos, seguindo a secuencia que acabamos de describir, pódese dar algún dos seguintes tres resultados:



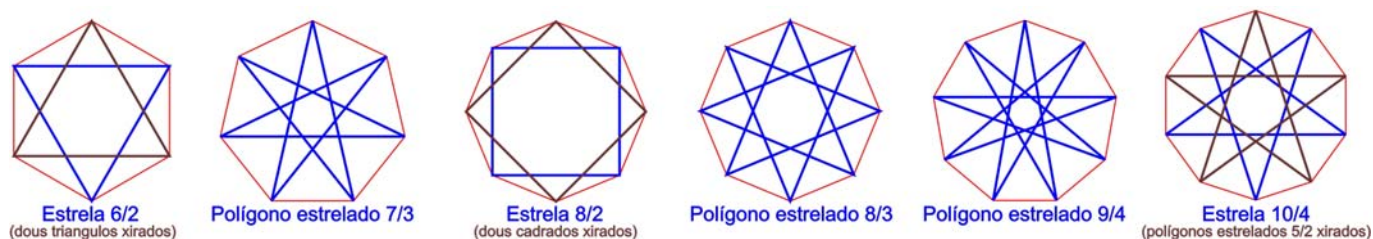
Pode ocorrer que regresemos ao vértice inicial pasando por todos os vértices, é dicir, que non quede ningún vértice do polígono regular sen conectar (un exemplo deste caso é o que se mostra no *apartado A* da anterior figura para $p=5$ e $q=2$).

Outra situación dáse cando se retorna ao vértice de partida quedando vértices sen conectar (exemplo no *apartado B1* da figura, sendo $p=9$ e $q=3$). Nesta situación, podemos repetir o proceso a partir dun dos vértices non utilizados (*apartado B2* da figura).

Por último, cabe a posibilidade de retornar ao vértice do que partimos utilizando o primeiro segmento debuxado (que é o que ocorre no exemplo do apartado C1 da figura para $p=6$ e $q=3$), opción que se repite para os demais vértices que quedaron sen conectar, como se ilustra no apartado C2 da figura.

O resultado obtido ao rematar de conectar a totalidade dos vértices do *polígono regular* denomínase en matemáticas **forma estrelada**. Para facer referencia a unha **forma estrelada** construída a partir dun *polígono regular* de p lados avanzando q vértices utilízase a notación p/q que se coñece como **notación de Schäfli**. Así as **formas estreladas** que aparecen nos apartados A, B2 e C2 da figura anterior son, respectivamente, $5/2$, $9/3$ e $6/3$.

A figura obtida no apartado A chámase **polígono estrelado** $5/2$, utilízase este termo para denominar as **formas estreladas** que conectan **todos** os vértices do polígono de partida. A **forma estrelada** do apartado B2 é unha **estrela** $9/3$ constituída pola superposición de varios polígonos.

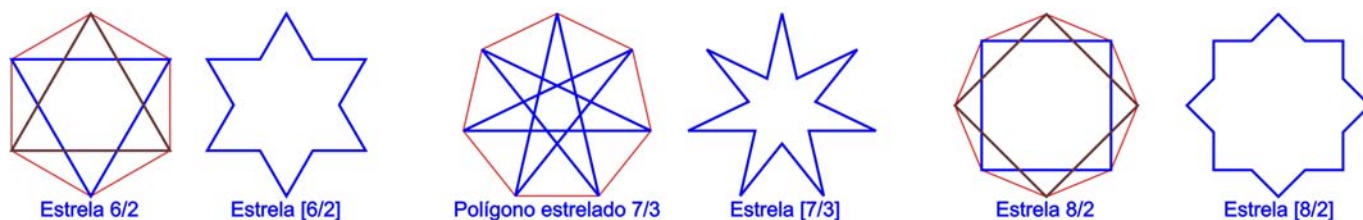


O **polígono estrelado** $5/2$ é coñecido polos nomes de *Pentagrama* ou *Pentalfa*, os *pitagóricos* utilizárono como contrasinal. A **estrela** $6/2$ denomínase *Hexagrama*, *Estrela de David* ou *Selo de Salomón*.

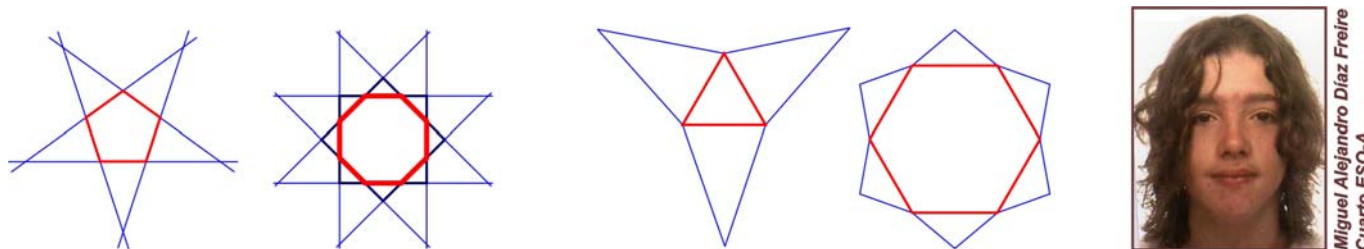
Se constrúes **formas estreladas** poderás observar que se obteñen **polígonos estrelados** nos casos en que a fracción $\frac{p}{q}$ sexa *irredutíbel* e conséguense **estrelas** cando a fracción se pode simplificar.

Investiga: ¿Cantas **formas estreladas** se poden conseguir a partir dun *polígono regular* de p lados? ¿Existe algunha relación entre as **formas estreladas** p/q e $p/p-q$? Se p é par, ¿que ocorre coa **forma estrelada** p/q no caso $q=p:2$?

Dado un polígono regular de p lados, tamén se denomina **estrela** ao **polígono cóncavo** de $2p$ lados que se obtén ao marcar o **contorno** das **formas estreladas**. Para referirnos ás **estrelas** construídas por este procedemento utilizamos a notación **estrela** $[p/q]$.



Existen outras maneiras de construción de **formas estreladas** a partir dun **polígono regular**. Nas figuras seguintes suxerimos dous métodos máis: *prolongando os lados do polígono* ou *axustando sobre os seus lados diferentes tipos de triángulos*.

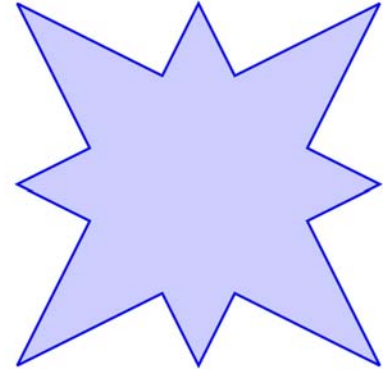
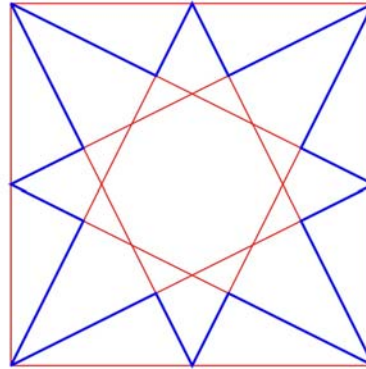


Investiga: Completa as investigacións suxeridas nas figuras anteriores. Busca novos métodos de construción de **formas estreladas**.

ESTRELA DE BRUNES



Rúa da Estrela. (A Coruña)

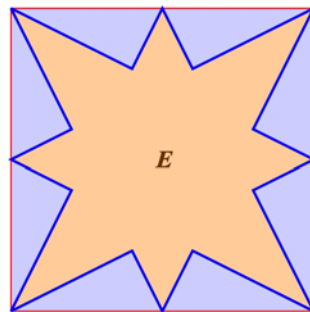
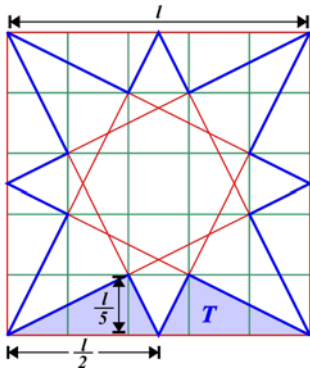


¿É a estrela da *Rúa da Estrela* unha **estrela de Brunes**? Para construír unha **estrela de Brunes** únese o *punto medio* de cada un dos *lados* dun *caadrado* cos *vértices* do correspondente lado oposto.

A **estrela de Brunes** débelle o seu nome ao enxeñeiro danés **Tons Brunes** (ou *Tons Brunés*) que a describe na súa obra *The Secrets of Ancient Geometry and Its Use* (*Os Secretos da Xeometría Antiga e a súa utilización*).

O noso obxectivo vai ser estudar algunhas características matemáticas da **estrela de Brunes**. Imos calcular as *medidas* do seu *perímetro* e da súa *superficie* en *función de l*, medida do lado do caadrado inicial que nos serviu para construíla. Tamén procuraremos a *suma das medidas dos seus ángulos interiores*.

Para facer máis doado o noso estudo colocamos sobre a construción unha trama caadrada de orde 5×5, tal como mostramos na seguinte figura.



O triángulo **T** é a peza clave que nos permite calcular á **área** da estrela **E**.

Non hai máis que observar que a **área da estrela de Brunes** pódese obter sen máis que restarlle á **área** do caadrado inicial oito veces a **área** do triángulo **T**:

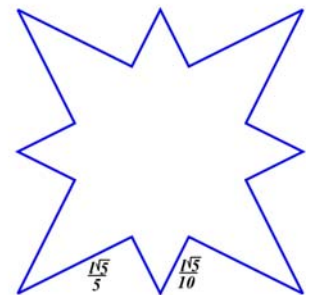
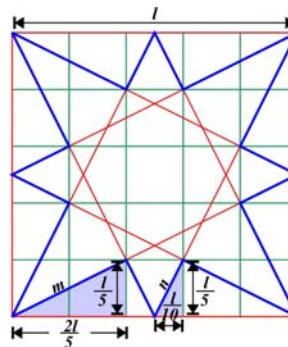
$$\text{Área}_E = \text{Área}_{\text{Caadrado}} - 8 \cdot \text{Área}_T$$

Como $\text{Área}_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{5} = \frac{l^2}{20}$ podemos concluír:

$$\text{Área da Estrela de Brunes} = \text{Área}_{\text{Caadrado}} - 8 \cdot \text{Área}_T = l^2 - 8 \cdot \frac{l^2}{20} = l^2 - \frac{2l^2}{5} = \frac{3l^2}{5}$$

Calculemos agora a **medida do perímetro**. Na figura da dereita resaltamos os datos e os resultados que obtemos a partir deles.

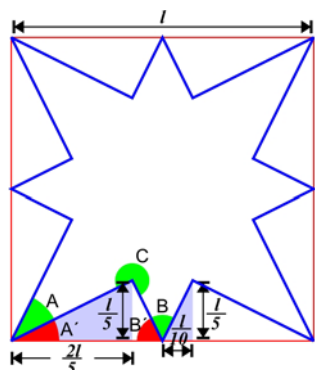
Se somos quen de determinar as respectivas medidas das lonxitudes dos segmentos **m** e **n** o problema quedará resolto. Para conseguilo utilizaremos o **Teorema de Pitágoras**.



$$m = \sqrt{\left(\frac{2l}{5}\right)^2 + \left(\frac{l}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4l^2}{25} + \frac{l^2}{25}} = \sqrt{\frac{5l^2}{25}} = \sqrt{\frac{l^2}{5}} = \frac{l}{\sqrt{5}} = \frac{l\sqrt{5}}{5}$$

Para n temos: $n = \sqrt{\left(\frac{l}{10}\right)^2 + \left(\frac{l}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{100} + \frac{l^2}{25}} = \sqrt{\frac{5l^2}{100}} = \sqrt{\frac{l^2}{20}} = \frac{l}{2\sqrt{5}} = \frac{l\sqrt{5}}{10}$. E, en consecuencia, a medida do perímetro da **Estrela de Brunes** será:

$$\text{Perímetro da Estrela de Brunes} = 8 \cdot \frac{l\sqrt{5}}{5} + 8 \cdot \frac{l\sqrt{5}}{10} = \frac{8l\sqrt{5}}{5} + \frac{4l\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \cdot l$$



Para calcular as **medidas dos ángulos interiores** da **Estrela de Brunes**, imos botar man dun sinxelo concepto da *trigonometría*: a *definición da tanxente dun ángulo*.

Axudándonos dos datos expresados na figura da esquerda, calculemos as medidas dos ángulos interiores do triángulo T (destacado nunha das figuras anteriores).

$$\operatorname{tg} A' = \frac{l/5}{2l/5} = \frac{1}{2} \quad \text{polo tanto} \quad A' = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26^\circ 33' 54,18''.$$

$$\operatorname{tg} B' = \frac{l/5}{l/10} = 2 \quad \text{e así} \quad B' = \operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 26' 5,82''.$$

Observa que $A' + B' = 90^\circ$ polo tanto o terceiro ángulo do triángulo T mide tamén 90° e, en consecuencia, o ángulo C da **Estrela de Brunes** é $C = 270^\circ$. Para os outros dous ángulos da **Estrela de Brunes**, A e B , temos:

$$A = 90 - 2A' = 36^\circ 52' 11,63'' \quad \text{e} \quad B = 180 - 2B' = 53^\circ 7' 48,37''$$

Se facemos a suma de A e B obtemos $A + B = 90^\circ$; polo tanto $A + B + C = 360^\circ$. En definitiva:

$$\text{Suma dos ángulos interiores dunha Estrela de Brunes} = 4A + 4B + 8C = 4 \cdot 90^\circ + 8 \cdot 270^\circ = 2520^\circ$$



Alejandro Montañas García
Cuarto ESO-A.



Foto: Daniel Ríos Meizoso



Sistema de Inecuacións Lunares

