

Napier's bones

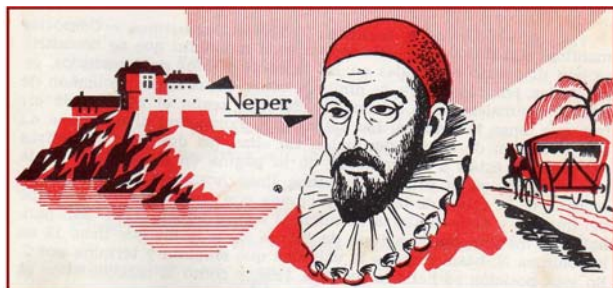


Ilustración tomada dun libro de texto da Editorial S.M. Ano 1973.

John Neper (ou **Napier**), barón de Merchiston, naceu en Merchiston Castle, Edimburgo (Escocia), no ano 1550, e morreu no mesmo lugar o 4 de abril de 1617. Sendo el de relixión protestante, criticou abertamente á Igrexa Católica e tivo que aceptar a inimizade dos papistas e doutros sectores relacionados coa relixión.

O pai de **John Neper**, **Archibald Neper**, que era alguacil, acadou o rango de cabaleiro en 1565 e, no 1582, foi nomeado *Encargado da Casa da Moeda*. Casou aos 15 anos con **Janet Bothwell**, irmá do bispo de Orkney.

Polas informacións tiradas dunha carta que o bispo de Orkney dirixiu a **Archibald Neper** cando **John Neper** tiña once anos, sábese que o bispo suxería que o seu sobriño fose estudar para algunha escola de Francia ou de Flandes.

En 1563, cando **John Neper** contaba 13 anos, súa nai matricúlao na *Universidade de St Andrews* e así dá comezo aos seus estudos –que tiveron como primeiro centro de interese a Teoloxía e as cuestións relixiosas– pero moi pouco tempo despois ocorre a morte da nai. Debido a este feito, aínda que non está totalmente confirmado, é posible que **John Neper** nin sequera chegase a rematar ese primeiro ano académico en St Andrews; parece ser que marchou para o continente, onde realizaría estudos en universidades de varios países: Francia (París), Italia, Holanda...

O que parece estar claro é que non foi en *St Andrews* onde **John Neper** adquiriu os seus importantes coñecementos en matemáticas e literatura clásica. En realidade, os estudos relacionados coas matemáticas nunca tiveron para el máis consideración que a de seren un simple entretemento.

Regresou a Escocia en 1571 para asistir ao segundo casamento de seu pai e fíxose cargo da administración das importantes posesións da familia que comezou a administrar con total dedicación a partir de 1572.

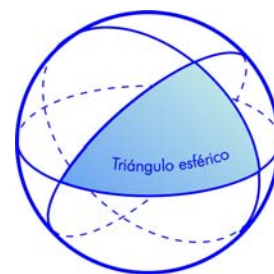
En relación coa faceta que ten que ver coa relixión, **Neper** publicou en 1593 a obra *Os Sinxelos Descubrimentos da Completa Revelación de San Xoán* que el considera unha das súas obras máis importantes.

Ás veces **Neper** facía un oco no tempo que dedicaba aos seus traballos de carácter teolóxico para abordar cuestións directamente relacionadas co seu divertimento favorito: as matemáticas. Neste aspecto –o que a nós realmente nos interesa– fixo importantes achegas en diferentes campos. Imos referirnos a seguir a algunhas delas.

Estableceu *fórmulas* para a resolución de *triángulos esféricos*, que son figuras pechadas de tres lados, debuxadas sobre a superficie dunha esfera, que están delimitadas por tres arcos menores pertencentes a tres *circunferencias máximas*.

Investiga:

- 1.- ¿Que significa **resolver** un triángulo?
- 2.- ¿Como se asigna o valor da medida dun ángulo sobre a superficie esférica?
- 3.- ¿Existen *triángulos esféricos* con dous ángulos rectos? ¿E con tres?
- 4.- ¿Cal pode ser o valor da suma das medidas dos tres ángulos dun *triángulo esférico*?



A *invención dos logaritmos* é, sen dúbida, a cuestión matemática que máis ligada está ao nome de **Neper**.

O *logaritmo* en base **a** dun número **N**, $\log_a N$, é o *expoñente*, **x**, ao que hai que elevar a base, **a**, para obter o número, **N**. Isto é:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$



$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
 $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
 $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$
 $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{\log_a M}{n}$
 $\log_a M = \frac{\log M}{\log a}$

Demuestra estas propiedades

Segundo esta definición, o *logaritmo en base 3 de 9* é 2, xa que $3^2 = 9$; o *logaritmo en base 2 de 8* é 3, xa que $2^3 = 8$; o *logaritmo en base 10 de 0,1* é -1, xa que $10^{-1} = 0,1$; etc. A base dun sistema de logaritmos pode ser calquera número positivo $a \neq 1$.

Polo 1594 andaba **John Neper** ocupado coa invención dos logaritmos; é dicir, trataba de expresar os números de maneira exponencial. A base que utilizaba **Neper** tiña que ver co **número e**, máis concretamente con $1/e$. Estivo arredor de vinte anos estudando as propiedades dos logaritmos e confeccionando táboas cos logaritmos dos números.

Os logaritmos desencadearon unha verdadeira revolución á hora de facer cálculos, pois utilizándoos o resultado dunha multiplicación pode obterse facendo unha suma, o dunha división facendo unha resta, unha potencia reducíase á realización dunha multiplicación e calquera raíz podía obterse sen máis que facer unha división. As táboas de logaritmos foron, deste xeito, a ferramenta máis utilizada polos

matemáticos, científicos e estudantes ata o momento da aparición das calculadoras. En 1614, coa edición da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, difúndense os descubrimentos obtidos por **Neper**.

O matemático inglés **Henry Briggs** tratou con **Neper** a conveniencia de elaborar unhas táboas de logaritmos *en base dez*, tarefa na que **Briggs** se empeñou.

Fíxate que en todas as calculadoras científicas aparecen dúas teclas que nos permiten traballar con logaritmos: unha, etiquetada **ln**, corresponde aos **logaritmos naturais** ou **neperianos** –os que teñen por base o **número e**–; a outra, a que está etiquetada **log**, é a que corresponde aos **logaritmos vulgares** ou de **Briggs**, os que teñen base **dez**.

Investiga:

- Utiliza a túa calculadora para ver o valor dos seguintes logaritmos e **explica** o que observas; $\log 2$, $\log 20$, $\log 200$, $\log 2000 \dots \log 200\,000$.
- ¿Que é a **característica** e a **mantisa** dun logaritmo en base dez? ¿Que se entende por **antilogaritmo**? Exemplos.
- Henry Briggs**.
- Número e**.
- Calcula $\log_2 123,34$.

Tamén se debe a Neper a invención dun instrumento co que se poden realizar cálculos numéricos (multiplicacións, divisións, extracción de raíces...), pode ser considerado como un verdadeiro antecedente das calculadoras e adoita chamarse **ábaco neperiano**.

O instrumento en cuestión pódese construír facilmente utilizando unhas tiras de cartolina ou de madeira xunto cun taboleiro ou unha caixa. Nun principio, construíronse **ábacos neperianos** utilizando unhas barriñas de marfil que semellaban ósos, por iso se deu en chamarlle **os ósos de Neper**.

Na **figura 1** facemos unha representación dos **ósos de Neper**. Consta dun taboleiro, caixa ou bastidor que leva sinalados os números do 1 ao 9 nunha columna lateral. E ademais, 9 barriñas –os **ósos**– que están formadas por nove cadrados aos que se lles trazou unha das súas diagonais –agás no primeiro–. Como podes ver, os números que aparecen en cada barra son os resultados de multiplicar o número que a encabeza por cada un dos que aparecen escritos na columna do bastidor.

Na **figura 2** poñemos un exemplo de multiplicación: ¿Como calculamos 234×7 ? Collemos os ósos que corresponden a 2, 3 e 4 e copiamos os valores tal como aparecen na fila 7. Facemos a suma dos díxitos que aparecen en cada unha das diagonais e... ¡velaí o resultado!: 1 638.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	1	2	4	6
3	0	3	6	9	1	2	5	8	1
4	0	4	8	2	6	0	2	4	8
5	0	5	1	5	0	5	0	5	0
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2

Figura 1 (Os ósos de Neper)

Figura 2 (Exemplo de multiplicación)

1	2	3	4
2	0	4	8
3	0	6	1
4	0	8	2
5	1	1	5
6	1	2	1
7	1	4	2
8	1	6	4
9	1	8	7

Investiga:

a) $23\,456 \times 246$

b) $75\,325 : 89$

c) $\sqrt{671385}$



Fontes:

http://www.edu365.cat/aulanet/comsoc/persones_tecnicas/John_neper.htm

<http://www.astroseti.org/articulo/4493/biografia-de-john-napier>

Nueva Enciclopedia Universal

Diccionario Enciclopédico ESPASA

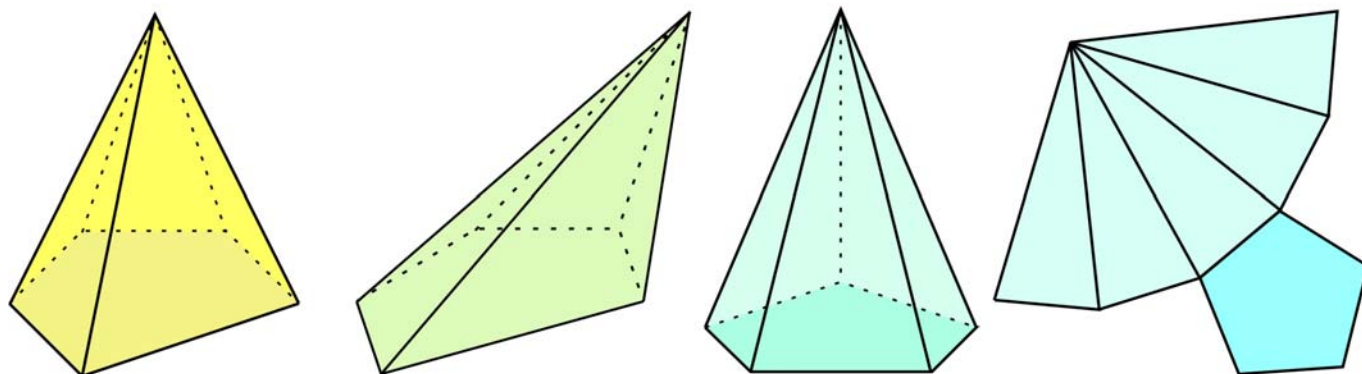
http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81baco_neperiano

REFLEXIÓNS ÁUREAS

Unha pirámide é un **poliedro** formado por unha cara singular, á que se acostuma chamar **base** e pode ser un **polígono** calquera, e outras caras –tantas como lados teña a base, e ás que se adoita chamar **caras laterais**– que son triángulos que concorren nun **vértice** común.

A **forma da base** determina frecuentemente criterios para a clasificación das pirámides: Se temos en conta o seu número de lados, as pirámides poden ser **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonais**, **hexagonais**... Considerando se a base é un **polígono cóncavo** ou **convexo**, podemos clasificar as pirámides como **cóncavas** ou **convexas**. Dicimos tamén que unha pirámide é **regular** cando, sendo **recta**, ten por base un **polígono regular**.

As pirámides son **rectas** cando as súas caras laterais son **triángulos isósceles** e **oblicuas** cando non o son.

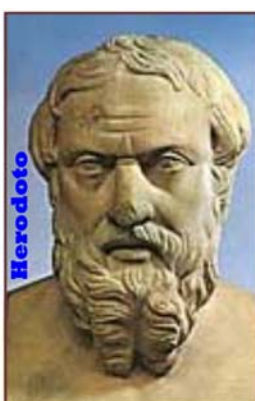
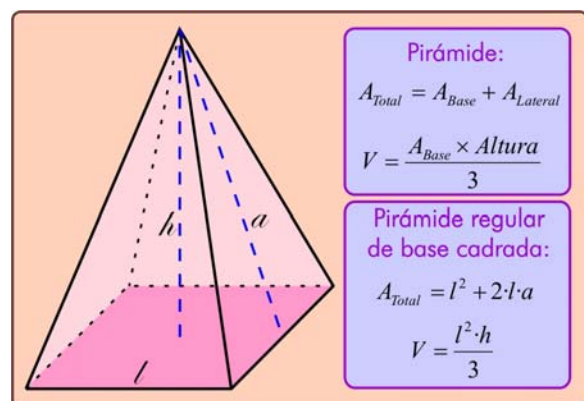


Recordemos cómo se calcula a medida da superficie e do volume dunha pirámide.

A **área** dunha pirámide será, loxicamente, a suma das áreas de todas as caras poligonais que a forman e que constitúen o seu **desenvolvemento plano**. Necesitamos, pois, dispoñer dos datos suficientes que nos permitan obter as áreas das caras laterais triangulares e tamén a área do polígono básico.

Para calcular a medida do **volume**, ademais de coñecer a área da base, debemos saber cal é a medida da altura da pirámide, que non debemos confundir coas respectivas alturas das caras laterais. A medida da **altura da pirámide** coincide coa **distancia do vértice onde concorren todas as caras laterais ao plano que contén a base**.

Poñemos en fórmulas o que acabamos de redactar para unha pirámide calquera e tamén para o caso particular **dunha pirámide regular de base cadrada**, tipo de pirámide do que falaremos máis adiante.



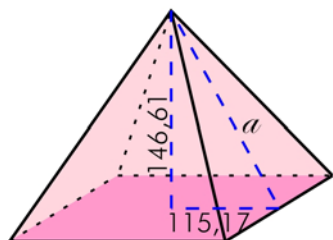
Herodoto de Halicarnaso (484(?) a.C. – 425(?) a.C.), considerado o pai da historiografía, foi un célebre historiador que visitou a **gran pirámide de Giza** a mediados da súa vida.

Achegou gran cantidade de información acerca dos métodos empregados para construíla e, ademais, revelou moitos segredos sobre as marabillas do mundo antigo.

Herodoto fai referencia á seguinte cuestión: afirma que un sacerdote exipcio lle revelara que a gran pirámide se deseñara para ser construída de xeito que **a área de cada unha das súas caras laterais coincidise coa dun cadrado que tivese como medida do lado a altura da pirámide**.

O historiador británico **William Matthew Flinders Petrie** (Charlton, 3 de xuño de 1853 – Xerusalén, 28 de xullo de 1942) fixo un estudo polo miúdo sobre o monumento, e estimou que a súa altura orixinal

debía ser de $h = 146,61$ m –aínda que na actualidade mide 136,86 m, arredor de 10 metros menos que cando foi construída–, tamén fixou o ángulo de inclinación de cada cara lateral respecto da base nun valor de $51^\circ 50' 35''$.



Convén sinalar que a base da gran pirámide non é un cadrado perfecto xa que as medidas son: 230,364 m, 230,319 m, 230,365 m e 230,342 m, sendo a media das medidas dos lados da base $l = 230,3475$ m.

Se utilizamos os datos anteriores ($h = 146,61$ m e $l = 230,3475$ m) podemos calcular a medida de a , sen máis que botar man do *Teorema de Pitágoras*:

$$a = \sqrt{146,61^2 + 115,17375^2} = \sqrt{34759,48479} = 186,439 \text{ m, será o valor da}$$

medida da altura de cada unha das caras laterais.

Agora xa podemos calcular a medida da superficie dunha das caras laterais:

$$A_{\text{Cara}} = \frac{230,3475 \times 186,439}{2} = 21\,472,879 \text{ m}^2. \text{ Se calculamos a área do cadrado que teña por lado a altura,}$$

$$h, \text{ da pirámide obtemos: } A_{\text{Cadrado}} = 146,61^2 = 21\,494,492 \text{ m}^2.$$

Os resultados anteriores poñen de manifesto que, *tratando de constatar a afirmación de Herodoto*, se produce un erro absoluto de $E_a = |21\,472,879 - 21\,494,492| = 21,6131 \text{ m}^2$, o que vén representar un erro

relativo de $E_r = \frac{21,6131}{21\,494,492} = 1,005518 \times 10^{-3} \approx 0,1\%$, é dicir, que *a afirmación de Herodoto parece que*

se cumpre con bastante exactitude.

¿E por que ten importancia para as matemáticas que se cumpra ou non a afirmación de Herodoto? Fixémonos na notación utilizada na figura da dereita. Área do cadrado que teña por lado a medida da altura da pirámide:

$$A_{\text{Cadrado}} = h^2. \text{ Área dunha cara da pirámide: } A_{\text{Cara}} = \frac{l \cdot a}{2} = b \cdot a. \text{ Se a afirmación}$$

de Herodoto fose certa teríamos: $A_{\text{Cadrado}} = A_{\text{Cara}} \Rightarrow h^2 = b \cdot a$ (*). Tendo en

conta o Teorema de Pitágoras ($h^2 + b^2 = a^2$) a ecuación (*) pode escribirse $a^2 - b^2 = b \cdot a$ e entón $a^2 = b^2 + b \cdot a$. Se dividimos os dous membros desta última ecuación entre b^2 , quedáanos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{b \cdot a}{b^2}, \text{ ou sexa: } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \frac{a}{b}. \text{ Se facemos o cambio de variable } \frac{a}{b} = x, \text{ temos a ecuación:}$$

$$x^2 = 1 + x; \text{ é dicir: } x^2 - x - 1 = 0 \text{ da que unha das solucións é } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \text{ (número de ouro).}$$

Conclusión: *A afirmación de Herodoto implica que o número de ouro está presente nas proporcións da Gran Pirámide* xa que se obtén ao facer a relación da medida da altura de cada cara triangular coa metade

$$\text{da medida do lado da base: } \frac{a}{b} = \phi.$$

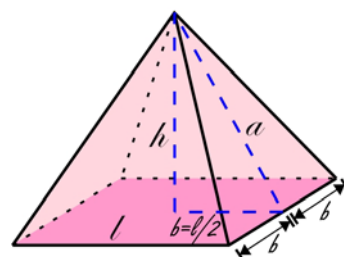
¿Coñecían os exipcios o número de ouro? É altamente probable que non; e, polo tanto, o resultado que acabamos de obter a partir das reflexións realizadas seguramente é froito da casualidade... ¿ou non?

Fontes:

La Proporción Áurea. Mario Livio. Ariel.

http://es.wikipedia.org/wiki/Flinders_Petrie

<http://es.wikipedia.org/wiki/Her%C3%B3doto>



Daniel Ríos Meizoso.
Terceiro ESO-B.