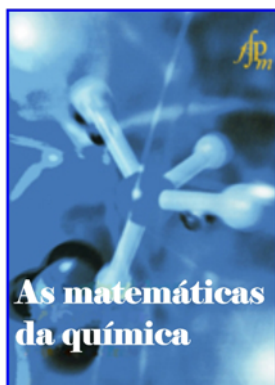
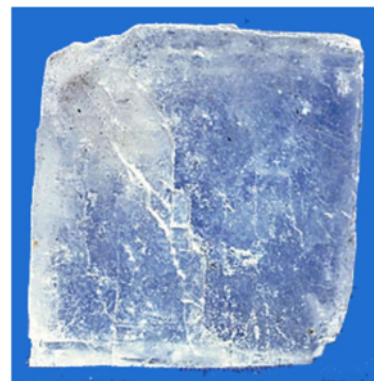
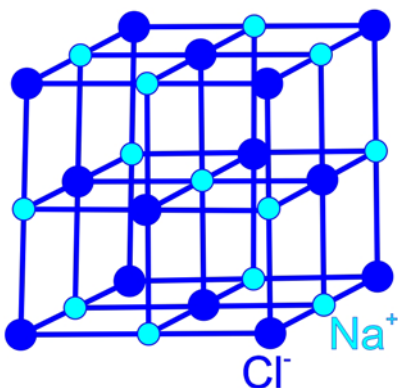


En todas as casas hai un laboratorio: a cociña. E nese laboratorio sempre está presente un composto químico: o **NaCl** (*cloruro de sodio*, ou sal común). O ano 2011 foi declarado pola ONU **Ano Internacional da Química**, por iso para o **XII Día Escolar das Matemáticas** se adoptou o lema **As matemáticas da química**.

12 de maio de 2011
XII Día Escolar das Matemáticas



Federación Española de
Sociedades de
Profesores de Matemáticas

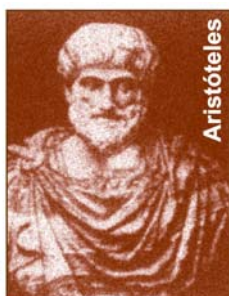


Investiga: Halita

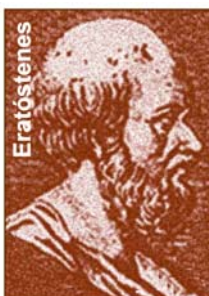
Sapore di sale, sapore di mare

Sendo nós deste lado do mundo, non vai ser preciso que ninguén nos explique que a auga do mar é salgada, por este motivo hoxe queremos presentar unha cuestión que está directamente relacionada con ese feito: **¿Se fosemos quen de extraer todo o sal que contén a auga de todos os océanos do planeta, canto sal obteríamos? ¿Poderíamos cubrir toda a codia terrestre cunha capa de sal? ¿Canto mediría á a altura desa capa?**. Comecemos a cuestión polo principio...

A **Terra** forma parte da *galaxia* chamada a *Vía Láctea* (¿cal é o motivo deste nome?); actualmente sábese que é o terceiro planeta máis próximo ao Sol, que é o máis denso do *Sistema Solar* e que ten **forma de xeoide** (unha “*esfera irregular*”). Pero non sempre se pensou así, ao longo da historia da humanidade déronse diferentes interpretación en relación coa forma da Terra.



Aristóteles



Eratóstenes

A teoría máis xeneralizada na antigüidade clásica grega era considerar a Terra como un **disco plano** flotando no océano. Máis tarde filósofos como **Aristóteles** (384 a.C.-322 a.C.) optaron pola idea de presentar a Terra coma unha **esfera perfecta**, baseándose na evidencia da forma da sombra que a Terra proxecta sobre a Lúa. En consonancia con esta maneira de pensar, o matemático grego **Eratóstenes** (Cirene, 276 a.C. - Alexandría, 194 a.C.) fixo a primeira medición do raio da Terra

cunha precisión considerable, utilizando o método que explicamos no número 11 de **Mathesis**.

A crenza de que a Terra sexa unha esfera perfecta, ponse en cuestión pola Idade Media. Novas interpretacións traen como consecuencia a utilización de novos modelos, e deste modo establécese que a Terra, máis que unha esfera, debe ser considerada coma un **esferoide**. *¿E que é un esferoide?* Para botar algo de luz sobre este concepto, imos ter que deixar claros algúns termos, o que procuramos a seguir.

Unha **elipse** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que verifican que a suma de distancias a dous puntos fixos chamados **focos** é constante. A excentricidade dunha elipse é a razón entre a súa *semidistancia focal*, *c*, (medida do segmento que vai do centro da elipse a un dos seus focos) e a medida do seu *semieixe maior*, *a*. Polo tanto, o valor

da excentricidade dunha elipse estará entre cero e un. A ecuación dunha elipse centrada na orixe dun sistema de coordenadas ten a seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

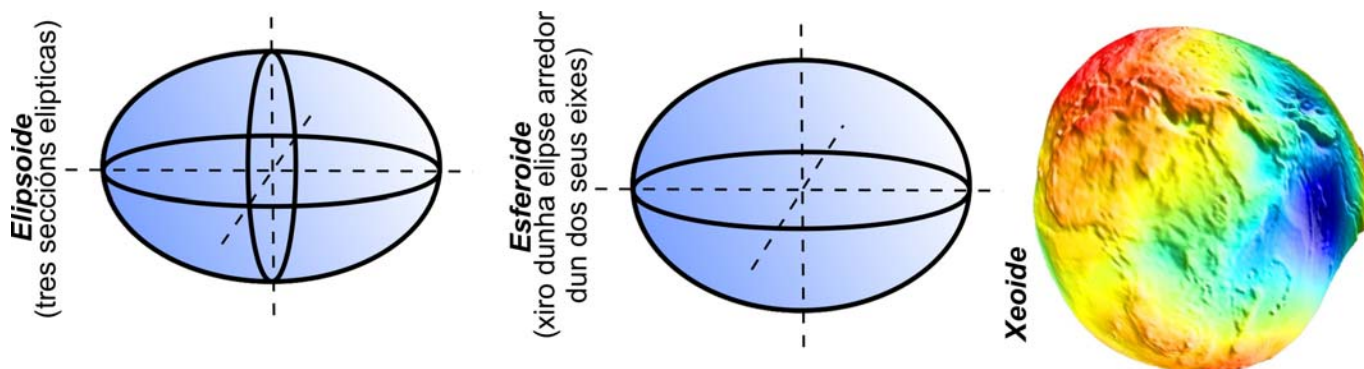
Pasemos agora a tres dimensións e establezamos un sistema de coordenadas no espazo. Se falamos dunha superficie curva pechada, con centro na orixe de coordenadas, cuxas tres interseccións cos planos coordenados sexan tres elipses, estaremos describindo un

elipsoide e a súa ecuación será $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Un **esferoide** é un caso particular de **elipsoide**, obtense ao facer xirar unha elipse arredor dun dos seus eixes, a

ecuación para o **esferoide** será, pois, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

A forma do **esferoide** utilízase –e utilizábase– como modelo para representar a forma da Terra, aínda que, a finais do século XIX se propuxo a forma de **xeoide** como a máis axeitada. Un **xeoide** é un corpo “case” esférico con lixeiras deformacións e achatamentos que teñen que ver cos campos gravitatorios.



Para conseguir os obxectivos que pretendemos, que se darán por acadados realizando estimacións razoables sobre o valor do volume da Terra, será suficiente considerar que a Terra se pode "modelizar" utilizando un **esferoide** ou mesmo unha **esfera**, no caso de que os resultados acadados non fosen demasiado dispares. Teñamos en conta as seguintes fórmulas –non pases por alto as súas similitudes– :

$$V_{\text{elipsoide}} = \frac{4}{3} \pi abc$$

$$V_{\text{esferoide}} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (a \text{ raio da esfera})$$

Utilicemos as seguintes medidas aproximadas:

Raio ecuatorial da Terra $\approx 6\,378 \text{ km}$; *Raio polar da Terra* $\approx 6\,356 \text{ km}$; *Raio medio da Terra* $\approx 6\,367 \text{ km}$

Se calculamos o valor do volume da Terra utilizando a fórmula que nos dá o volume dun esferoide, teremos:

$$V_{\text{esferoide}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 6378^2 \cdot 6356 \approx 1,083 \times 10^{12} \text{ km}^3 \approx 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3.$$

partindo dunha esfera obteremos: $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 6367^3 \approx 1,081 \times 10^{12} \text{ km}^3 \approx 1,081 \times 10^{21} \text{ m}^3$

Fíxate que a diferenza que se acada entre a aplicación dunha ou doutra fórmula representa arredor de $1,86 \times 10^{18} \text{ m}^3$, pero esa inmensa cantidade non deixa de ser un erro relativo de menos do 0,2 % respecto do volume da Terra, polo que, para dar contestación á nosa pregunta inicial imos considerar a forma da Terra como se fose **esférica**.

Axustándonos a esta última restrición, a medida da superficie da Terra vén sendo:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 6367^2 \approx 5,09 \times 10^8 \text{ km}^2 \approx 5,09 \times 10^{14} \text{ m}^2.$$

As tres cuartas partes da superficie da Terra están cubertas de auga, delas o 97 % é auga de mar e o restante 3 % auga doce. Deducimos disto que a **superficie da hidrosfera** mide arredor de $3,82 \times 10^{14} \text{ m}^2$ e a **superficie terrestre** ten aproximadamente $1,27 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

Tendo en conta que $D = \frac{M}{V}$ (*densidade = masa/volume*), que a masa total da hidrosfera é $1,4 \times 10^{21} \text{ kg}$ e que a densidade media da auga do mar é $1,02811 \text{ kg/l}$, obtemos que o volume (en litros) da auga dos océanos é, aproximadamente, $\text{volume (l)} \approx \frac{1,4 \times 10^{21} \text{ kg}}{1,02811 \text{ kg/l}} \approx 1,36 \times 10^{21} \text{ l}$.

Parece ser que a maior parte do sal que está disolto na auga do mar procede das erupción volcánicas submarinas. Ademais, cando chove, a auga que descorre polas ladeiras das montañas dissolve os sales que conteñen as rochas.

Cando se evapora a auga do mar, pódese recoller o sal que contén esa auga. O concepto **salinidade** indica a cantidade de sal que hai nun litro de auga. A salinidade non é a mesma en todos os océanos nin en todos os mares; pode ser que no estuario dun río a cantidade de sal sexa arredor de 15 gramos por litro, a auga do Océano Atlántico contén uns 35 g/l, a do Mar Vermello sobre 45 g/l ...

Se consideramos unha salinidade media de 35 g/l, e tendo en conta o dato de máis arriba sobre o volume auga dos océanos teremos, temos: $35 \cdot 1,36 \times 10^{21} \approx 4,76 \times 10^{22} \text{ g} \equiv 4,76 \times 10^{19} \text{ kg}$.

Como a densidade do sal é 2200 kg/m^3 , obtemos que o volume estimado de sal que podemos acadar recollendo o de todos os océanos é $V = \frac{4,76 \times 10^{19}}{2200} \approx 2,16 \times 10^{16} \text{ m}^3$.

Xa podemos dar resposta á pregunta que presentamos ao inicio. Tendo en conta a estimación da superficie da Terra, indicada máis arriba, temos: $h \approx \frac{2,16 \times 10^{16}}{1,27 \times 10^{14}} \approx 170 \text{ m}$.

En conclusión: **¡Se extraemos todo o sal que conteñen os océanos, podemos cubrir completamente a codia terrestre cunha capa de sal de 170 metros de alto!**

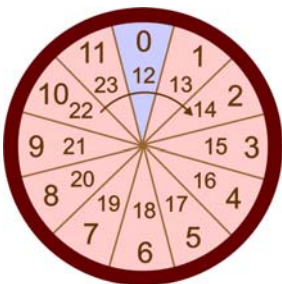


Javier Fernández Vega
Cuarto ESO-A

Investiga: a) Esferoide oblato. b) Esferoide prolato.

CÓDIGOS DE CONTROL: A LETRA DO NIF

A estas alturas do curso xa todos pensamos que sabemos sumar **números enteiros**, e a cuestión pode ser certa se supoñemos que estamos traballando nunha “aritmética normal de base dez”. Nese contexto dicimos: $11 + 10 = 21$ ou $11 + 24 = 35$.



¿Pero que ocorre se os nosos cálculos se efectúan nunha aritmética restrinxida á esfera dun reloxo? Axudémonos do gráfico para xustificar que neste caso $11 + 10 = 9$, $11 + 24 = 11$, $11 + 13 = 0$... Como estamos “dentro” dun reloxo, para efectuar $11 + 10$ colocámonos no 11 e imos contando –unha a unha– 10 horas máis, polo que chegamos ao 9: $11 + 10 = 9$.

Para o caso de $11 + 24$, se avanzamos 24 a partir do 11 volvemos a situarnos no 11, pois un avance de 24 equivale a dar dúas voltas completas: $11 + 24 = 11 + 0 = 11$.

Seguindo esta técnica, o resultado de $11 + 13$ será: $11 + 13 = 11 + 1 = 12 = 0$, pois un avance de 13 equivale a **unha volta + 1**.

Fíxate que neste tipo de aritmética é moi importante observar cantas **voltas completas** caben en cada número e **ter en conta o que sobra**. Por exemplo: $53 = \text{catro voltas} + 5$ e por iso $11 + 53 = 11 + 5 = 4$. Dito matematicamente debemos dividir 53 entre 12 e **ter en conta o resto**.

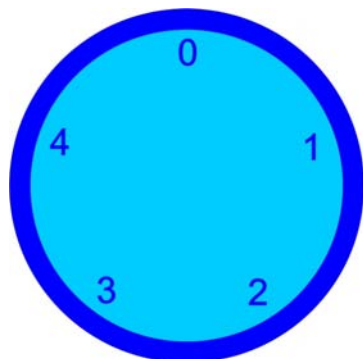
Poñamos un exemplo máis: ¿Como sumamos $67 + 45$? Teremos en conta que $67 = 5 \cdot 12 + 7$ e $45 = 12 \cdot 3 + 9$; deste modo: $67 + 45 = 7 + 9 = 4$ (pois $16 = 1 \cdot 12 + 4$).

Este tipo de aritmética que estamos mostrando denomínase **aritmética modular**. Se traballamos nunha aritmética modular os números quedan agrupados en **clases de equivalencia** chamadas **clases de congruencia**. Algunhas veces dise, de maneira suxestiva, **aritmética do reloxo**, xa que os números «dan a volta» tras alcanzar certo valor chamado **módulo**.

Os exemplos que puxemos con anterioridade corresponden a **clases de congruencia módulo 12**, teríamos os números distribuídos en **doce clases de equivalencia**; os números que forman cada unha desas clases teñen o **mesmo resto cando se dividen entre 12**.

¿Como se actuará se traballamos en **clases de congruencia módulo 5**? Neste caso os números quedarán distribuídos en **cinco clases de equivalencia** e cada unha desas clases estará formada por aqueles que teñen o **mesmo resto cando facemos a división entre 5**.

Na seguinte figura móstrase a esfera do reloxo que nos serve de guía, a indicación de como se distribúen os números enteiros formando as cinco clases de equivalencia e as táboas de sumar e de multiplicar para **clases de congruencia módulo 5**.



Clase do 0	Clase do 1	Clase do 2	Clase do 3	Clase do 4
...	...	...	...	...
-15	-14	-13	-12	-11
-10	-9	-8	-7	-6
-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
...	...	...	...	...

Táboa de sumar						Táboa de multiplicar					
+	0	1	2	3	4	x	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

¿Es quen de comprender que as seguintes sumas están correctamente feitas en **clases de congruencia módulo 5**?:

$3+2=0$ (*¡o que significa que 2 e 3 son opostos cando traballamos nesta aritmética!*).

$$4+4=3$$

$$3+8=3+3=1$$

$$12+17=2+2=4$$

$$43+76=3+1=4$$

Tendo en conta as táboas de sumar e de multiplicar para **clases de congruencia módulo 5**, responde ás seguintes preguntas:

1.- ¿Cal é o oposto de 1? ¿Cal é o oposto de 4? 2.- Calcula os inversos de 1, 2, 3 e 4.

¿E que ten que ver todo isto coa letra que aparece formando parte do NIF?

O NIF está formado polo número do DNI xunto cunha letra que é un **código de control**. Esa letra ten a misión de controlar se nós facilitamos correctamente o número do DNI cando o ditamos ou se o introducimos nun sistema informático.

Cos números dos DNI trabállase en **clases de congruencia módulo 23**, deste modo os números utilizados quedan distribuídos en vinte e tres clases de equivalencia, que son as que corresponden aos 23 restos diferentes –de 0 a 22– que se obteñen ao facer a división de cada número de carné entre 23.

A cada unha desas vinte e tres clases asígnaselle unha letra, tal como se indica na seguinte táboa:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Se tes, poñamos por caso, o número **53308265** terás que dividilo entre 23 e mirar cal é o resto:

$53\ 308\ 265 = 23 \cdot 2\ 317\ 750 + 15$ ou sexa que o resto é 15 e a letra correspondente é S; polo tanto o NIF será **53308265S**.

Investiga:

- 1.- Fai a comprobación da letra do teu DNI.
- 2.- ¿Cal é a letra que corresponde ao DNI número 54129490?
- 3.- No NIF 5350279*J o * representa un número que se borrou. ¿Cal é ese número?
- 4.- Dá dous números de NIF que teñan a mesma letra. Xustifica a túa resposta,



Juan Castanedo Gantes
Cuarto ESO-A

DUODÉCIMA
A Coruña, do 1 ao 10 de xuño de 2011

**Semana matemática do
IES Ramón Otero Pedrayo**