

XEOMETRÍA EN OBXECTOS COTIÁS: A LÁMPADA E A SÚA CAIXA



Habitualmente temos ao noso carón multitude de obxectos que, por seren tan cotiás, non reparamos nas importantes utilidades que teñen, nos beneficios que nos ofrecen e, moito menos, na cantidade de conceptos e propiedades matemáticas que conteñen.

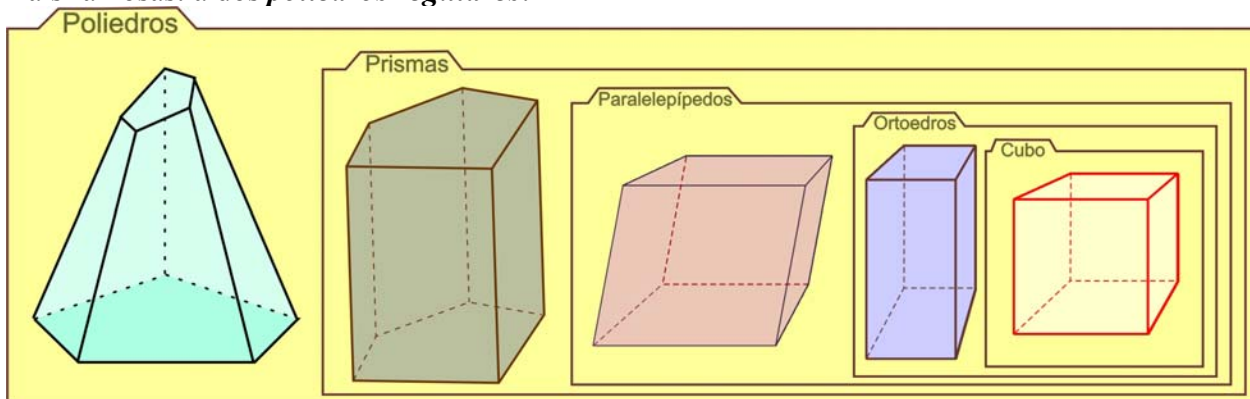
¿Quen non tivo nas súas mans unha lámpada e o seu envase? ¿Tes pensado na cantidade de formas diferentes que poden presentar estes obxectos? Proponémosche que observes baixo

un punto de vista xeométrico a lámpada e o seu envase que mostramos á esquerda.

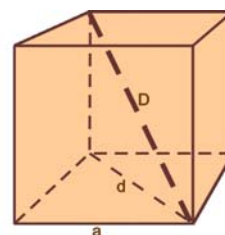
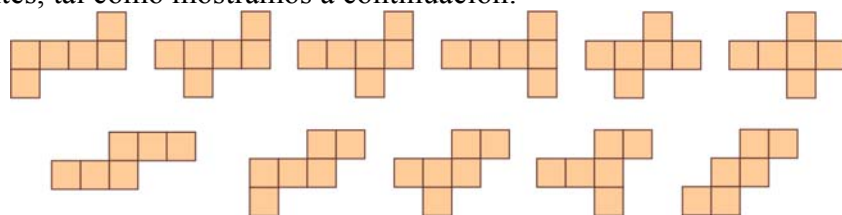
Un **poliedro** (*polýs*, moito; *hédra*, cara) é un corpo xeométrico formado por múltiples caras *poligonais*. Como dixemos no pasado número de *Mathesis* (ver *Mathesis* 45) os elementos básicos dun poliedro son as súas **caras** –polígonos que o limitan–, as **arestas** –segmentos nos que se xuntan dúas caras– e os **vértices** –puntos nos que concorren tres ou máis arestas–.

Existen poliedros que teñen o privilexio de contar con nome propio, aínda que na maioría das ocasións referímonos aos poliedros utilizando prefixos que nos indican o número das súas caras: *tetraedros* (4 caras), *pentaedros* (5 caras), *hexaedros*, *heptaedros*, *octaedros*...

Pódense atopar familias destacadas dentro do mundo dos poliedros: os **prismas**, as **pirámides**... ou unha das máis famosas: a dos **poliedros regulares**.



A caixa que contén a nosa lámpada é un **ortoedro** de base *cadrada* é, polo tanto, un **paralelepípedo** no que as arestas laterais son *perpendiculares* ás arestas das bases. Un **cubo** (*hexaedro regular*) é un **ortoedro** no que todas as caras son *cadradas*. Un cubo pode formase a partir de once desenvolvementos diferentes, tal como mostramos a continuación:

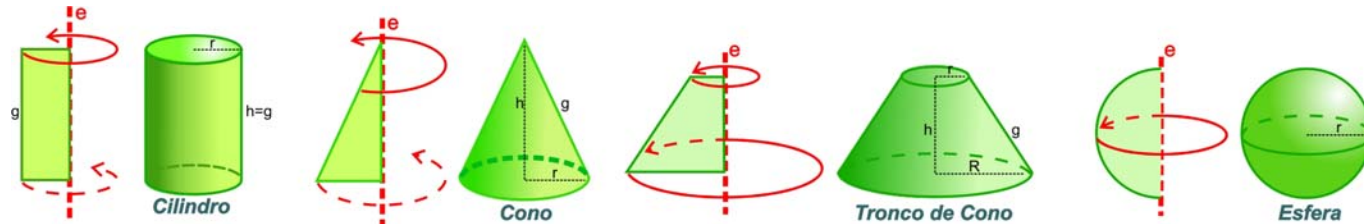


Cada un destes desenvolvementos é un **hexaminó**, pero existen outros *hexaminós* que non son desenvolvementos dun cubo. Recordámosche que no número 40 de *Mathesis* tratamos o tema dos

poliminós, polo que podes ver ese número para afondar na cuestión. Agora ímosche propor as primeiras *suxestións para que investigues*:

- a) Primas, prismas regulares. b) Pirámides, pirámides regulares. c) Poliedros regulares.
 d) Poliedros semiregulares ou arquimedianos. e) Poliedros de Catalan. f) Hexaminós
 g) Calcula as medidas da diagonal dunha cara, d , e da diagonal dun cubo, D , se a súa aresta mide a .

Centrámonos na lámpada. Un modelo matemático para representala podería obterse a partir dun **cilindro** e dun **tronco de cono**. A mención destes corpos xeométricos fai que reparemos de xeito inmediato nos **corpos de revolución**. Un corpo xeométrico é de revolución cando se obtén ao facer xirar unha figura plana arredor dun eixe. Na seguinte figura suxerimos os máis típicos xunto coa maneira habitual de xeralos:

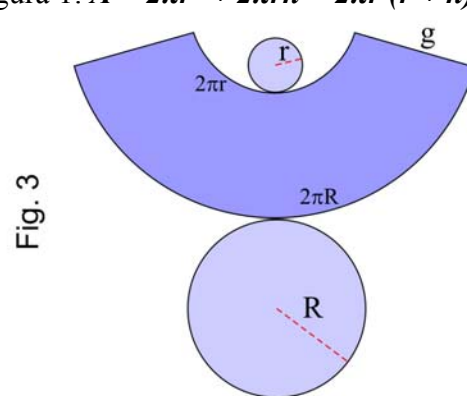
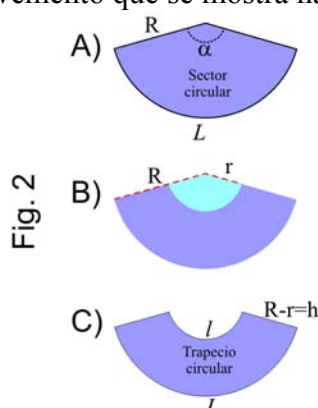
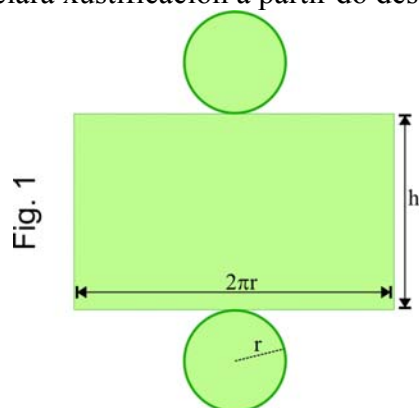


Deteñámonos no **cilindro** e no **tronco de cono** que, como dixemos, son os corpos de revolución que nos permitirán facer un modelo da nosa lámpada.

Como o **cilindro** é un **corpo prismático**, a medida do seu volume pódese obter multiplicando a área da base pola altura; así, pois, $V = \pi r^2 \cdot h$ xa que a súa base é un **círculo**.

Para calcular o volume dun tronco de cono temos que botar man dunha fórmula algo máis complicada: $V = \pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot h / 3$.

A continuación imos co cálculo das medidas das superficies. A determinación da área total do cilindro ten clara xustificación a partir do desenvolvemento que se mostra na figura 1: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r \cdot (r + h)$.



Para calcular a área total do tronco de cono (velaí o desenvolvemento na figura 3, formado por dous círculos e un **trapezio circular** –sector de coroa circular–) imos facer uns cálculos previos botando man da figura 2.

A lonxitude do arco correspondente a un sector circular (Fig. 2, A) calcúlase a partir da lonxitude da circunferencia e tendo en conta o ángulo α que abarca o sector: $L = \frac{2\pi R}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi R \alpha}{180}$. A medida da

superficie dese sector circular, calcúlase así: $S_{\text{sector}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$. Tomando esta última expresión e tendo en

conta que na anterior se calculou o valor de L , temos: $S_{\text{sector}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot R \cdot R \cdot \alpha}{2 \cdot 180} = \frac{L \cdot R}{2}$.

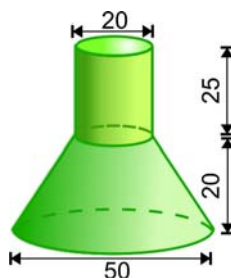
Como se mostra nos apartados B) e C) da Fig. 2, o trapezio circular pódese obter recortando un sector circular máis pequeno do sector circular de partida. Polo tanto, a medida da superficie do trapezio circular pode obterse así:

$$S_{TC} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \alpha}{360} (R^2 - r^2) = \frac{\pi \alpha}{360} (R+r)(R-r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi R \alpha}{180} + \frac{\pi r \alpha}{180} \right) \cdot (R-r) = \frac{1}{2} (L+l)h = \frac{(L+l)h}{2}$$

Tendo presente a última expresión, e fixándonos na Fig. 3, podemos calcular a medida da superficie lateral dun tronco de cono: $S_{LAT} = \frac{(2\pi R + 2\pi r) \cdot g}{2} = \frac{2\pi \cdot (R+r) \cdot g}{2} = \pi \cdot (R+r) \cdot g$. Concluimos, pois, que a superficie total dun tronco de cono exprésase:

$$S = \pi \cdot (R+r) \cdot g + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Para rematar, pedímosche que **calcule** as medidas do volume e da superficie total da lámpada, tendo en conta os datos, expresados en milímetros, que che damos no esbozo.



Vanesa Méndez Mareque
Cuarto ESO-A

A FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA

Brahmagupta naceu no ano 598, pero non está totalmente claro cal é o lugar do seu nacemento, certos estudos din que foi natural de Ujjain e outros afirma que naceu na cidade de Bhinmal, que está no nordeste de Rajasthan. **Brahmagupta** viviu no século VII, na dinastía Gurjara, durante o reinado de Vyaghramukha, en pleno esplendor da matemática hindú. Morreu no ano 670 sendo considerado o maior matemático da súa época. Seu pai chamábase Jisnugupta.

Brahmagupta estivo á fronte do máis famoso e antigo observatorio de astronomía en Ujjain, cidade onde pasou a maioría da súa vida. Mentres dirixiu o observatorio, que foi o centro matemático máis avanzado da época na India, escribiu catro obras sobre matemáticas e astronomía: *Cadamekela*, *Brahmasphutasiddhanta*, *Khandakhadyaka* –escrita aos 67 anos–, e *Durkeamynarda*.

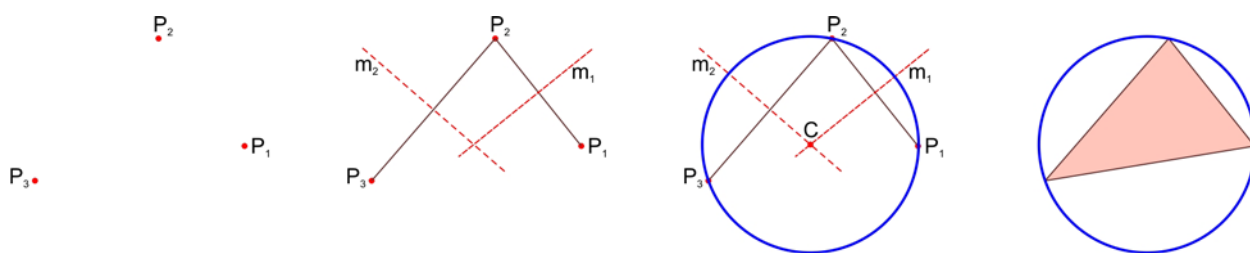
A súa obra máis famosa é *Brahmasphutasiddhanta* (*Tratado revisado de Brahma*), escribiuna na cidade de Bhinmal. Está redactada en verso, forma que era frecuente entre os matemáticos da India. Contén vinte e cinco capítulos, dos que os primeiros dez se dedican a cuestións de astronomía (medidas dos planetas, eclipses de Lúa e de Sol, a sombra da Lúa, conxuncións dos planetas...) e os demais teñen que ver fundamentalmente coas matemáticas (aritmética, xeometría, álgebra, instrumentos de medida, táboas...).

Nas súas obras, ademais de astronomía, trata de moi diversos temas relativos ás matemáticas: Fixo importantes achegas no campo da álgebra, ocupándose do cálculo das solucións de ecuación de segundo grao incluíndo raíces positivas, negativas e mesmo irracionais; pódese dicir que é a primeira vez que se fai un estudo coherente dos números negativos e o cero, describindo operacións con eles e traballando en cálculos con fraccións e series de cadrados e cubos. Deu a solución xeral dunha *ecuación diofántica* do tipo $ax + by = c$ (sendo a , b , c , números enteiros) –recorda que tratamos o tema das *ecuacións diofánticas* en **Mathesis 43**–. Introduciu o cálculo da “*área bruta*” dun triángulo multiplicando, no caso dun triángulo isósceles, a metade da medida da base por a medida dun dos lados iguais e, para un triángulo escaleno, multiplicando a metade da medida da base pola media aritmética das medidas dos outros dous lados. Tamén calcula a “*área bruta*” dun **cuadrilátero** multiplicando as *medias aritméticas dos dous pares de lados opostos*.

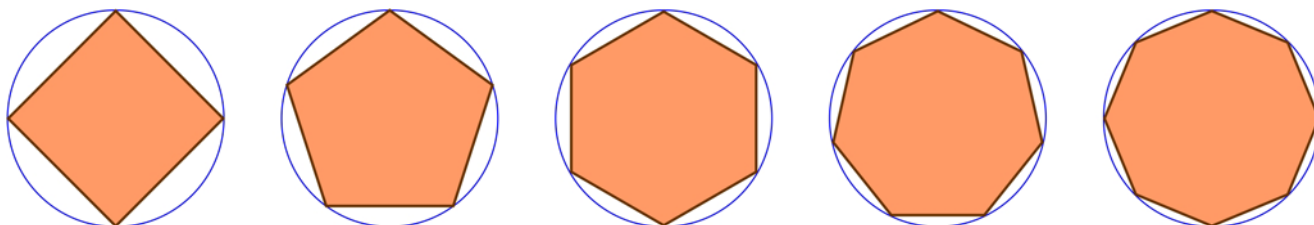
Ímonos centrar agora nunha cuestión xeométrica que é un dos resultados máis coñecidos directamente ligados co nome de **Brahmagupta**. Comecemos por recordar que por tres puntos non aliñados sempre pasa unha circunferencia.

Na seguinte figura detallamos o proceso de construción: Partimos dos puntos P_1 , P_2 e P_3 e construímos as **mediatrices**, m_1 e m_2 , dos segmentos P_1P_2 e P_2P_3 , respectivamente. O punto de corte, C , desas dúas **mediatrices** vai ser o **centro da circunferencia** que pase polos tres puntos de partida.

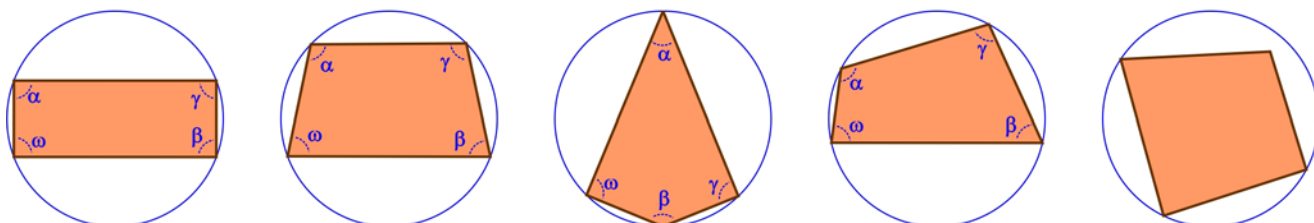
Podemos tirar, pois, a seguinte conclusión: **dado un triángulo calquera sempre podemos trazar unha circunferencia que pase polos seus tres vértices –circunferencia circunscrita ao triángulo–**.



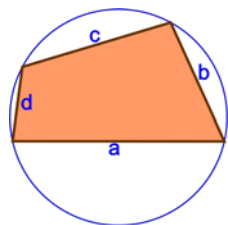
Un **polígono** é **cíclico** cando existe unha circunferencia que pase por **todos** os seus **vértices**. Pólo tanto, **todos os triángulos son polígonos cíclicos**. Tamén con cíclicos todos os polígonos regulares:



Existen **polígonos non regules** que son **cíclicos** e outros que non o son. E, de igual modo, existen **cuadriláteros** que son **cíclicos** e outros que non o son:



Pódese demostrar que a **condición necesaria e suficiente** que debe cumprir un cuadrilátero para ser cíclico é que cada unha das parellas de ángulos opostos estea formada por ángulos **suplementarios**. É dicir, coa notación que aparece na figura anterior, $\alpha + \beta = 180^\circ$ e $\gamma + \omega = 180^\circ$.



Brahmagupta deixounos dúas fórmulas para calcular a área dun cuadrilátero. Unha resolve o problema de forma aproximada calculando a “área bruta” como dixemos máis arriba: $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$; a outra, que aínda na actualidade se reconece ligada ao

seu nome, dá a área exacta **para cuadriláteros cíclicos** pero hai quen afirma que **Brahmagupta** pensaba que era válida para todos os cuadriláteros. Esa fórmula é a

seguinte: $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, sendo s o semiperímetro do cuadrilátero, é dicir: $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. A anterior fórmula de **Brahmagupta** para o cálculo da área de cuadriláteros cíclicos,

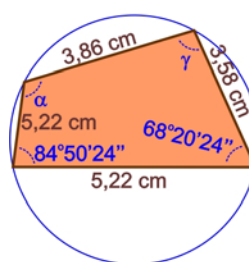
pode ser considerada coma unha xeneralización da famosa **fórmula de Herón** para o cálculo da área dun triángulo.

Para que investigues:

Dá o enunciado da **Fórmula de Herón**.

Tendo en conta o que se dixo anteriormente e os datos que aparecen na figura da dereita, calcula a “área bruta” do cuadrilátero e tamén a súa área exacta utilizando a **Fórmula de Brahmagupta**.

¿Cal é a medida dos ángulos α e γ ?



Álvaro Franqueira Varela
Cuarto ESO-A.