

MATRÍCULAS CAPICÚA TOTAL

Existen numerosas palabras que se len igual de esquerda a dereita que de dereita a esquerda, hainas en galego, en castelán, en inglés ou en calquera outro idioma.... Por exemplo: *salas, oso, seres...* Denomínanse *palabras palindrómicas* ou *palíndromos*. Tamén se poden atopar moitas frases palindrómicas; por exemplo: *A torre da derrota, Ó saír ría só, Luz azul, Ana lava lana...*

Ademais de palabras e frases, tamén son frecuentes números palindrómicos, son os chamados *números capicúas*. Por exemplo: 121, 2222, 10101...

Dispoñemos de técnicas enxeñosas para *fabricar* números capicúas, unha delas é, por exemplo, elevar ao cadrado os números 11, 111, 1111... que xa de seu son capicúas; vexamos: $1\ 111\ 111 \cdot 1\ 111\ 111 = 1234567654321$. *¿Cal é o último dos números desa familia que ten cadrado capicúa?*

$$\begin{array}{r} 103 \\ + 301 \\ \hline 404 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 84 \\ \hline 132 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ + 231 \\ \hline 363 \end{array}$$

Outra forma de obter capicúas é, como se explicou en *Mathesis* 23, a seguinte: elixe un número calquera, súmao co que resulta de inverter a orde das súas cifras e repite este proceso ata a consecución dun número capicúa.

Existen nove capicúas de dúas cifras, que son múltiplos de 11: 11, 22, 33... 99. De 3 cifras existen 90 capicúas: 101, 111, 121, 131... 191, 202, 212, 232...292, 303, 313, 323, 333...393... 909, 919,... 999. De catro cifras tamén son 90: 1001, 1111, 1221, 1331... 1991, 2002, 2112, 2222, 2332... 2992... 9009... 9999.

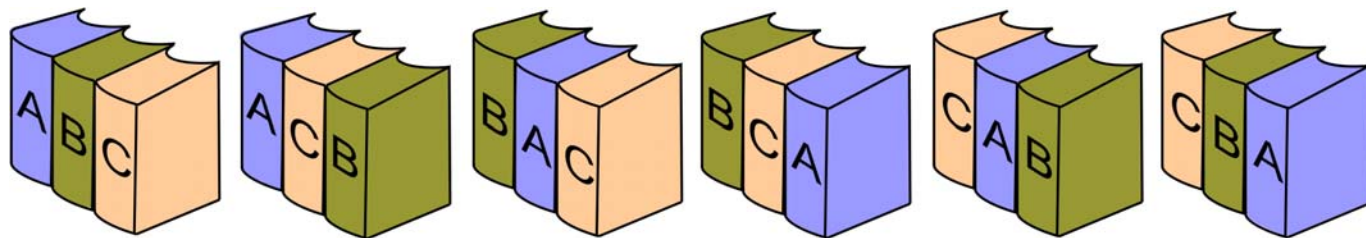
Demostremos que *“Todo capicúa de catro cifras á múltiplo de 11”*: Un número capicúa de catro cifras ten a forma *abba*. E así:

$$abba = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + b \cdot 10 + a = 1000a + a + 100b + 10b = 1001a + 110b = 11 \cdot (91a + 10b).$$

Deixámosche agora as primeiras cuestións para que as contestes de maneira razoada: a) ¿Cantos capicúas de cinco cifras existen? b) ¿Son múltiplos de 11 os capicúas de tres cifras? ¿E os de cinco cifras?

Para escribir palabras ou cantidades tomamos algúns elementos de dous conxuntos ben coñecidos –o alfabeto e o conxunto das cifras indo-arábicas– e realizamos agrupamentos.

Existen diversas maneiras de facer agrupamentos a partir dos elementos dun conxunto. Imaxinemos que queremos colocar 1, 2 ou 3 libros nun estante. Para colocar *un* libro só hai *un* xeito de colocalo; para *dous* libros temos *dúas* posibilidades; para *tres* libros dispoñemos de *seis* formas distintas de colocación:



Estas seis maneiras de colocar os tres elementos dun conxunto, chámanse en matemáticas *permutacións de tres elementos* e simbolízanse por P_3 . Así $P_1=1$, $P_2=2$ e $P_3=6$. Fíxate que $P_1=1$, $P_2=2 \cdot 1$ e $P_3=3 \cdot 2 \cdot 1$.

¿Que pasará cando teñamos 4 ou 5 ou... *m* libros? Se te paras a pensar, poderás comprobar que existen 24 formas diferentes de colocar catro libros nun estante, $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; e serán 120 as formas de colocalos cando dispoñamos de cinco libros: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. En xeral, se tivésenos *m* libros, as maneiras de

dispoñelos nun estante serán $P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este produto de m factores consecutivos e decrecentes comezando en m e rematando en 1, denomínase **m factorial** e represéntase $m!$. Así, pois, $P_m = m!$. ¡Busca a tecla que calcule $m!$ na túa calculadora e comproba como funciona!

Outras veces dispoñemos dun conxunto de m elementos pero non queremos utilízalos todos simultaneamente. Partamos dun conxunto, $C = \{\text{amarelo, encarnado, azul, verde}\}$, de catro cores e supoñamos que queremos fabricar bandeiras que teñan dúas cores diferentes:



Se traballamos cun conxunto de m elementos e tomamos n elementos de cada vez para facer agrupamentos, de forma que dúas agrupacións sexan diferentes cando teñan elementos distintos ou eses elementos estean colocados en diferente orde, as agrupacións obtidas denomínanse **variacións de m elementos tomados n a n** , $V_{m,n}$. Así, no exemplo anterior, as bandeiras que se construíron son as **variacións de catro cores tomadas de dúas en dúas**, $V_{4,2}$. Observa que dúas bandeiras son distintas cando están formadas por cores diferentes ou cando, tendo as mesmas cores, varía a orde da súa colocación.



Existen circunstancias nas que a **orde** de colocación **non inflúe** na natureza dos agrupamentos. É dicir, partindo dun conxunto de m elementos e escollendo n de cada vez, dous agrupamentos resultan ser diferentes **unicamente** cando interveñen elementos distintos na súa formación. Este tipo de agrupacións chámanse **combinacións de m elementos tomados n a n** , $C_{m,n}$. Por exemplo, se me piden que diga dous concellos da provincia da Coruña que teñan nome que comece por N, existen seis posibles respostas –tal como se observa na figura–; esas seis posibilidades serán as **combinacións de catro elementos tomados de dous en dous**, $C_{4,2}$. Ten en conta que respostas coma Neda-Noia ou Noia-Neda son a mesma, mentres que as

bandeiras amarela-encarnada e encarnada-amarela son diferentes.

Investiga as teclas da túa calculadora que permiten calcular o número de $V_{m,n}$ e de $C_{m,n}$.

Nos agrupamentos realizados ata agora –**permutacións**, **variacións** e **combinacións**– utilizamos os elementos do conxunto de partida (*libros, cores, nomes*) sen repetilos. Propoñémosche que **investigues** como se constrúen as diferentes agrupacións cando se permite repetir os elementos do conxunto de partida para formar as **permutacións con repetición** de m elementos, as **variacións con repetición** e as **combinacións con repetición**. A seguir resumimos como se calcula o número de agrupamentos para as modalidades das que fixemos referencia ata aquí:

$$P_m = m!$$

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

$$PR_m^{n_1, n_2, n_3, \dots} = \frac{m!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots}$$

$$VR_{m,n} = m^n$$

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)! \cdot n!}$$

Desde o ano 2000, as matrículas dos vehículos en España, que se asignan a nivel nacional, están formadas por catro cifras e tres letras consonantes maiúsculas –exceptúanse Ñ e Q para que non haxa confusión

con N e O—. Polo tanto dispoñemos de vinte letras: B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z.

Como temos 20 letras para formar *palabras* de tres letras e debemos ter en conta que a **orde** de colocación é determinante e que as letras **poden repetirse**, estamos a falar de **variacións con repetición** de vinte elementos tomados de tres en tres, $VR_{20,3}$. Utilizando a fórmula citada anteriormente, calculamos que as palabras que podemos formar son $VR_{20,3} = 20^3 = 8\ 000$.

¿E cantas destas 8 000 palabras son *palindrómicas*? Vexamos: Dispoñemos de 20 letras e cada unha delas debe estar ao principio e ao final das respectivas palabras: B_B, C_C,... Z_Z; nos ocios podemos colocar outra vez cada unha das 20 letras; polo tanto: $20 \cdot 20 = 400$ palabras *palindrómicas* de tres letras.

Pensem agora nos números. Queremos saber cantos agrupamentos de catro cifras existen. Para escribilos dispoñemos de dez cifras –0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9– que podemos repetir e que collemos de catro en catro e, ademais, ten importancia a orde de colocación. Polo tanto estamos a falar de **variacións con repetición** de dez elementos tomados de catro en catro: $VR_{10,4} = 10^4 = 10\ 000$ (desde 0000 ata 9999).

Ao inicio desta redacción dixemos que existen 90 números capicúas de catro cifras. Non debemos esquecer, para o caso das matrículas, das configuracións 0000, 0110, 0220,... ,0990; ou sexa, outros dez *capicúas* a ter en conta.

Imos chamar **matrículas capicúa total** ás que se formen con **parte numérica capicúa** e ao mesmo tempo teñan **parte literal palindrómica**. ¿Será doado que atopes un coche que teña **matrícula capicúa total**?



E agora, velaquí as preguntas para que investigues:

- 1.- ¿Cantos coches se poden matricular co sistema de matriculación actual?
- 2.- ¿Cantas desas matrículas serán **capicúa total**?
- 3.- ¿Cantos coches se poden matricular que teñan un número coas catro cifras diferentes?
- 4.- ¿Cantos se poden matricular que teñan a parte literal coas tres letras iguais?
- 5.- Fai un razoamento para determinar cantos anos máis pode durar este sistema de matriculación.

FÓRMULA DE EULER



Leonhard Euler naceu o 15 de abril de 1707 en Basilea (Suíza), pouco despois de que a súa familia se mudara alí, e faleceu o 18 de setembro de 1783 en San Petersburgo (Rusia). Fillo de *Paul Euler*, pastor calvinista, e de *Marguerite Magdalena Brucker*, filla tamén doutro pastor protestante. A nenez de **Leonhard Euler** transcorreu en Riehen, lugar próximo a Basilea ao que se trasladou a súa familia cando el tiña un ano. *Paul Euler* estivo moi relacionado cos Bernoulli –familia á que pertenceron moitos famosos matemáticos– e tivo unha grade amizade con *Johann Bernoulli*, por este motivo era moi afeccionado ás matemáticas. Así, o pai de Euler, entre oración e oración, ensináballe ao seu fillo matemáticas e o neno dende moi pequeno deu mostras de ter unha grande intelixencia e moito talento para esta ciencia.

Aos 13 anos **Euler** foi enviado á casa da súa avoa en Basilea para que comezase os estudos na Universidade e en 1723 licenciouse en Filosofía. Tamén recibía clases de *Johann Bernoulli* un día por semana, aínda que por aquel tempo **Euler** estudaba teoloxía, grego e hebreo seguindo os plans trazados por seu pai que tiña determinado para el que no futuro exercese como pastor protestante.

Debido á mediación de *Johann Bernoulli*, que convenceu ao pai de Euler de que Leonhard podía chegar a ser un gran matemático, tornouse o rumbo da súa formación e en 1726 **Euler** finalizou o seu doutoramento en matemáticas. En 1727 concursou polo gran premio da *Academia das Ciencias de París* cun traballo sobre a mellor disposición dos masts nun barco de guerra. Desta vez quedou segundo, aínda que máis adiante gañou o premio doce veces.

En 1726 *Daniel Bernoulli*, fillo de Johann, que ocupaba unha praza de matemáticas na *Academia de Ciencia de San Petersburgo*, propúxolle a **Euler** que fose para Rusia. En 1727 Leonhard incorpórase á academia e toma posesión dunha praza de fisioloxía e medicina que desempeñou ata 1730, ano no que o asignaron a unha praza de física. A súa situación profesional experimentou unha considerable mellora en 1733, cando *Daniel Bernoulli* marchou da cidade e deixou a **Euler** como director do departamento de matemáticas.

O 7 de xaneiro de 1734 **Leonhard Euler** casou con *Katharina Gsell*, filla dun pintor suízo. Tiveron trece fillos dos cales só cinco sobreviviron ata a idade adulta.

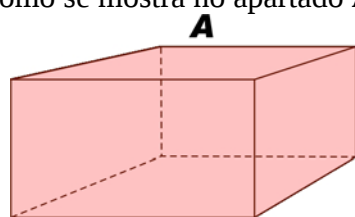
Cara 1741 marchou de San Petersburgo para aceptar un cargo na *Academia de Berlín*, alí viviu durante vinte e cinco anos ata que, en 1766, aceptou unha nova invitación para volver á *Academia de San Petersburgo* onde viviu o resto da súa vida.

A pesar dos graves problemas de visión que padeceu –chegou a quedar cego– **Leonhard Euler** está considerado coma **o máis prolífico matemático de todos os tempos**. Fixo achegas practicamente en todas as ramas das matemáticas e noutros moitos campos científicos, escribindo tal cantidade de traballos que son necesarios milleiros de páxinas para poder editalos, ata tal punto que a Academia de San Petersburgo seguiu publicando os seus escritos durante 50 anos despois da súa morte.

Moitas ramas científicas (medicina, cartografía, economía, música, astronomía, mecánica...) e moitas cuestións fundamentais das matemáticas quedaron para sempre ligadas ao nome de **Leonhard Euler**: o número e (e de Euler), a fórmula de Euler, a recta de Euler, polinomios e integrais de Euler, teoría de números, números complexos, logaritmos, estudo de funcións, cálculo, topoloxía, ecuación diferenciais, teoría de grafos, álgebra, xeometría...

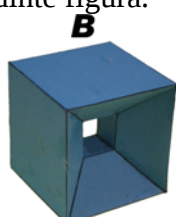
Imos lembrar agora a coñecida **fórmula de Euler para poliedros convexos**. Un *poliedro* é un corpo xeométrico en tres dimensións que ten por **caras** polígonos que encerran un volume finito. Os **segmentos** onde se xuntan dúas **caras** chámase **arestas** e os puntos onde concorren tres ou máis **arestas** denomínanse **vértices**.

A **fórmula de Euler para poliedros** di que sempre se cumpre a relación $C + V - A = 2$ se nos referimos a **poliedros convexos** –un *poliedro* é *convexo* cando tomados dous puntos calquera da *superficie poliédrica*, o *segmento* que os une sempre se atopa no interior do espazo encerrado por esa superficie ou está sobre ela–; por exemplo, unha caixa de zapatos é un **poliedro convexo** e polo tanto cumpre a **fórmula de Euler**, tal como se mostra no apartado A da seguinte figura.



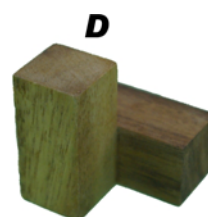
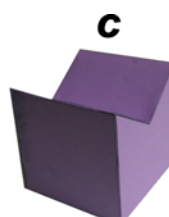
$$C=6 \quad V=8 \quad A=12$$

$$C + V - A = 2$$



$$C=16 \quad V=16 \quad A=28$$

$$C + V - A = 4$$



¿E que é o que ocorre cos **poliedros cóncavos**, coma os que se poden ver nos apartados B, C e D da figura anterior? Nela queda resolto o caso B; os outros dous casos deixámoschos para que os investigues ti nas seguintes dúas propostas:

- 1.- Mostra que se cumpre a **fórmula de Euler** para os cinco sólidos platónicos, para un prisma pentagonal e para unha pirámide hexagonal.
- 2.- Mostra que é que ocorre para cada un dos corpos C e D da figura anterior.



Lorena Gareá Millares.
Cuarto ESO-A.