

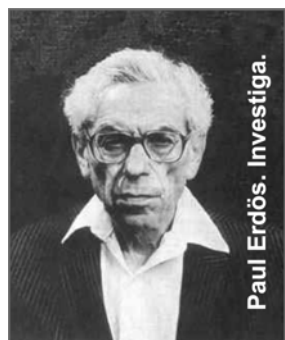
Ese récord foi superado por *Hank Aaron*, que chegou a establecelo en 755 home runs. O 8 de abril de 1974, *Aaron* bateu a marca de *Ruth* anotando o seu 715 home run.

Ocorreu que un matemático chamado *Carl Pomerance*, que traballaba na cidade de Atlanta, fíxose nos números de home runs dos que tanto se estaban a falar polo récord de *Hank Aaron*. Déuselle por facer as factorizacións de 714 e 715:

$$714 = 2 \times 3 \times 7 \times 17 \qquad 715 = 5 \times 11 \times 13$$

Observou dúas cuestións: os factores que interviñan nas dúas descomposicións, 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17, son os sete primeiros números primos e, ademais, **a suma dos factores primos de 714 coincide coa suma dos factores primos de 715** ($2+3+7+17=5+11+13=29$).

¿Existen máis parellas de números naturais consecutivos con esta mesma propiedade? A resposta é afirmativa, e por este motivo estableceuse a seguinte definición: Chámase **parella numérica Ruth-Aaron** a un par de números naturais consecutivos para os que se cumpre que a suma dos factores primos dun deles coincide coa suma dos factores primos do outro.



Paul Erdős. Investiga.

O par (5, 6) é a parella *Ruth-Aaron* que está formada polos naturais cos valores máis baixos ($5=5$, $6=2 \times 3$, $2+3=5$). Existen 26 parellas *Ruth-Aaron* formadas por números naturais con valor menor que 20 000 e 149 parellas formadas por naturais menores que 1 000 000. *Carl Pomerance* conxecturou que existen infinitas parellas numéricas *Ruth-Aaron*. *Paul Erdős* demostrou que, efectivamente, esa afirmación é verdadeira.

Existen parellas numéricas *Ruth-Aaron* que están formadas por números naturais que se factorizan con números primos diferentes e outras nas que as descomposicións conteñen factores primos repetidos. Por exemplo, fíxémonos nas parellas (77, 78) e (8, 9):

$$77 = 7 \times 11 \quad 78 = 2 \times 3 \times 13 \quad (7+11 = 2+3+13) \quad 8 = 2 \times 2 \times 2 \quad 9 = 3 \times 3 \quad (2+2+2 = 3+3)$$

Imos chamar **valor Ruth-Aaron** dun número natural n –simbolizarémolo $VRA(n)$ – ao valor que se obtén ao facer a suma de todos os seus factores primos. Por exemplo, $VRA(21) = 10$ ($21 = 3 \times 7$ e $3+7 = 10$) ou $VRA(54) = 11$ ($54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ e $2+3+3+3 = 11$).

Existen números naturais consecutivos, n e $n+1$, que teñen valores *Ruth-Aaron* consecutivos de xeito ascendente; é dicir: $VRA(n+1) = VRA(n) + 1$. Por exemplo, para os números 20 e 21 ocorre que $VRA(20) = 2+2+5 = 9$ e $VRA(21) = 3+7 = 10$.

Noutros casos ocorre que $VRA(n+1) = VRA(n) - 1$; isto é, n e $n+1$ teñen valores *Ruth-Aaron* consecutivos de xeito descendente. Por exemplo, para os números 63 e 64 ocorre que $VRA(63) = 3+3+7 = 13$ e $VRA(64) = 2+2+2+2+2+2 = 12$.

Para que investigues:

- 1.- Busca a parella *Ruth-Aaron* que está formada polos naturais cos valores máis altos, que sexan menores que 20 000.
- 2.- Dadas as seguintes parellas de números naturais consecutivos, mostra cales son parellas *Ruth-Aaron* e cales non o son: (125, 126), (434, 435), (948, 949), (1239, 1240), (1520, 1521), (1862, 1863).
- 3.- No intervalo 1325 – 1335 atópase unha parella numérica *Ruth-Aaron*; encóntraa. Mostra que realmente se trata dunha parella *Ruth-Aaron*.
- 4.- Busca (e xustifica a túa afirmación) dous números consecutivos que teñan valores *Ruth-Aaron* consecutivos ascendentes e outros dous números consecutivos que teñan valores *Ruth-Aaron* consecutivos descendentes.

Fontes:

http://es.wikipedia.org/wiki/Par_de_Ruth-Aaron
<http://mathworld.wolfram.com/Ruth-AaronPair.html>
<http://www.trottermath.net/numthry/rutharon.html>
<http://www.historiasdelaciencia.com/?p=317>



Esteban Lema López.
Cuarto ESO-A.

PROBLEMAS DÉLICOS



A data de inicio da época de apoxeo das matemáticas gregas pode fixarse polo século VI a.C. Nesta época destacan dous grandes nomes, Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, e prodúcese o acuñamento do propio termo *matemática*. Os matemáticos gregos centraron fundamentalmente o seu traballo en dous campos: a *aritmética* e a *xeometría*. O obxectivo deste escrito ten que ver con algunhas cuestións relacionadas coa xeometría.

Dous foron, fundamentalmente, os instrumentos de traballo dos xeómetras gregos: a *regra* e o *compás*. O que os antigos gregos coñecían como regra e compás era algo diferentes do que nós manexamos hoxe. Para eles unha regra era un listón de madeira sen números; e o compás un instrumento destinado a trazar arcos e circunferencias.

Polo século V a.C. un grupo de matemáticos gregos centraron os seus esforzos na resolución de problemas xeométricos utilizando *unicamente* regra e compás. Tres deses problemas, coñecidos hoxe en día baixo o título de *Os tres Problemas Clásicos*, foron os seguintes: A *trisección dun ángulo* calquera, a *cuadratura dun círculo* e a *duplicación dun cubo*.

Existe unha curiosa lenda relacionada co último destes problemas: Arredor do ano 430 a.C. na rexión Ática (lugar da Grecia Central con capital en Atenas) produciuse unha terrible epidemia de peste. As autoridades non sabían como arranxar o problema e decidiron enviar representantes á illa de *Delos* para que consultaran o oráculo de Apolo no seu templo. O oráculo deu como resposta que, para deter a peste, se debía duplicar o altar do templo que tiña forma cúbica. Iniciouse rapidamente a construción dun novo altar cúbico de aresta o dobre da do altar orixinal... ¡¡pero a peste non rematou!! (¿por que?).

Tendo en conta a lenda anterior, aos *tres problemas clásicos* tamén se lles chama *problemas délicos*.

Todos fixemos –normalmente na materia de plástica– construcións xeométricas utilizando regra e compás: o trazado da mediatriz dun segmento, da bisectriz dun ángulo, a construción dun hexágono regular... Mostramos a seguir un par de exemplos do que queremos dicir.

Comecemos resolvendo o seguinte exercicio: *Dada unha recta, r , e un punto exterior a ela, P , debuxemos unha recta paralela a r que pase por P .* Nos catro pasos que mostramos na Fig. 1, dáse solución a esta proposta: No apartado A) debuxouse o enunciado. Pasemos ao apartado B): Collemos un compás e, facendo centro en P , trazamos un arco para determinar o punto 1 sobre r ; logo –sen cambiar a apertura do compás– facemos centro en 1 para determinar o punto 2 trazando o arco que pasa por P . Agora vexamos o apartado C): Abrimos o compás dende 2 ata P . Con esa medida, facendo centro en 1 , trazamos o punto P' . A solución buscada obtense trazando a recta PP' , tal como se mostra no apartado D).

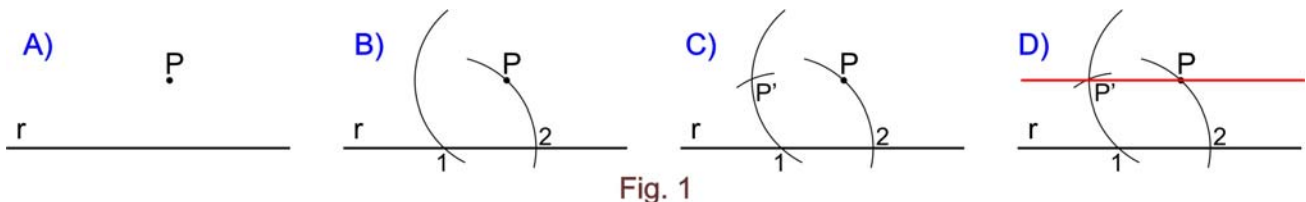


Fig. 1

Tratemos de buscar resposta a unha segunda proposta: *Dada unha recta, r , e un punto sobre ela, P , trázese unha perpendicular a r que pase por P .* Na Fig. 2 ilústrase a resposta, ¿es quen de interpretala?

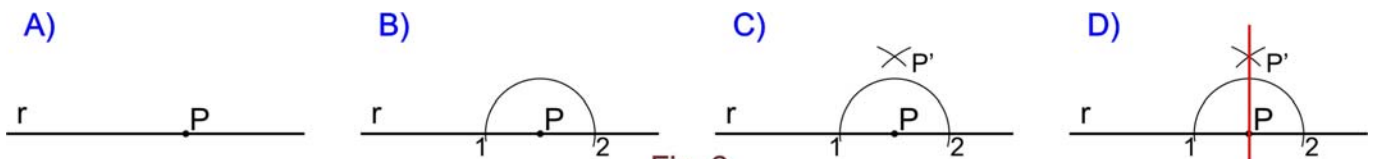


Fig. 2

Polo tanto, hai problemas que se poden abordar utilizando exclusivamente regra e compás, pero existen outros que son imposibles de resolver cando se dispón unicamente deses recursos. *Os problemas délicos* enmárcanse nesa segunda categoría: *son imposibles de resolver utilizando só regra e compás*.

Para que ti practiques con regra e compás, propoñémosche que intentes solucionar as seguintes cuestións:

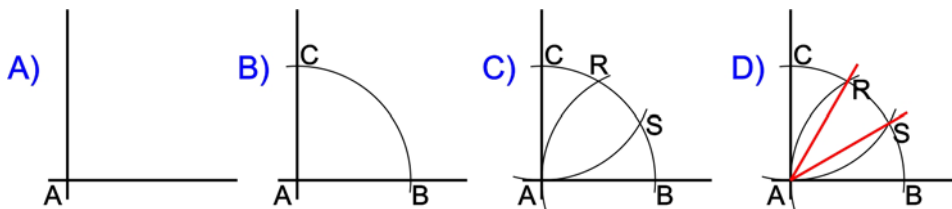
INVESTIGA. Dá resposta ás seguintes cuestións, redactando o proceso seguido paso a paso.

1.- Divide un segmento de 10 cm en 7 partes iguais.

2.- Debuxa un pentágono regular.

Volvendo aos tres problemas clásicos. **Trisecar un ángulo** consiste en dividilo en tres partes iguais. En xeral, a trisección dun ángulo non é posible, pero este é o único, entre os tres problemas que nos ocupan, que permite algunha excepción. Por exemplo, velaquí como se pode trisecar o ángulo de 90° :

Supoñamos un ángulo de 90° con vértice en *A*, coma o do apartado A) do gráfico. No apartado B), facemos centro en *A* e trazamos un arco para determinar os puntos *B* e *C*.

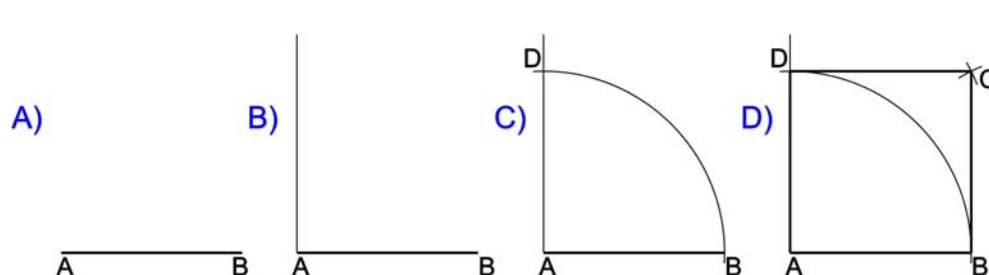


No apartado C) facemos centros en *B* e *C*, respectivamente, para conseguir os puntos *R* e *S*. O debuxo do apartado D) mostra a resposta que queríamos conseguir.

Para dar solución ao problema da trisección dun ángulo –sen utilizar regra e compás– os gregos botaron man dunha curva construída por **Hipias de Ellis**, a **trisectriz de Hipias**. Esta curva tamén se denomina **cuadratriz de Hipias** porque permite facer a cuadratura dun círculo. A primeira demostración sobre a imposibilidade de poder levar a cabo a trisección dun ángulo calquera foi publicada en 1837 polo matemático francés **Pierre Laurent Wantzel** (París, 5 de xuño de 1814 – 21 de maio de 1848).

O problema da **duplicación dun cubo** consiste en construír, a partir dun cubo dado de aresta *a* e volume a^3 , outro cubo co dobre do volume, $2a^3$.

Se un cubo de volume b^3 fose construído duplicando outro de volume a^3 , cumpriríase $b^3 = 2a^3$. Polo tanto $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$. Como $\sqrt[3]{2}$ non se pode construír utilizando unicamente regra e compás, tampouco é posible a duplicación dun cubo utilizando ese método. A imposibilidade de facer a duplicación dun cubo foi demostrada tamén por Wantzel.



É fácil construír con regra e compás un cadrado do que se coñece o lado (basta recordar que na páxina anterior, **Fig. 1** e **Fig. 2**, vimos como trazar unha paralela a unha recta dada por un punto exterior a ela

e unha perpendicular por un punto contido nela). Así, pois, na anterior secuencia ilústrase en catro pasos como se pode construír un cadrado de lado AB dado. No número 35 de **Mathesis** vimos como facer a cuadratura dun polígono convexo.

Cando se fala da **cuadratura do círculo**, pártese dun círculo de área dada e preténdese construír un cadrado da mesma área que a do círculo. A razón pola que non se pode resolver este problema utilizando regra e compás é porque tería que cumprirse que $\pi \cdot r^2 = l^2$ (sendo *r* o raio do círculo e *l* o lado do cadrado), que sería equivalente a que se verificase $\frac{l}{r} = \sqrt{\pi}$ pero π é un número transcendente –como

demostrou Ferdinand Lindemann en 1882–, logo non se pode construír con regra e compás.



Sonia Vázquez Vázquez
Cuarto ESO-A