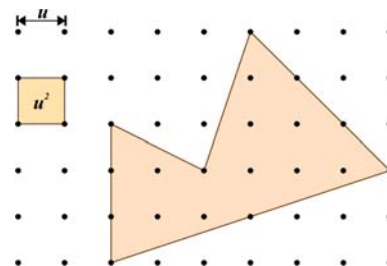


FÓRMULA DE PICK

Cando nos tocou calcular a *medida da superficie* dun *polígono* ou dun recinto tivemos que utilizar diferentes *fórmulas* e mesmo recorrer a procedementos como pode ser o da *triangulación de figuras*.

No gráfico da dereita debuxouse un **polígono simple** (é dicir, os seus lados non se cortan entre si) que ten todos os seus *vértices* sobre puntos dunha **trama cadrada**. No debuxo tamén se deixa constancia, das unidades que imos utilizar para medir *lonxitudes*, u , e *superficies*, u^2 .



Observa que o *polígono* debuxado contén 10 puntos da trama sobre o seu *contorno* e 9 puntos no seu *interior*. O obxectivo que pretendemos conseguir con esta investigación é determinar se existe algunha relación entre a *medida da superficie de figuras poligonais* que teñan os seus vértices en puntos dunha trama cadrada e o **número de puntos** contidos no seu *contorno* e *interior*.

Imos tratar de resolver a cuestión pasando por diferentes fases. Iniciamos o traballo observando que é o que ocorre con polígonos que **non conteñen puntos da trama no seu interior**.

No seguinte gráfico debuxamos 13 figuras das que non é difícil calcular a súa área, tendo en conta as fórmulas para obter a medida da superficie dun triángulo e dun rectángulo. Na táboa de dereita indícase, para cada unha das figuras, cal é o **numero de puntos** da trama **que están sobre o seu contorno** e tamén a súa área expresada en **unidades cadradas**.

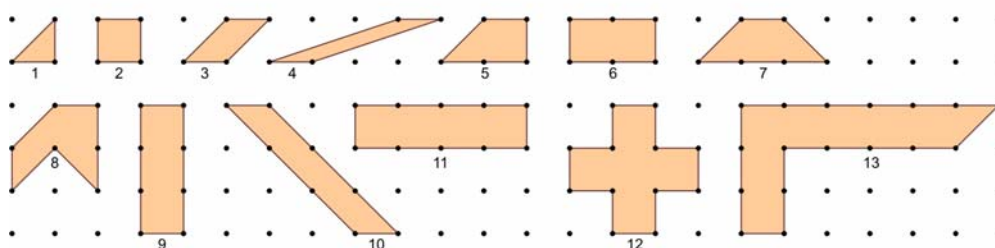


Figura	Puntos	Área en u^2
1	3	0,5
2	4	1
3	4	1
4	4	1
5	5	1,5
6	6	2
7	6	2
8	7	2,5
9	8	3
10	8	3
11	10	4
12	12	5
13	17	7,5

Se miramos a táboa con atención chegamos a dúas conclusións: A) os polígonos cos mesmos puntos no seu contorno teñen a mesma área: B) se aumentamos un punto no contorno, a área aumenta en $0,5 u^2$.

Constrúe ti novas figuras para tratar de comprobar estas conxecturas. Pero ademais, e esta é a observación máis importante, o valor da área da figura coincide coa metade do número de puntos contidos no seu contorno diminuído nunha unidade.

Así, pois, se representamos por C o número de puntos do contorno da figura e por A a súa área, chegamos á seguinte fórmula:

$$A = \frac{C}{2} - 1 \quad (1).$$

Agora ímolo intentar con figuras que teñen **un punto no seu interior**:

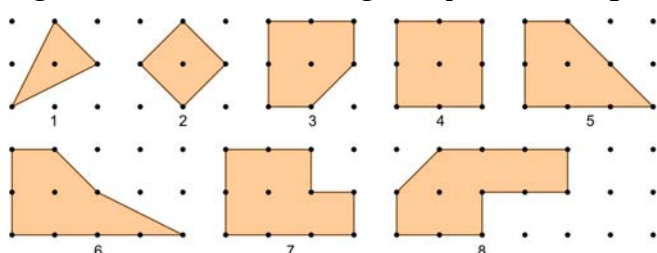


Figura	Puntos	Área en u^2
1	3	1,5
2	4	2
3	7	3,5
4	8	4
5	8	4
6	9	4,5
7	10	5
8	11	5,5

Ten en conta que nesta táboa a columna *puntos* refírese ao número de puntos que contén cada figura no seu *contorno*.

Podemos observar que

unha figura que contén **3** puntos *no seu contorno* e **1** *no seu interior* ten unha área de **1,5** u^2 ; outra que contén **4** puntos *no seu contorno* e **1** *no seu interior* ten unha área de **2** u^2 ; outra con **8** puntos *no seu contorno* e **1** *no seu interior* ten unha área de **4** u^2 , etc.

Intuímos que as figuras que conteñan **C** puntos *no seu contorno* e **1** *no seu interior* teñen unha área de **C/2** u^2 . E o máis importante, se nos fixamos na fórmula (1) que obtivemos anteriormente, vemos que para

polígonos que teñan **un punto** no seu interior podemos escribir: $A = 1 + \frac{C}{2} - 1$.

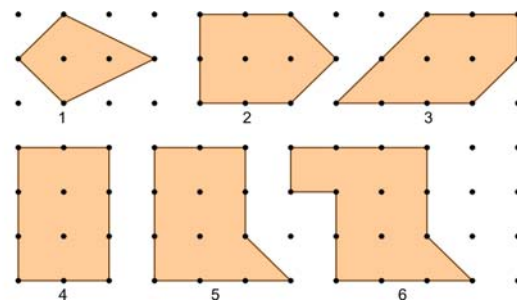
Investiguemos agora con figuras que conteñan dous puntos no seu interior:

Nas seguintes táboa e figura resumimos o estudo que fixemos, mostrando media ducia de polígonos que conteñen **dous** puntos no seu interior mestres que no seu contorno se atopan o número de puntos que indicamos na columna *puntos* da táboa.

Fíxate que, para esta situación, a fórmula (1) reescríbese da seguinte

maneira: $A = 2 + \frac{C}{2} - 1$.

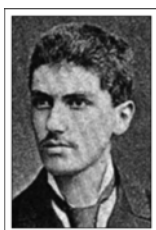
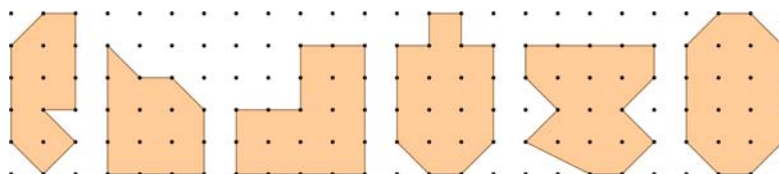
Figura	Puntos	Área en u^2
1	4	3
2	8	5
3	9	5,5
4	10	6
5	11	6,5
6	13	7,5



Podemos comezar a sospeitar que para **calquera** polígono simple, **que teña os seus vértices en puntos dunha trama cadrada**, existe unha relación entre a súa área, **A**, e o número de puntos contidos no seu interior, **I**, e no seu contorno, **C**, é que esta relación pode ser expresada mediante a seguinte fórmula:

$$A = I + \frac{C}{2} - 1 \quad (2).$$

Queremos dar consistencia á nosa sospeita comprobándoa para outros polígonos, cuestión que che propoñemos para que a realices ti:



George Alexander Pick (Viena, Austria, 10 de agosto de 1859 – Theresienstadt, República Checa, 26 de xullo de 1942). Os pais deste matemático austríaco foron Josefa Schleisinger e Adolf Josef Pick. Estudou na Universidade de Viena.

Despois do seu doutoramento foi designado axudante de Ernest Mach na Universidade Charles-Ferdinand de Praga, da que logo sería profesor.

En 1884 pediu unha licenza para traballar con *Félix Klein* na Universidade de Leipzig e logo volveu para Praga onde traballou ata a súa xubilación en 1927, data na que retornou para Viena.

Pick tivo relación con *Einstein* chegando a poñelo en contacto coas ferramentas matemáticas que despois utilizaría para formular a súa *Teoría da Relatividade*.

Pertenceu á Academia checa de Ciencias e Artes; no entanto, o seu nome quedou ligado para sempre á fórmula que permite calcular a área dun polígono que teña os vértices en puntos dunha trama cadrada (a fórmula (2) que citamos anteriormente).

O 13 de xullo de 1942 foi enviado polos nazis ao campo de concentración de Theresienstadt, onde morreu uns poucos días máis tarde.

Fontes:

http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pick.html>

Mathesis. Número 37. Páxina 2.



Eva María Seoane Santiso.
Cuarto ESQ_B.

NÚMEROS PERFECTOS, NÚMEROS AMIGOS

Existen moitas anécdotas, curiosidades e mesmo lendas acerca dos números. Eu quero falar aquí sobre dúas familias de números ben especiais: aquelas que son denominadas polos matemáticos como **números perfectos** e **números amigos**.

Jámblico, filósofo grego do século III, atribuíu o descubrimento dos números amigos a **Pitágoras**, e relatouno coa seguinte anécdota: «Cando lle preguntaron a **Pitágoras** ¿que é un amigo?, contestou : - *Alter ego*.» (é dicir: aquel outro que é como son eu mesmo). E a seguir desta enigmática resposta, **Pitágoras** citou os números 220 e 284 aos que cualificou como **números amigos**.

Para o descubrimento das aproximadamente 1 000 parellas de **números amigos** coñecidas na actualidade, empregáronse séculos. Durante a Idade Media **números perfectos** e **amigos** utilizáronse na confección de horóscopos e graváronse en talismáns para conseguir efectos amorosos.

A pesar de que todo empezou na época da *escola pitagórica*, non foi ata 1636 cando **Pierre de Fermat** atopou a seguinte parella de **números amigos**: 17 296 e 18 416 que, como se ve, están bastante afastados do 220 e 284 que citamos antes.

Fermat e **Descartes** redescubriron fórmulas para calcular **números amigos** que xa eran coñecidas polos árabes no século IX. Dise que **Descartes**, usando eses coñecementos, atopou a parella amigable formada polos números 9 363 584 e 9 437 056.

Euler construíu unha táboa con 64 parellas de **amigos**, aínda que máis tarde se comprobaría que unha delas era incorrecta.

Téñense atopado parellas de **números amigos** por persoas que non son matemáticos profesionais; por exemplo, un mozo italiano de 16 anos, **Nicolás Paganini**, en 1867 descubriu que 1 184 e 1 210 eran amigos, xusto a parella seguinte a 220 e 284.

Así e todo, comecemos polo principio: Un número natural **a** é **divisor** doutro número natural **b**, cando o resto de dividir **b** entre **a** é **zero**; noutras palabras, cando a división de **b** entre **a** é exacta. Tamén se pode dicir que **b** é divisible por **a** ou que **b** é un **múltiplo** de **a**.

¿E cantos divisores ten un número natural? Un número natural ou é **primo** ou é **composto**. No caso de que sexa primo, ten dous únicos divisores que son o 1 e o propio número; cando o número é composto, ten máis de dous divisores.

Para obter todos os divisores dun número composto débese descompoñer en produto de factores primos e proceder ordenadamente para conseguir eses divisores a partir das potencias dos factores primos que interveñen na súa descomposición.

Por exemplo, tratemos de obter ordenadamente os divisores do número 36. Primeiro facemos a descomposición do número 36 en factores primos: $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Vexamos as potencias dos factores primos que debemos ter en conta: A) potencias do primeiro factor: 2^0 , 2^1 e 2^2 (1, 2 e 4); B) potencias do segundo factor: 3^0 , 3^1 e 3^2 (1, 3 e 9). Para obter todos os divisores de 36 procedemos á construción da *táboa 1*, na que se sombreou o resultado.

Táboa 1

x	1	2	4
1	1	2	4
3	3	6	12
9	9	18	36

Polo tanto os divisores de 36 so: **Div. (36)** = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

Poñamos outro exemplo calculando os divisores de 120: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Faremos dous pasos: Primeiro traballaremos coas potencias de 2 (2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3) e de 3 (3^0 , 3^1) e logo o resultado combinámolo coas potencias de 5 (5^0 , 5^1):

Táboa 2

x	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24

➔

Táboa 3

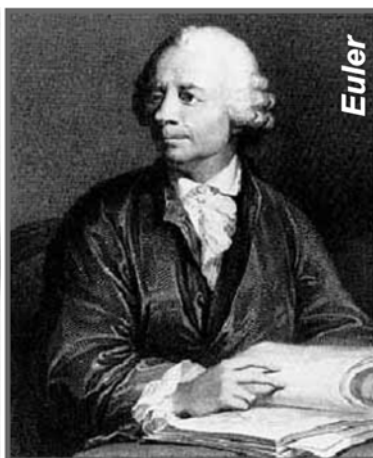
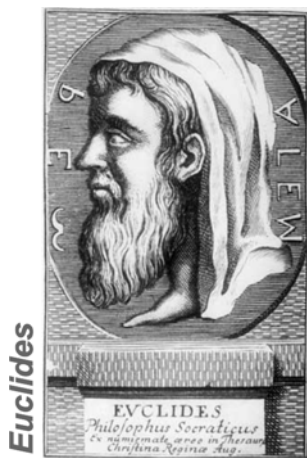
x	1	2	4	8	3	6	12	24
1	1	2	3	4	6	8	12	24
5	5	10	15	20	30	40	60	120

Así, pois, os divisores de 120 son: **Div. (120)** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120}

A partir destes exemplos, queda claro que se sabe cal vai ser o número de divisores dun número composto antes de escribilos: multiplicamos os expoñentes dos factores que corresponden á súa descomposición en factores primos,

aumentados todos nunha unidade. Para os nosos exemplos: como $36 = 2^2 \cdot 3^2$, sabemos que ten $(2+1) \cdot (2+1) = 9$ divisores e como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ terá $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$ divisores.

Dise que un **número** é **perfecto** cando coincide coa suma dos seus divisores, exceptuando o propio número. Así, o número 6 é un número perfecto xa que $6 = 1 + 2 + 3$ e o 28 tamén é perfecto pois $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.



Euclides (aproximadamente, 325 a. C. – 265 a. C.), no libro IX dos *Elementos*, dá un método orixinal para atopar **números perfectos**. A proposición 36 dese libro di así:

"Se tantos números como se queira a partir dunha unidade se dispoñen en proporción duplicada ata que a súa suma total resulte un número primo, e se a suma multiplicada polo último produce algún número, o produto será un número perfecto".

Dito en terminoloxía actual:

"Se a suma das n primeiras potencias de 2 é un número primo, entón o produto desa suma pola última potencia é un número perfecto". Ou sexa:

Se $(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})$ é primo, entón $(1+2+2^2+\dots+2^{n-1}) \cdot 2^{n-1}$ é perfecto.

Euler demostrou o recíproco dese teorema:

Se N é un número perfecto e par, entón $N = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, onde $2^n - 1$ é un número primo.

¿E como se chaman os números que non son perfectos? Se ao facer a suma dos *divisores* dun número (exceptuando o propio número) obtemos un resultado *inferior* ao seu valor, diremos que ese número é **defectivo** ou **deficiente**. Se ao facer a suma citada sae un resultado *superior* ao valor do número, temos un número **abundante**.

Así, pois, o número 14 é *deficiente* xa que $1+2+7 = 10 < 14$ e o número 12 é *abundante* posto que $1+2+3+4+6 = 16 > 12$.

Os números *primos* son *defectivos*, e tamén o son as potencias dos números primos e os divisores propios dos números defectivos e perfectos. Existen, pois, infinitos números defectivos, xa que existen infinitos números primos, e estes son só algúns dos números defectivos.

Os múltiplos propios de números perfectos e abundantes son *abundantes*. Polo tanto, os múltiplos de 6 (12, 18, 24, 30, ...) son *abundantes*. O primeiro número abundante impar é 945 e tamén son abundantes os seus múltiplos impares.

Dous **números amigos** son dous naturais tales que a suma dos divisores dun deles (sen incluír o propio número) é igual ao outro, é viceversa.

Un par de **números amigos** son, por exemplo, 220 e 284 xa que os divisores de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110; os divisores de 284 son 1, 2, 4, 71 e 142 e cúmprese:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$$

$$1+2+4+71+142 = 220$$

Polo ano 850, *Abu-l-Hasan Thabit ibn Qurra* (826-901) obtivo unha fórmula para xerar números amigos:

Para calquera $n > 1$, se $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^n - 1$, $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ son tres números primos, entón $2^n p q$ e $2^n r$ son un par de números amigos.

Investiga: Exemplos de números perfectos e exemplos de parellas de números amigos.

Referencias:

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/pitagoras8.asp>

<http://matematicas.iesvegadelturia.es/numeros.htm>

http://www.matematicas.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=41570



Pablo Vieites Rodríguez.
Cuarto ESO-A.