

A lenda do nacemento do xadrez e as sucesións numéricas



Como ocorre con todas as lendas, esta que vos vou contar pode que sexa certa ou pode ser que non teña ocorrido nunca. Non obstante, é unha fermosa historia.

Hai moito moito tempo, tanto que non se pode precisar a época exacta, viviu e reinou na *India* un príncipe chamado *Iadava*. Este rei era un gran estratega e dirixía persoalmente as batallas que libraban os seus exércitos cando o reino era atacado.

Na chamada batalla de *Dacsina* o rei conseguiu levar aos seus soldados á vitoria pero o número de baixas resultou ser moi cuantioso, ata tal punto que na loita caeu morto o seu querido fillo *Adjamir*.

Cando regresou a palacio, o rei estaba triste por aquela irreparable perda. Nada do que o rodeaba, nin as súas inmensas riquezas podían servir para levantar o seu ánimo. *Iadava* pasaba o tempo recluído nos seus aposentos recreando, nunha gran caixa chea de area, unha e outra vez, as manobras da batalla: Cun suco, indicaba a marcha da infantería, noutro trazo mostraba o avance dos elefantes de guerra... cando remataba a representación da contenda, borraba todo e comezaba de novo.

Un día presentouse ante o soberano un home que dixo chamarse *Lahur Sessa* e que traía a intención de regalarlle ao rei un xogo novo que el mesmo inventara.

O xogo desenvolvíase sobre un gran taboleiro cadrado divididos en 64 cadrados máis pequenos que eran alternativamente negros e brancos. Sobre estes cadrados ou casañas colocábanse as pezas para xogar. Esas pezas agrupábanse formando dúas series iguais que se diferenciaban pola súa cor: unhas eran brancas e as outras negras. Repartíanse as figuras a un e outro lado do taboleiro e estaban establecidas regras que determinaban os seus movementos.

Cada xogador dispoñía de oito pezas pequenas: os peóns, que representaban a infantería; e ademais, as torres que son os elefantes de guerra, os cabalos que son a cabalería, os visires, que son os alfís, outra figura que representaba a raíña e, finalmente, o rei.

Sessa ensinoulle a xogar, e o rei, nun momento do xogo, observou como a disposición das distintas pezas representaba a batalla de *Dacsina*. O inventor do xadrez procurou que o rei se decatase de que ás veces para gañar é preciso sacrificar algunha peza ben querida, en referencia á batalla e á morte do príncipe *Adjamir*.

O rei quedou tan entusiasmado co xogo que quixo recompensar a *Lahur Sessa* e mandoulle que pedira o que máis desexase.

Nun principio o creador do xogo rexeitou toda recompensa, pero ante a insistencia do rei e temendo parecer descortés falou así:

– A maior das recompensas foi para min que o xogo vos gustase. Pero para non facer desprezo á vosa xenerosidade quero recibir a seguinte recompensa: ordena que se me entregue un gran de trigo pola 1ª casaña do taboleiro, 2 pola 2ª, 4 pola 3ª, 8 pola 4ª, e así sucesivamente ata completar as 64 casañas do taboleiro.

O rei e todos os presentes botáronse a rir pensando que a recompensa pedida era moi pouca cousa, pero o rei accedeu á petición e ordenou aos matemáticos da corte que calcularan a cantidade de trigo que debía entregarse a Sessa...

E agora, para poder dar remate a esta historia e comprender os cálculos que tiveron que facer os matemáticos do rei, temos que falar de **progresións**.

Unha **progresión aritmética** é unha colección ordenada de números reais (ou sexa, unha **sucesión de números reais**) tales que cada un deles, salvo o primeiro, é igual ao anterior máis unha cantidade constante, **d**, chamada **diferenza**.

Exemplo: a sucesión 3, 5, 7, 9, 11, 13... é unha **progresión aritmética** de **diferenza 2**.

Loxicamente, a **diferenza** pode ser negativa e, polo tanto, a sucesión 2, 0, -2, -4, -6... é unha **progresión aritmética** de **diferenza -2**.

Unha **progresión xeométrica** é unha **sucesión de números reais** na que cada **termo**, agás o primeiro, se obtén multiplicando o anterior por unha cantidade constante denominada **razón**, que se acostuma representar por **r**. Por exemplo, a sucesión 1, 2, 4, 8, 16, 32... é unha **progresión xeométrica** de **razón 2**; a sucesión 1, -2, 4, -8, 16... é unha **progresión xeométrica** de **razón -2**; e a sucesión 1, 0.5, 0.25, 0.125... é unha **progresión xeométrica** de **razón 1/2**.

Como se pode observar, para construír progresións aritméticas e xeométricas séguense técnicas moi similares: pártese dun termo inicial, **a₁**, e vaise sumando unha cantidade constante, no caso das **progresións aritméticas**, ou multiplícase sempre pola mesma cantidade, cando se trate de **progresións xeométricas**.

Centremos agora a nosa atención no estudo das progresións xeométricas, xa que van ser as que nos axudarán a explicar o que pretendemos.

Para obter o valor dos sucesivos termos dunha progresión xeométrica, partiremos do primeiro e iremos multiplicando pola razón, **r**, tal como se dixo na definición:

$$a_1, \quad a_2 = a_1 \cdot r, \quad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2, \quad a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \quad \dots \quad \text{e así sucesivamente.}$$

Logo a expresión dun termo xenérico dunha progresión xeométrica será: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ que é o que se adoita chamar **expresión do termo xeral** dunha **progresión xeométrica**.

Por exemplo, se temos a sucesión, 1, 2, 4, 8, 16... a expresión que nos dá o seu termo xeral é

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ e se queremos calcular, poñamos por caso, o valor dos termos que ocupan os lugares cincuenta ou sesenta e catro teremos, respectivamente, $a_{50} = 2^{49}$ e $a_{64} = 2^{63}$.



Intercambia os cabalos brancos polos negros, seguindo os movementos permitidos para o cabalo no xogo do xadrez. ¿Cal é o número mínimo de movementos que permite facer o cambio?

Se queremos calcular a suma dos **n** primeiros termos dunha progresión xeométrica, que denotaremos **S_n**, podemos proceder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r \\ a_4 &= a_3 \cdot r \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot r \end{aligned}$$

Facemos a suma dos termos que están a cada lado do signo igual, e quedaranos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + a_3 \cdot r + a_4 \cdot r + \dots + a_{n-1} \cdot r$$

Á dereita do signo = vexo que todos os termos teñen como factor a razón, **r**, entón sacamos factor común:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n = r \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1})$$

Á esquerda do signo = temos a suma dos **n** primeiros termos menos o primeiro, á dereita está a suma dos **n** primeiros termos menos o último. Podemos escribir:

$$S_n - a_1 = r(S_n - a_n)$$

E polo tanto:

$$S_n - a_1 = S_n \cdot r - a_n \cdot r$$

$$a_n \cdot r - a_1 = S_n \cdot r - S_n$$

$$a_n \cdot r - a_1 = S_n(r - 1)$$

Polo que podemos concluír:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Volvamos, pois, á historia do xadrez: O creador do xogo pedira 1 gran de trigo pola primeira casíña, 2 grans pola segunda casíña, 4 pola terceira, 8 pola cuarta, e así sucesivamente... É dicir, atopámonos coa seguinte colección de números:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...

Os matemáticos do rei decatáronse que tiñan diante de si unha **progresión xeométrica** de **razón 2** e, para cumprir o mandado que se lles fixera debían sumar os primeiros sesenta e catro termos desa progresión, pois ese era o número de casíñas que formaban o taboleiro de xadrez.

Primeiro calcularon o número de grans de trigo correspondentes á casíña número 64; é dicir, o valor do termo sesenta e catro da sucesión: $a_{64} = a_1 \cdot r^{64-1} = 1 \cdot 2^{63} = 2^{63}$.

De seguido calcularon a suma dos grans de trigo das 64 casíñas:

$$S_{64} = \frac{a_{64} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Cando os matemáticos deron calculado os graos de trigo que debía entregar o rei para cumprir a súa promesa, quedaron abraiados. As risas que botaran ao escoitar a petición de Sessa trocábase agora nunha fonda preocupación. Transmitíronlle o resultado das contas ao seu soberano:

– ¡Rei magnánimo! A petición que che fixo *Lahur Sessa* dista moito de ser ridícula e merece ser rexistrada para que nunca sexa esquecida. A cantidade de trigo que tes que lle dar so se pode comparar a unha montaña cen veces mais alta co Himalaia; sementados todos os campos da India, non darán en dous mil séculos a cantidade necesaria para cumprir coa promesa feita a Sessa.

O inventor do xadrez, despois de liberar ao rei da obriga de ter que cumprir coa súa promesa, díxolle que non hai que tomar á lixeira as cuestións que teñen que ver cos números e que existen moitas cousas que presentan unha aparencia insignificante detrás da que se esconde un gran valor.

Fontes:

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0101-01/ed99-0101-01.html>

http://es.wikipedia.org/wiki/Progresi%C3%B3n_geom%C3%A9trica

<http://lem.usach.cl/bibliotecas/BD/progresiones.pdf>

<http://www.aulafacil.com/matematicas-progresiones-aritmeticas/curso/Lecc-7.html>

El hombre que calculaba. Malba Tahan. RBA.

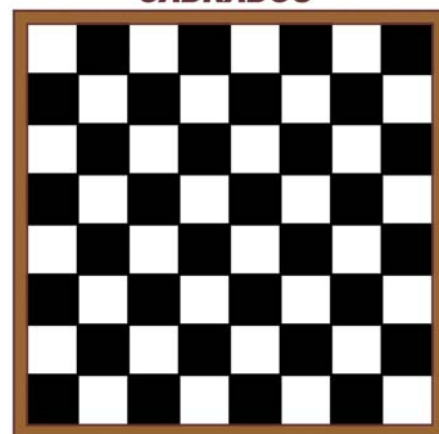
Matemáticas recreativas. Yakob Perelman. RBA.

A FUXIDA DO CABALO



Coloca un cabalo na casíña sinalada. Seguindo os movementos permitidos para esta peza no xogo do xadrez, debes chegar á casíña de **saída**, pasando previamente por todas as casíñas deste taboleiro 5x5.

CADRADOS



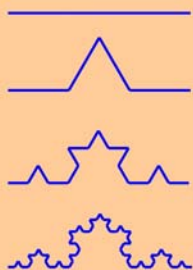
¿Cantos cadrados se poden contar sobre un taboleiro de xadrez?



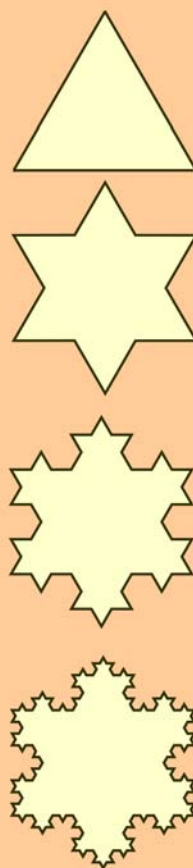
Carolina Pardo Dans.
Cuarto ESO-B.

FOLERPA DE KOCH

Os catro primeiros pasos para a construción da Curva de Koch



Os catro primeiros pasos da construción da Folerpa de Koch



Coa escrita destas liñas pretendo dar resposta á cuestión que se presentou na segunda páxina do número 30 de *Mathesis* onde se pedía que se identificase a un misterioso personaxe do que se facilitaba un retrato.

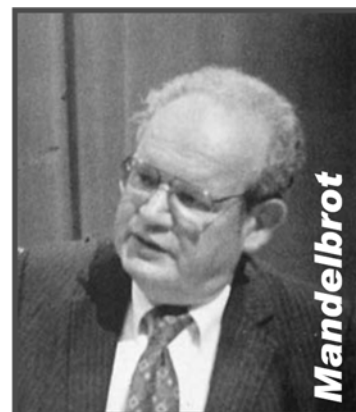
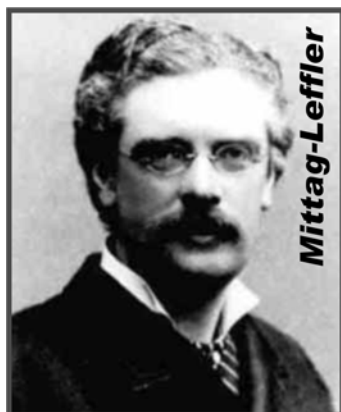
O descoñecido resultou chamarse **Fabian Helge von Koch**. Coa investigación que fixen descubrín moitas cousas interesantes que teñen que ver con el; de seguido vouvos contar algunhas.

Niels Fabian Helge von Koch naceu en Estocolmo o 25 de Xaneiro de 1870 e morreu, aos 54 anos, o 11 de Marzo de 1924.

Seu pai chamábase *Richert von Koch* e súa nai *Agathe Henriette Wrede*, ambos pertencían a familias da nobreza sueca.

Despois de asistir á escola elemental, estudou matemáticas na Universidade de Estocolmo onde recibiu clases do gran matemático sueco **Magnus Gösta Mittag-Leffler**, que sempre sería considerado por **Koch** coma o seu mestre e guía.

Niels Fabian Helge von Koch converteuse nun importante matemático e o seu nome quedou ligado para sempre a unha famosa e fermosa curva *fractal*: a denominada **Folerpa de Koch**, unha das primeiras curvas fractais que se describiron xa que o seu nacemento ocorreu en 1904.



Un *fractal* é un obxecto xeométrico cuxa estrutura básica, *fragmentada* ou *irregular*, se repite a diferentes escalas. O termo foi proposto polo matemático **Benoît Mandelbrot** e significa quebrado ou *fracturado*. Moitas estruturas, mesmo das que aparecen frecuente na natureza, son de tipo fractal.

Se queres coñecer máis cousas sobre fractais podes botar unha ollada ao número 5 de *Mathesis*.

Koch describiu a curva que leva o seu nome nun artigo titulado *Acerca dunha curva continua que non posúe tanxentes e obtida mediante unha construcións xeométrica elemental*.

Von Koch escribiu moitos artigos sobre teoría de números. Un dos seus resultados mais famosos consistiu nunha importante demostración que ten que ver cos números primos.



Foi profesora de matemáticas na Universidade de Estocolmo.
¿Quen é? Investiga



Nair Lage García.
Terceiro ESO-A.

Fontes:

http://es.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch

<http://www.slideshare.net/dematesna/trabajo-investigacin-fractales-entorno-vistos-desde-el-cielo>

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/PaseoFitxategiak/PG97-98-aguirre.pdf>

<http://fractales.org/copo-de-nieve-de-koch-2/comment-page-1/>